F. González Maján. fgonzalezmaj@uoc.edu

Algunas propiedades fundamentales

En los límites que aparecen en las propiedades siguientes, puede suponerse indistintamente que $x \to a$, $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to \infty$. (Eso sí, en todos los límites de un enunciado debe suponerse la misma tendencia de x.)

En caso de existir Lim f(x) y Lim g(x), "si se cumple f(x) ≤ g(x) para todo x de un entorno de *a*, entonces Lim f(x) ≤ Lim g(x)"	
Si Lim f(x) > 0, entonces hay algún entorno de *a* en el cual f(x) es positivo para cada $x \neq a$	
Si existen Lim f(x) = L, y Lim g(x) = M, entonces a) $\lim\left(f(x)+g(x)\right)=L+M$ b) $\lim\left(f(x)-g(x)\right)=L-M$ c) $\lim\left(f(x)\cdot g(x)\right)=L\cdot M$ d) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$, si $M\neq 0$ e) $\lim\left(f(x)^{g(x)}\right)=L^M$, si $L>0$	**Ejemplos** a) Si Lim f(x) = 3 y Lim g(x) = -5, entonces, sean cuales sean las expresiones de f(x) y g(x), se obtendrá que $\lim\dfrac{f}{g}=\dfrac{3}{-5}=-0'6,\quad \lim f^g=3^{-5}=-\dfrac{1}{243}$
Si en la propiedad 3, las letras L o M representan un infinito, entonces al usar las reglas a, b, c, d, e, hay que tener en cuenta estas igualdades: **Reglas de cálculo con infinitos** (L real) **4.1** $\begin{cases} L+(+\infty)=+\infty, \quad L-(+\infty)=-\infty, \\ L+(-\infty)=-\infty, \quad L-(-\infty)=+\infty \\ \dfrac{L}{\pm\infty}=0, \quad \dfrac{\infty}{L}=\infty, \quad L\cdot\infty=\infty, \text{ si } L\neq 0 \\ L^{+\infty}=+\infty, \text{ si } L>1, \quad L^{+\infty}=0, \text{ si } 1>L>0 \\ (+\infty)+(+\infty)=+\infty, \quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty \end{cases}$ **4.2** Las siguientes expresiones dependen de las funciones f(x), g(x) que las originan; por eso, se llaman *indeterminaciones,* y las indicamos con interrogante. $\begin{cases} (+\infty)-(+\infty)=?, \quad (-\infty)+(+\infty)=? \\ \dfrac{\infty}{\infty}=?, \quad 0\cdot\infty=?, \quad \dfrac{\infty}{\infty}=?, \quad \dfrac{0}{0}=? \\ \infty^0=?, \quad 1^\infty=?, \quad 0^0=? \end{cases}$ (Mira en el ejemplo adjunto el porqué de algunas)	**Ejemplos** b) Si Lim f(x) = 3 y Lim g(x) = + ∞, entonces, sean cuales sean las expresiones de f y g, se cumplirán $\lim\dfrac{f}{g}=\dfrac{3}{\infty}=0,\quad \lim f\cdot g=3\cdot\infty=\infty$ **Ejemplo sobre la indeterminación 0· ∞** Imaginemos que $x\to 2$. Pongamos $f(x)=x-2,\quad g(x)=(x-2)^2,\quad h(x)=\dfrac{5x}{x-2}$ Es obvio que $\lim f(x)=0,\quad \lim g(x)=0,\quad \lim h(x)=\infty$ $\lim f(x)\cdot h(x)=0\cdot\infty,\quad \lim g(x)\cdot h(x)=0\cdot\infty$ Sin embargo $0\cdot\infty=\lim f(x)\cdot h(x)=\lim 5x=10$ $0\cdot\infty=\lim g(x)\cdot h(x)=\lim(x-2)5x=0\cdot 10=0$

Ejercicios propuestos: 6, 7, 11 de la página190.

F. González Maján. fgonzalezmaj@uoc.edu

Algunos métodos para el cálculo de límites

El cálculo general de límites sería impracticable si hubiera que hacerlo basándose en la definición de límite. Para tal objetivo, es, pues, de suma importancia conocer bien unas cuantas reglas básicas.

Empezaremos por los conceptos de *infinitésimo* e *infinito.*

	Ejemplos de infinitésimos	**Equivalencias**
• Un ***infinitésimo*** es una función de límite 0. Más exactamente, un *infinitésimo en x=a (o en $x=\infty$)* es una función, f, tal que $\lim f(x)=0$ si $x\to a$ (o $x\to\infty$) • Si f(x) y g(x) indican infinitésimos, en el mismo punto, se dice que son **equivalentes** si se cumple $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ si $x\to a$ (o $x\to\infty$)	**1.** $f(x)=(x-3)^2$ en x=3. **2.** $f(x)=\sin x$ en x=0 **3.** $f(x)=\dfrac{5}{x}$, si $x\to\infty$ **4.** $f(x)=1-\cos x$ en x=0 **5.** $f(x)=e^x-1$ en x=0 **6.** $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ en x=0 **7.** $f(x)=\ln(1+x)$ en x=0 **8.** $f(x)=e^x$ si $x\to-\infty$	*Si un infinitésimo figura como factor, o divisor*, puede sustituirse por otro equivalente (a efectos de calcular un límite). Es, pues, importante conocer algunas equivalencias: **1.** $\sin x\sim x$ si $x\to 0$ **2.** $\tan x\sim x$ si $x\to 0$ **3.** $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ si $x\to 0$ **4.** $e^x-1\sim x$ si $x\to 0$ **5.** $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$ si $x\to 0$ **6.** $\ln(1+x)\sim x$ si $x\to 0$

	Ejemplos de infinitos	**Equivalencias**
• Un ***infinito*** es una función de límite infinito. Más exactamente, un *infinito en x=a (*o en $x=\infty$*)* es una función, f, tal que $\lim f(x)=\pm\infty$ si $x\to a$ (o $x\to\infty$) • Si f(x) y g(x) indican infinitos, en el mismo punto, se dice que son **equivalentes** si se cumple $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ si $x\to a$ (o $x\to\infty$)	**1.** $f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^n}$ en x=a (n>0) **2.** $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$, si $x\to\infty$ **3.** $f(x)=\sqrt{a_nx^n+...+a_1x+a_0}$ si $x\to\infty$ **4.** $f(x)=\ln(a_nx^n+..+a_1x+a_0)$ si $x\to\infty$ **5.** $f(x)=e^x$ si $x\to\infty$	*Si un infinito figura como factor, o divisor*, puede sustituirse por otro equivalente (a efectos de calcular un límite). Es, pues, importante conocer las equivalencias de infinitos. **1.** $a_nx^n+...+a_1x+a_0\sim a_nx^n$ **2.** $\sqrt{a_nx^n+...+a_1x+a_0}\sim\sqrt{a_nx^n}$ **3.** $\ln(a_nx^n+..+a_1x+a_0)\sim\ln(a_nx^n)$ **4.** $e^{a_nx^n+...+a_1x+a_0}\sim e^{a_nx^n}$

Límites de una función racional (función del tipo $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ indican polinomios)

$\boxed{\text{Caso } x\to a}$ 1º Para calcular $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se sustituye x por *a.* 2º Si el resultado obtenido es $\frac{0}{0}$, se simplifica la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dividiendo $P(x)$ y $Q(x)$ por $x-a$, y se vuelve a calcular el límite de la nueva fracción. (Se repetirán estos pasos 1º y 2º hasta deshacer la indeterminación.)	**Ejemplo:** $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$ 1º Cambiar *x* por 1 da la indeterminación $\frac{0}{0}$. 2º Al dividir numerador y denominador por *x-1,* $(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1,\quad (x^2-x):(x-1)=x$ Ahora, $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x}=\dfrac{3}{1}=3$

F. González Maján. fgonzalezmaj@uoc.edu

$\boxed{\text{Caso } x \to \pm\infty}$ • Si $P(x)$ o $Q(x)$ son números, entonces el valor de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ resulta evidente (Ejemplos 1 y 2) • Si $P(x)$ y $Q(x)$ **no** son números, el valor de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se halla aplicando directamente la equivalencia 1 de la tabla de infinitos y simplificando la fracción que quede (Ejemplos 3 y 4).	**Ejemplo 1:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty$ **Ejemplo 2:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{15}{6x^3+5} = \frac{15}{\infty} = 0$ **Ejemplo 3:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{11x^3+2x}{6x^3+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{11\cancel{x^3}}{6\cancel{x^3}} = \frac{11}{6}$ **Ejemplo 4:** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^4+2x^3-3}{5x^3+3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{71x^4}{5x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{71x}{5} = \frac{\infty}{5} = \infty$

Ejercicios propuestos: 8 a, b, d (pág. 190) y **12 f, g, h** (pág. 191)

Indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\infty - \infty$ motivadas por una diferencia de raíces cuadradas

• Normalmente, los que dan al principio $\frac{0}{0}$ se hallan como sigue: 1º Se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la diferencia de raíces daba el 0 2º Se opera solamente donde aparece la diferencia de raíces (así, dará una diferencia de cuadrados) 3º Finalmente, la fracción resultante se simplifica después de hacer la operación anterior, y se vuelve a calcular el límite. (Ejemplo 1) • Análogamente, los que dan $\infty - \infty$ se calculan multiplicando y dividiendo por la expresión radical conjugada de la que produce esa indeterminación (Ejemplo 2)	**Ejemplo 1:** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \frac{\sqrt{9}-3}{2^2-4} = \frac{0}{0} = ?$ • Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{x+7}+3$, y efectuando sólo el producto $(\sqrt{x+7}-3)\cdot(\sqrt{x+7}+3)$: $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+7})^2-3^2}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}$ Ahora, como $(x-2)$ y (x^2-4) pueden dividirse por $(x-2)$, la fracción última se puede simplificar. Queda $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{24}$ **Ejemplo 2:** $L = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x}) = \infty - \infty$ $L = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{2x-5}-\sqrt{2x})(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5}{(\sqrt{2x-5}+\sqrt{2x})} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5}{(\sqrt{2x}+\sqrt{2x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5}{2\sqrt{2x}} = \frac{5}{\infty} = 0$

Ejercicios propuestos: 8 e, c, f (pág. 190) y **12 e, c, g** (pág. 191)

Indeterminaciones $\frac{0}{0}$ motivadas por funciones trigonométricas

• Normalmente, se calculan sustituyendo por otros infinitésimos equivalentes (Ejemplo 1)	**Ejemplo 1:** $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cdot\tan(3x)}{1-\cos x} = \frac{0}{0} = ?$ Como $\sin 2x \sim 2x,\ \tan 3x \sim 3x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, tenemos $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cdot\tan(3x)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cdot 3x}{\frac{1}{2}x^2} = 12$

Ejercicios propuestos: 13 a, b (pág. 191)

F. González Maján. fgonzalezmaj@uoc.edu

Límites en que surge la indeterminación 1^{∞}

- Normalmente, se calculan recurriendo a las fórmulas siguientes

a) $$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^{k}$$

b) $$\lim_{f(x)\to 0}\left(1+k\cdot f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e^{k}$$

(Ejemplos 1 y 2)

Ejemplo 1: $L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{2x+1}\right)^{7x}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}$

Ahora, observa cómo usamos a)

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{2x+1}\right)^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2x+1}\cdot 7x}=e^{5\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{2x+1}}=e^{5\cdot\frac{7}{2}}$$

Ejemplo 2: $L=\lim_{x\to 0}\left(1+3\sin x\right)^{\frac{1}{\tan(7x)}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$

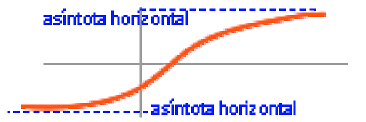
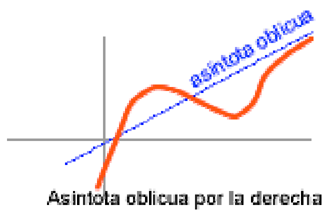
$$L=\left(\left(\lim_{x\to 0}\left(1+3\sin x\right)\right)^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\sin x\cdot\frac{1}{\tan(7x)}}=e^{3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan(7x)}}=e^{3\cdot\lim\frac{x}{7x}}=e^{\frac{3}{7}}$$

Ejercicios propuestos: 14, 15 (pág. 191)

Asíntotas

Si los valores de una función, $y=f(x)$, tienden a confundirse con los de una recta, $y=mx+n$, al tender cuando x hacia ∞, entonces se dice que dicha recta es una ***asíntota*** de la función (Según que ocurra si $x\longrightarrow+\infty$, o si $x\longrightarrow-\infty$, la recta se llama *asíntota por la derecha,* o asíntota por la izquierda). Además, si $m=0$, la recta se llama *asíntota horizontal;* de lo contrario, o sea, si $m\neq 0$, se llama *asíntota oblicua*.

También se llaman *asíntota* (vertical) toda recta $x=a$ tal que $\lim_{x\to a+}f(x)=\pm\infty$ o $\lim_{x\to a-}f(x)=\pm\infty$.
Quede, pues, claro, que para averiguar las asíntotas verticales de una función "hay que descubrir los valores de *x* en los que la función tiene algún límite infinito". (Desde luego, puede haber muchas verticales. Sin embargo, entre horizontales y oblicuas, sólo habrá a lo sumo una por la derecha y otra por la izquierda)

Asíntota horizontal por la izquierda • Recta $y=n,$ siendo $n=\lim_{x\to-\infty}f(x)$	**Asíntota horizontal por la derecha** • Recta $y=n,$,siendo $n=\lim_{x\to+\infty}f(x)$	
Asíntota oblicua por la izquierda • Recta $y=mx+n$, siendo $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ $n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$	**Asíntota oblicua por la izquierda** • Recta $y=mx+n$, siendo $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ $n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$	

Consejos para hallar las asíntotas de una función racional $f(x)=\dfrac{a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m+\ldots+b_1x+b_0}$

Asíntotas verticales **1.** Halla las soluciones de $b_m x^m+\ldots+b_1x+b_0=0$ **2.** Después, halla el $\lim f(x)$ en cada solución.	**Ejemplo:** $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$ **1.** Soluciones de $x^2-4=0$ son $x=2,\ x=-2$. **2.** $\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{4}{0}=\infty$, $\lim_{x\to-2}f(x)=\frac{3}{4}$ luego, de las dos, sólo es asíntota la primera, o sea, $x=2$.

F. González Maján. fgonzalezmaj@uoc.edu

Asíntotas oblicuas y horizontales

1. Haz la división $\begin{array}{c|c} numerador & denominador \\ \cline{2-2} r(x) & c(x) \end{array}$, y pon

así la función: $f(x) = c(x) + \dfrac{r(x)}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$

2. Entonces, como $r(x)$ es de menor grado que el denominador, la última fracción tenderá a cero si $x \to \infty$. Como consecuencia, $f(x)$ y $c(x)$ tenderán a confundirse, luego $y = c(x)$ será la asíntota.

Observación: Si la división no puede hacerse, la única asíntota será la recta $y = 0$.

Ejemplo 1 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$

1. División:
$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 2 & x^2 - 4 \\ \cline{2-2} -x^2 \quad\;\; + 4 & 1 \\ \cline{1-1} x + 2 & \end{array}$$

Por tanto, $f(x) = 1 + \dfrac{x+2}{x^2-4}$. La recta $y = 1$ es la asíntota.

Ejemplo 2 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x+1}$

2. División:
$$\begin{array}{r|l} 2x^2 \quad\quad -1 & x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^2 - 2x \quad\;\; & 2x - 2 \\ \cline{1-1} -2x - 1 & \\ 2x + 2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Por tanto, $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

La recta $y = 2x - 2$ es, pues, la única asíntota.

Ejercicios propuestos: **17, 18, 21, 23** (pág. 191)