F. GRAELL I DENIEL

SOBRE ELS LÍMITS D'ACORD AMB L'OBRA DE CAUCHY

QUADERNS DE FILOSOFIA

18

F. GRAELL I DENIEL

SOBRE ELS LÍMITS
D'ACORD AMB L'OBRA DE CAUCHY

18

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2017

2ª edició: gener de 2017 [1ª edició: desembre de 2005]

ISBN: 84-931608-7-3

E-mail: fgraell@xtec.cat

Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

CONTINGUT

Pròleg a la segona edició, 6

Introducció, 7

§1. Allò infinitament petit o gran, 8.

§2. El zero, l'infinit, l'infinitèsim i el punt com a estipulacions lingüístiques, 11.

§3. De com s'acobla en general aquestes estipulacions dins el discurs, 12.

§4. Què s'entén per un límit?, 14.

§5. El zero i l'infinit com a límits: consideracions particulars de llur paper en els límits de les funcions reals simples, 21.

§6. El zero i l'infinit com a límits: notes per als límits d'altres funcions reals, 30.

Pròleg a la segona edició

S'ha procurat simplificar el redactat, s'hi introdueix algunes precisions que han semblant convenients i s'ha corregit algun error en el redactat. També ha caigut el terme «lingüístic» del títol perquè pot estimar-se que el càlcul no és estrictament un llenguatge, sinó un pensament formal. Alhora les definicions de zero, d'infinit, de punt, són pensaments lingüístics, els primers abocant-se cap a les formalitats (0, ∞), el segon mantenit-se sempre al seu nivell. Els primers ja formen part del pensament formal com a formalitats, el segon entraria en el discurs geometritzant. Tal vegada es tracta tot plegat d'una correcció innecessària: tanmateix potser sigui preferible de mantenir-la-hi.

Barcelona, gener de 2017.

La història de les reformulacions de les bases del càlcul infinitesimal fins a Augustin Cauchy (1789-1857) passa − circumscrivint-nos a pocs exemples a partir del darrer quart de segle divuit − per autors de la talla de Lagrange (de qui prové el nom *derivada* així com l'anotació *f'*), de Simon L'Huilier (que ja el 1787 defensà la raó diferencial com el límit de la raó de l'increment de la funció respecte del de la variable independent), de Carnot (que intentà de fer veure que els diversos punts de vista de les fundacions del càlcul tenien la mateixa base), de Lacroix, i d'altres; és veritat que alguns autors, seguint les passes de Lagrange, tractaren encara d'evitar el mètode de límits i el d'infinitèsims per la descomposició de les funcions en sèries infinites (que remunten fins a Taylor), però l'esperit crític i el rigor en l'estudi de les sèries semblava fer indefugible de tenir com a bàsica la noció de límit, expedient popularitzat per l'obra *Traité élémentaire* (1802)[1] de Lacroix i d'altres que el seguiren, i que finalment rebé de mans de Cauchy i de Bolzano[2] una formulació rigorosa.

El propòsit del present escrit pren suport doncs en les bases del càlcul infinitesimal tal i com se'l troba en l'obra d'aquest autor francès: és a dir, en la seva noció de límit[3], en una definició seva

---

1 És un abreujament del seu *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797), on encara vol seguir prou Lagrange.

2 Els treballs de Bernard Bolzano (cf., per exemple, Carl B.Boyer, *The history of the Calculus and its Conceptual development*, Dover Publications, Inc., Nova York, 1959, pàgs.267-271) passaren desapercebuts fins a prou anys més tard, quan Cauchy havia publicat ja les seves obres: cal remarcar, tanmateix, que s'hi troba la mateixa cura per a aritmetitzar les bases del càlcul, i pràcticament les mateixes definicions de continuïtat i de derivada (Bolzano avalua *dy/dx* com un símbol per a una funció única), indica que cal estudiar les qüestions de convergència en el cas de sèries infinites (que cal tractar com els límits), fins i tot negà que la continuïtat de la funció fos suficient per a creure que té derivada, etc.

3 Per a l'origen del concepte de límit en Cauchy, cf., per exemple, Judith V.Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, The Massachusetts Institute of Technology, 1981, pàgs.77-87.

més estricta de la continuïtat d’una funció, etc. Es tracta cabdalment d’albirar l’abast del llenguatge matemàtic dels infinitèsims, dels infinits grans, dels límits i, en conjunt, de les funcions, no en l’accepció que ja plau una determinada formulació matemàtica, quan bàsicament és el cas en els treballs de Cauchy al marge i tot del gust per una més gran aritmetització (Weierstrass, etc.), sinó en la de la necessitat d’un assaig de desfilagarsar una mica el pòsit que pressuposa precisament per a trobar-hi allò que hi ha de més nou en l’anàlisi matemàtica, que l’especifica, i que ha estat motiu d’un llarg recorregut històric. Tot això s’ha de continuar, ben segur; el lector, però, rebrà amb plaer les apreciacions anotades en desbrossar la noció de límit i d’infinitèsim (infinitament petit) per als afers algèbrics i també per als geomètrics en el seguiment del prestigiós matemàtic.

Cauchy es troba molt lluny d’un qualsevol sectarisme doctrinal, com s’indicarà més avall. Un hom serà capaç també de prendre constància que no és pas *l’evidència* el criteri de certesa que segueix la matemàtica (que lluny que queda Descartes!), sinó el domini d’un pensament formal, dut amb rigor, els últims mecanismes del qual són fora de l’abast propi: perquè sols es té a les mans les resultants, com a realitzacions que sovint desperten admiració i que fan plantejar noves preguntes.

§1. **Allò infinitament petit o gran**.

El domini numèric palesa *de fet* els aprenentatges, sense que la conducta adquirida impedeixi, precisament des d'una tal habituació, un progrés. Això equival a dir que una part important dels usos numèrics se circumscriuen bàsicament a ser un pensament formal, avalat per la gènesi individual i/o històrica que l'ha admès, per tant que no se circumscriu a ser un afer de meres formes.

En aquest sentit es compta tants nombres com es vulgui i *es diu* que la sèrie es perllonga més i més, es divideix la unitat tantes vegades com es desitgi i *es diu* que podem dividir-la més i més o, si es vol, que es pot fer decréixer tant com vagi bé (i.e. «indefinidament») un nombre, etc. Llavors les quantitats «indefinidament» petites (o les «indefinidament» grans) serien aquelles que no sols se les estimaria del mateix tall abstracte que els nombres abstractes, sinó també que han de ser més petites (o més grans) que un qualsevol nombre abstracte donat, de tal manera que estarien indefugiblement més enllà de l'abast possible. Per exemple, hom pot anar cercant una aproximació a $\sqrt{2}$ a través dels corresponents decimals, treball que no esgotarà, mentre la diferència entre dues aproximacions va essent cada vegada més petita; els valors que pren la funció $1/x$ són així mateix cada vegada més petits a mesura que van creixent els valors de la variable independent; o bé s'afegiria que es pot resseguir la sèria numèrica natural més i més d'una manera indefinida, etc. En conjunt hom parlarà d'*un indefinidament (infinitament) petit* o *d'un infinitèsim* a propòsit d'allò que es troba per sota d'un qualsevol nombre donat, i es definiria doncs l'infinitèsim pel seu ús: per exemple, s'esmerça el mot «infinitèsim» a tall d'una simplificació lingüística d'altres girs de la mena «cada vegada més petit i indefinidament més petit en l'ordre de la quantitat numèrica». Per contra parlarà d'*un indefinidament (infinitament) gran* a propòsit d'allò que es troba per damunt d'un qualsevol nombre donat, no pas en l'accepció que s'hi esgoti els nombres abstractes, sinó en la de trobar-se enllà d'un qualsevol nombre abstracte donat. I tot això ha estat possible pel «desencaix» entre el supòsit que assegura que es pot fer decréixer o créixer més i més sense parar (in-finitament, in-definidament) una quantitat i les quantitats de què de fet es pot parlar.

Recordi's curosament − si més no abans d'abandonar-se als mateixos nombres per causa del domini que n'hi ha i de complicar-ne llurs relacions − que en la diferencia entre una línia, per exemple, que es podria allargar contínuament i indefinidament, i els creixents nombres que hi són representats, hi ha cabdalment la significació que hi introdueixen els nombres, que al capdavall provenen de comptar coses com les parts d'una línia; en d’altres paraules: els automatismes de bastir nombres més i més grans, o més o més petits, tenen el seu paral·lelisme en els supòsits d'anar perllongant una línia (per exemple) o de dividir-la indefinidament[4].

L'existència d'un llenguatge que parla de magnituds més i més grans en geometria (una línia, un pla, etc.) no serà, ben segur, motiu de sorpresa; ni tampoc no ho sembla el comportament de «fer decréixer contínuament una magnitud», «de fer-ho indefinidament» de tal manera que es pot parlar també aquí de magnituds indefinidament petites (i d’infinitèsims en l’ordre de la magnitud) o indefinidament grans: un segment va esdevenint més i més esquifit o gran, el costat d'un polígon regular inscrit en una circumferència pot decréixer així mateix d'una manera indefinida, etc. És clar que és impensable un segment sense alguna magnitud, un costat sense alguna llargada, etc.; allò indefinidament petit és més aviat una tal magnitud que està enllà d'una qualsevol altra magnitud, tal com un segment indefinidament gran és una magnitud malgrat trobar-se enllà d'una qualsevol magnitud donada: uns tals comportaments han esdevingut usuals, i no s’hi troba massa maldecaps.

---

4 Si es vol amb paraules de Cauchy: «*Nous prendrons toujours la dénomination de* nombres *dans le sens où on l’emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de* quantités *aux quantités* réelles positives ou négatives, *c’est-à-dire aux nombres précédés des signes + ou -. De plus, nous regarderons les quantités comme destinées a exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu’une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l’on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe + ou du signe -, si on la considère comme devant servir à l’accroissement ou à la diminution d’une grandeur fixe de la même espèce*» *Cours d’analyse de l’École Royale Polytechnique (Analyse algébrique), Oeuvres complètes d’Augustin Cauchy,* sèrie II, tom III, Gauthiers-Villars et fils, Paris, 1897, pàgs.17-18. No cal dir que arreu de l’obra d’aquest autor no hi ha mai cap sectarisme antigeometritzant de l’aritmètica, ans el contrari (remetem el lector a la pròpia introducció del *Cours d’analyse*).

§2. **El zero, l'infinit, l'infinitèsim i el punt com a estipulacions lingüístiques**.

En un altre lloc ja es digué que el zero no forma part dels nombres en una accepció bàsica del mot (i.e. no pertany a la sèrie natural), sinó que més aviat palesa quelcom específic quan «no hi ha res a comptar», i s'hi acorda les corresponents operacions *ad hoc*[5].

Paral·lelament també s'insinuà que l'infinit – entre d'altres – és més gran que un qualsevol nombre donat, quelcom que s'apropa bastant a un «etcètera» en l'ordre numèric, que tal qual no és cap nombre natural, i que permet d'afirmar que «la sèrie numèrica es perllonga fins a l'infinit».

Els mateixos motius que farien negar que l'infinit fos un nombre permetrien de rebutjar que ho fos l'infinitèsim (en l'ordre numèric), és a dir, el fet que, mentre que una variable podria ser substituïda per una quantitat numèrica donada, fos impossible de substituir l'infinit o l'infinitèsim per una qualsevol quantitat numèrica palesaria que no pertanyen a cap sèrie numèrica (natural, racional, etc.); certament hom esmenta els infinitèsims a propòsit de les quantitats en matemàtiques i usa lletres algèbriques: una tal homofonia no amaga la diversitat semàntica de l'ús de lletres, malgrat l'immens avantatge d'uniformar el discurs (el diferencial d'una variable, valgui el cas, respecte de la variable).

I quan es defineix el punt, per exemple, com a «quelcom sense parts» es tracta cabdalment d'un mer pensament lingüístic (mai no hi ha inspecció d'un punt així), potser d'origen dialèctic: certament, com digueren els grecs, des d'una certa perspectiva no hi ha últimes magnituds en geometria, talment – afegiríem – com

[5] Cf. *Lògica, llenguatge i matemàtica*, Anthropos, Barcelona, 1993, pàgs. 218-220;228.

no hi ha en una accepció un últim nombre menor[6]; però, així com el zero no és cap nombre, així el punt idealitzat no és res que es pugui inspeccionar geomètricament, sinó una definició per a la geometria. Un hom comprèn que l'espai consti d'«infinits punts», i que des d'aquí s'idealitzi el conjunt de la geometria, és a dir, la comprengui des de definicions de pensaments lingüístics[7].

§3. **De com s'acobla en general aquestes estipulacions dins el discurs.**

Sens dubte el zero no és estrictament l'origen de cap nombre ni és estrictament el lloc on tendeix un qualsevol decreixement indefinit numèric perquè «zero», com «cap cosa», «no hi ha res», etc., són prou convenients precisament quan es vol significar una oposició *ad hoc*: s'oposen doncs a un qualsevol nombre natural, per exemple, a una qualsevol cosa, i fins i tot a una qualsevol expressió del tipus «un decreixement numèric indefinit», que conté si més no un significat numèric.

Noti's en efecte que tant l'expressió del que és zero com la definició del punt idealitzat són afers merament lingüístics: no sols no es podria estudiar res no lingüístic amb això, sinó que fins i tot com a llenguatges esdevindrien inútils si no fossin – permeti's de parlar així – *quelcom marginal* dels estudis numèrics i geomètrics.

---

[6] Des de la perspectiva del començament del compte la unitat és sens dubte el nombre més petit. Ara bé, una tal petitesa fa referència als altres nombres, que són més grans: n'hi ha prou doncs a estudiar per què la unitat és menor que un qualsevol altre nombre comptat des d'aquesta unitat per a arribar a afers extensius i per a admetre (quan se salva les confusions i el mer tarannà conductual del domini numèric) el caràcter concret de l'origen dels nombres. És a dir, la unitat concreta és més petita que dues unitats concretes: llavors un mateix s'adonarà que no hi ha unitat concreta mínima.

[7] Una definició és la resultant d'un pensament: un hom ho pensa (i diu) perquè hi ha significació. N'hi ha sempre que es rumia el que s'expressa («un quadrat rodó», etc.). Per tant la circumstància d'oferir aproximacions de quelcom irrepresentable malgrat que elemental (en un altre nivell hi ha un munt d'afers impossibles de representar) no comporta cap ús buit dels mots.

D'altra banda una qualsevol sèrie creixent no pot tendir estrictament a l'infinit: s’esmentà que es diu «infinit» com es diria un especial «etcètera», i no sembla cap nombre, malgrat que hi hagi un significat numèric i per això s’afirmi que una sèrie creixent tendeix a l’infinit. Des d’aquesta perspectiva el llenguatge de l’infinit, que no és cap nombre, es palesaria així mateix com a marginal dels estudis numèrics (o geomètrics, si fos el cas).

Mentre una sèrie creixent que ho va fent indefinidament arriba a l’infinit, i es veurà que es parla de l’infinit com a límit, sense abandonar doncs el camp semàntic numèric en tant que «enllà» de l’infinit «hi ha» sols infinit; mentre la mateixa expressió d’una sèrie creixent que ho va fent indefinidament ja conté de fet el contingut semàntic d’infinit en el propi «indefinidament», hi ha una dificultat en destriar la resultant infinita en la pròpia sèrie creixent indefinidament, de tal manera que l’admissió que una sèrie té com a límit l’infinit no deixa de ser quelcom que s’expressa així, en la successió de la mateixa sèrie, per conveniencia i per acord.

Ara bé: la sèrie decreixent indefinidament més enllà d’un qualsevol nombre donat pot fitar així mateix l’infinitèsim en una seva consideració, i *hom podria dir* per uns motius paral·lels que una sèrie decreixent tingués l’infinitèsim com a límit, de tal manera que seria també quelcom que s’expressaria així, en la successió de la mateixa sèrie, per conveniencia i per acord. Però una sèrie decreixent se singularitza pel seu propi contingut semàntic en l’accepció d’anar reduint la quantitat i per això, ho veurem, *es prefereix evitar l’ús del mot ‘límit’* per a l’infinitèsim (no de l’infinitèsim) en profit d’altres consideracions, en l’accepció que s’estima que «enllà» de l’infinitèsim no s’hi troba res (ni el propi infinitèsim)[8].

[8] Certament la doble vara de mesura conté un motiu de pes. El càlcul aporta molts beneficis des de la indistinció entre l’infinitesimal i zero, i de fet aquell pren el seu fonament en això; per tant entra dins del previsible que, mentre s’assumeix per acord que el límit en el creixement sigui l’infinit, i mentre s’hauria d’admetre per paral·lelisme que el límit en el decreixement fos l’infinitesimal, es diu que a efectes de l’estudi el límit no és l’infinitesimal,

§4. **Què s’entén per un límit?**

1. El caràcter singular de zero, d'infinit i infinitèsim, i del punt, la circumstància que cal no admetre'ls com a nombres (en una accepció primera del mot) i que cal estimar el punt sense parts una idealitat, duu a repassar llur paper com a límits d'una sèrie numèrica contínuament decreixent o creixent, o d'un segment que decreix.

Perquè – i parlant en conjunt – s’acostuma a considerar un límit en matemàtiques (1) allò a què tendeix una quantitat variable que va prenent indefinidament valors tot formant una successió, de tal manera que la diferència entre el límit i un terme de la successió que es considera pot arribar a ser tan petita com es vulgui: s’esmenta el zero com el límit de la sèrie 1/2, 1/3, 1/4, etc., que decreix constantment; es parla de $\sqrt{2}$ com el límit al qual tendeixen els valors que es van aconseguint amb la sèrie de les aproximacions fraccionàries, etc.

(2) En una segona accepció quan una quantitat variable va prenent valors, tots del mateix signe, cada vegada més grans, en sentit absolut, i diem que es podria perllongar la successió fins a l'infinit, llavors s’afirma que el límit d'una tal successió és l’infinit: es diu, per exemple, que la sèrie natural té com a límit l'infinit.

(3) En geometria límit és allò a què tendeix el creixement o el decreixement d'una línia o d'un segment, del nombre de costats d'una figura, etc.: s’estima, valgui el cas, que la circumferència és el límit del polígon inscrit en un cercle quan va augmentant incessantment el nombre de costats[9].

---

sinó zero. Aquesta indistinció és fonamental per a l’anàlisi i també per a l’elucidació de la seva base. Si un hom pot fer poca cosa amb l’infinit, més enllà d’entrar en l’anul·lació de quelcom, l’infinitèsim afavoreix que s’arribi a resultants fructíferes.

[9] La cita literal fa així: «*Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s’approchent indéfiniment d’une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l’on voudra, cette dernière est appelée la* limite *de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la*

Noti's que entre el nombre més petit i el zero hi hauria, en una primera aproximació, un salt a indicar, que podria semblar que n'hi hauria un altre entre el nombre més gran i ± ∞, o entre el segment més petit i el punt, i que al primer cop d'ull hom tendiria a dir que n'hi hauria encara d'altres entre una qualsevol aproximació i l'irracional, entre el polígon inscrit i la circumferència, etc.

2. La segona accepció de «límit» no conté més problemes: en lloc de dir que una quantitat creix «fins a l'infinit», s'esmenta l'infinit com el límit; estrictament parlant l'infinit, que equival a un singular etcètera, sempre està molt més enllà d'una qualsevol quantitat per gran que sigui, i per tant *in stricto sensu* no és cap límit, sinó una manera de parlar abreujada. En aquesta accepció l'esment de l'infinit com a límit seria paral·lela – si es fes – a l'esment de l'infinitèsim com a límit i tan rellevant com aquest: però veurem més avall per què convé de parlar de l'infinit com un límit (i no fer-ho de l'infinitèsim).

Passi's doncs a les altres dues accepcions: perquè aquí es tracta en efecte de distingir clarament dos ordres de fets prou rellevants i que cal no confondre; (1) la circumstància que qualsevol pas al límit és un salt a una altra cosa, que és quelcom

---

limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En Géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus, etc.
Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette *variable devient ce qu'on nomme un* infiniment petit *ou une quantité* infiniment petite. *Une variable de cette espèce a zéro pur limite.*
Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus, de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit *que cette variable a pour limite l'*infini positif, *indiqué par le signe ∞, s'il s'agit d'une variable positive, et l'*infini négatif, *indiqué par la notation - ∞, s'il d'agit d'une variable négative. Les infinis positif et négatif sont désignées conjointement sous le nom de* quantités infinies» (Cauchy, *Cours d'analyse,* 19).

pensat i expressat malgrat que irrepresentable tot i ser bàsic (zero), i no numèric (en una accepció primera), o un afer geomètric (punt, etc.), o que és senzillament *un altre* afer, nombre, expressió algèbrica, figura geomètrica, etc. (2) La circumstància que la inexactitud que es pogués cometre, ja fos quantitativa, ja fos d'individuació conceptual, sempre seria inferior a un discerniment quantitatiu que es pogués tenir o a qualsevol discerniment geomètric de què es fos capaç.

Per això en tots aquests límits semblaria haver-hi un salt de les consideracions quantitatives i geometricoconceptuals a partir dels creixements o dels decreixements reiterats, al límit, no perquè hi duguin automàticament, afer del tot impossible en la mesura que s'entén que una quantitat no va a parar a zero, una aproximació a una quantitat determinada, un polígon a una circumferència, etc., sinó en la mesura precisament que s'apropen els dos cantons oposats.

Aquest apropament es basa en el fet que la reiteració d'un creixement o d'un decreixement és capaç d'anar més enllà d'una qualsevol quantitat, o d'una qualsevol representació, i per això un mateix està convençut que la diferència pot ser tan petita com un hom vulgui.

3. Per tant, i deixant ara els geomètrics, el salt al límit prendria peu en la certesa d'origen conductual que la inexactitud quantitativa que es pogués cometre sempre seria menor que una qualsevol quantitat petita, o que hi ha una insignificança quantitativa d'allò que s'anul·la, quan s'estima l'afer des d'aquí. En d'altres paraules: hi ha salt en l'accepció que seria del tot indiferent l'acceptació dels límits o l'assumpció, abans d'admetre'ls, de les mateixes expressions que tenen aquells límits.

I s'arriba doncs a la conclusió que permet el «salt» a una expressió quantitativa o a zero perquè seria indiferent fer-ho o no: en efecte uns tals límits no expressen res més que la convicció que és indiferent d'usar merament una expressió numèrica o algébrica (àdhuc zero), o d'acompanyar-la d'un infinitèsim juxtaposat.

Des d'aquest punt de vista aquests límits són sempre una resultant de consideracions infinitesimals, és a dir, que és el caràcter híbrid de les quantitats infinitesimals el que explica l'acceptació de límits: d'aquí que manqui de sentit la pregunta sobre el fet d'abastar el límit o de no fer-ho.

Un afer d'una importància considerable rau en la circumstància que l'infinitesimal permet, precisament gràcies a la doble possibilitat de considerar-lo no-res i també quelcom amb magnitud, d'avaluar-lo un no-res o de mantenir-lo tal qual. Noti's fins i tot que, mentre una exposició normativa introdueix els diferencials a partir dels increments de variables i de funcions en el descabdellament de la derivació, com sigui que la simbologia leibniziana (*dx/dy*) es considera un tot d'igual valor que la de Lagrange (*f* '), la formalitat de mantenir amb encert una rigidesa discursiva per tal d'evitar qualsevol ambigüitat no lleva que l'aproximació dels diferencials tal i com s'ofereix avui no evita que, independentment de llur presentació, àdhuc a la llum de la derivació, llur extraordinària eficàcia ragui precisament que poden mantenir-se com a magnituds tan esvaïdes com es vulgui i que, si d'acord amb l'articulació quantitativa on es troben poden ser considerats no-res, un hom ho pugui fer. Es tracta d'admetre que un hom pensa així en física, sense que hi hagi mai arbitrarietat pel fet que es respecta la coherència numèrica: es fa valer no-res amb totes les conseqüències, el manté un infitesimal d'una manera que s'adiu en el seu context de la quantitat, etc., tot evitant allò que sobta (un quocient de zeros, per exemple) o que contribueix a la confusió.

4. Els límits geomètrics tindrien una sort paral·lela: l'acceptació de quelcom geomètric (tingui o no una mera existència bàsica irrepresentable) com a límit palesaria sols l'admissió que allò que té límit o aquest límit permetrien de fer indestriable les possibles conseqüències de conceptualitzar l'afer a partir de tot allò respecte de la qual cosa hi ha límit, o a partir del límit.

Certament els costats del polígon no es confonen amb la circumferència on és inscrit, però quan es mana de fer acréixer indefinidament el nombre de costats del polígon es fa impossible d'assignar una qualsevol magnitud al costat, per tant hi hauria aquí un afer de magnituds infinitament petites dels costats del polígon sols conceptuablement discernibles dels punts de la circumferència (un punt és allò que no té parts) malgrat que de conseqüències indestriables en un qualsevol altre aspecte.

Així mateix s'acorda que la diferència entre l'àrea del polígon i la del cercle pot ser menor que un qualsevol valor pensat o dit, de tal manera que hi ha aquí una indistinció d'àrees en l'accepció que la inexactitud de prendre l'una per l'altra és menor que una qualsevol magnitud, per tant que és indiferent prendre l'àrea del polígon amb un nombre indefinit de costats o el cercle. En d'altres paraules, hi ha també aquí consideracions d'infinitament petits per les qual un hom es permet el «salt» de l'àrea del polígon al cercle: seria el caràcter híbrid de les magnituds, de les àrees, etc., infinitament petites, que se les pugués considerar un no-res o quelcom si més no conceptualitzable, el que permetria prendre el límit per allò de la qual cosa és el límit.

Semblantment quelcom bàsic irrepresentable (el punt, per exemple) podria ser el límit d'una magnitud per la indiferència de prendre aquell límit o allò de la qual cosa és el límit: ho dèia Aristòtil, cap divisió reiterada d'un segment no duu al punt, però l'afirmació de reiterar indefinidament la divisió té com a conseqüència que es pugui afirmar que allò que es va fent indefinidament petit val sols aquest esdevenir indefinidament petit, per tant que sigui del tot impossible d'assignar-li una magnitud petita qualsevol pensada o dita, de tal manera que la inexactitud d'estimar-lo com un punt és tan petita com es vulgui, i que hi hagi una indiferència de mantenir-lo com a magnitud infinitament petita o de fer-li perdre el tret de magnitud en profit dels trets del punt. També aquí el caràcter híbrid d'allò infinitament petit permetria doncs el «salt» al límit des d'allò que el té com a límit, etc.

Noti's curosament que la filosofia s'interessa pel caràcter conductual de la reiteració: el pensament d'una prossecució indefinida no trasllada a una sèrie infinita realitzada, sigui com sigui que un hom s'ho representi, sinó que deixa en suspens unes operacions, considera que s'hagi fet una o més vegades quelcom i què significa la possibilitat de continuar-ho, que es nodreix del que ja s'ha fet. Hi ha un «pòsit» conductual que suggereix una significació en el pensament que apunta la possibilitat de reiteració. I tot això un mateix ho pot repetir i anar-se'n emmirallant amb les aportacions de les seves operacions i de considerar el que li és possible, de manera que tot va arribant a ser una marxa irrepresentable, però pensable en aquests paràmetres, i de fet suficientment eficaç.

Es tracta de tenir cura del que s'hi pensa, independentment que l'exposició matemàtica més adequada pugui ser aquesta o aquella (versemblantment ho serà la més rigorosa i clara), perquè en algun lloc s'ha de discutir què hi ha. En efecte una certa disciplina no ha de complaure's solament a llegir els grans autors, sinó que té l'obligació d'oferir una lectura no convencional que ja és allò corrent entre nosaltres.

5. Cal concloure de manera provisional que tots els límits (fora de l'infinit) són exponents de consideracions infinitesimals (infinitament petits), del fet que l'acceptació del límit és l'admissió del valor (híbrid) de l'infinitament petit; el límit ho és en la mesura que hom evita l'esment d'un infinitèsim (etc.) i precisament gràcies a la conveniència del fet: el límit és una simplificació que no té aquí conseqüències significatives degut a la manera com s'ha establert en aquests casos els infinitèsims (etc.). Si es vol així: el límit expressa amb la seva simplificació la insignificança de prendre o no l'infinitèsim (etc.), i la conveniència de no encloure'l aquí[10].

Per exemple, s'estima que zero és el límit d'una sèrie decreixent

1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10.000, ...

perquè se la pot perllongar tant com es vulgui; és clar que cap membre d'una tal sèrie mai no serà res més que un nombre, i fet i

---

[10] Carnot tenia raó quan afegia: « *On voit par là que l'expression de limite n'est ni plus ni moins difficile à définir exactement que celle de quantité infiniment petite, et que, par conséquent, c'est une erreur de croire que la méthode des limites soit plus rigoureuse que celle de l'analyse infinitésimale ordinaire; car, pour procéder en rigueur par la méthode des limites, il faut préalablement définir ce que c'est qu'une limite: or, la différence d'une quantité quelconque à sa limite est précisément ce qu'on nomme ou ce qu'on doit nommer une quantité infiniment petite; l'une n'est donc pas plus difficile à comprendre que l'autre, et si la méthode des limites est exacte, comme on ne saurait en douter, il n'y a aucune raison pour que l'analyse infinitésimale no le soit pas*» (*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Blanchard, París, 1970, n.169, pàg.129).

fet l'estipulació que el límit d'una tal sèrie és zero és també la conseqüència del fet que la sèrie pugui dur a quantitats sempre inferiors a un qualsevol nombre donat, per petit que sigui, per tant d'avaluar la insignificança numèrica d'un infinitèsim; l'afirmació que zero és el límit d'una tal sèrie en seria l'expressió[11].

Ara bé, i tal i com s'indicà, que la sèrie

1, 10, 100, 1000, 10.000, ...

tingui com a límit ∞ és l'expressió d'un altre afer, car mentre cap membre d'una tal sèrie mai no serà sinó un nombre, l'estipulació que el límit d'una tal sèrie és ∞ és la conseqüència de fer-lo valer com un especial «etcètera», per tant «que està enllà d'un qualsevol nombre gran»; pròpiament parlant l'infinit no és pas cap límit, però – s'ha esmentat ja – s'accepta una tal forma de parlar per comoditat i per uniformitat, i no es fa per al propi infinitèsim perquè aquest té pròpiament límit.

D'altra banda val la pena d'afegir que l'interès pels límits no rau comprensiblement a recaure en afers que no són ni pròpiament quantitats ni afers geomètrics de magnitud donada, sinó en llur ús conjunt per a la troballa de la manera d'abastar noves funcions o relacions geomètriques interessants o sabudes.

Una altra digressió duria a anar reblant que, en un nivell elemental, la idealització de la geometria i l'estudi numèric es complementarien: el decreixement indefinit numèric podría

[11] Que s'hi sobreentengués els infinitèsims no hauria de llevar que anotéssim alguns fets que corroborarien al seu nivell una tal conducta. Per exemple, els usos lingüístics quotidians emparenten el fet de no haver-hi res o ningú (de fum, de persones, etc.) amb els inicis de l'aparició de quelcom o d'algú, o la desaparició de coses i de persones a partir de la seva presència; es tracta, certament, de situacions incomparables, però ja sembla natural que hi hagi el pas de l'absència de quelcom (d'algú) a l'aparició corresponent, o la desaparició de coses (de persones) presents; l'estimació del zero com un origen, i com el lloc on va a parar un qualsevol decreixement indefinit numèric s'hauria de posar al costat versemblantment d'uns tals comportaments: «ja se sap» què vol dir una sèrie numèrica decreixent indefinidament, saber que, *explicitat,* duria segurament a les mil divisions d'una cosa, d'un segment, per exemple, de tal manera que es va empatitint el tot en qüestió.

correspondre a un esvaïment del segment, mentre se sabria que sempre es podria trobar un nombre més petit, per tant «el començament» del segment no podria tenir magnitud perquè llavors la comptaríem, per tant el punt no tindria llargada, cosa que s'acordaria amb el fet d'estimar el zero com el límit del decreixement. Per conseqüent l'origen d'un segment seria el zero, etc.

§5. **El zero i l'infinit com a límits: consideracions particulars de llur paper en els límits de les funcions reals simples.**

La utilitat de parlar dels infinits positius i negatius com a límits no hauria de dur a confondre'ls amb els altres límits. Tanmateix les consideracions sobre la successió de nombres que decreixen més i més fins a poder esdevenir més petits que un qualsevol nombre pensable es poden relacionar prou sovint amb una reiteració indefinida d'operacions o amb nombres indefinidament grans.

1. Un decreixement numèric que tendeix a una quantitat indefinidament petita representa al cap i a la fi alguna divisió d’una unitat trobada anteriorment, i la possibilitat de reiterar indefinidament l'operació: es diu que es pot repetir *infinites* vegades l'operació, afer que val com un singular «etcètera». Fet i fet qualsevol sèrie decreixent d'una manera contínua fins a quantitats indefinidament petites pressuposa ja que s’ha après a dividir la unitat, a saber anomenar les noves subunitats i a poder reiterar tant com es vulgui l'afer, usant quan convingui la multiplicació i la divisió de nombres abstractes; una successió del tipus (per tal d'agafar un cas simple)

1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10.000, ...

té una *infinitat* de termes, cosa que es correspon amb la repetició *infinita* de divisions; un tal llenguatge d'«infinits» és certament una manera de parlar, i allò rellevant rau en la insignificança numèrica de l’infinitament petit, és a dir, que els termes de la successió van esdevenint tan petits com es vulgui, i més que un qualsevol nombre petit que es pugui escriure: quan es parla de zero com el límit d'una tal sèrie cal concloure que s'hi ha sobreentès l'infinitèsim i que se l'ha deixat de banda en el límit; el camí que duu a aquestes consideracions usa el llenguatge d'infinits[12].

2. El límit d'una sèrie decreixent fins a quantitats infinitament petites és zero; és a dir, no s'hi considera res. És clar que en les operacions elementals de sumar i de multiplicar ja s'estipula

$$a + 0 = a$$
$$a \,.\, 0 = 0$$

en l'accepció que, si no s'hi suma res a un nombre, resta un tal nombre; i, si no es repeteix un nombre, en l'accepció que no se l'agafa cap vegada, no hi ha resultant: però des de funcions del tipus

$$a + x$$
$$a \,.\, x$$

es pot establir

$$\lim_{x \to 0} \; a + x = a$$
$$\lim_{x \to 0} a \cdot x = 0$$

on la primera estipula l'ús de zero en la suma a partir de deixar, per ser insignificant, un infinitament petit tant en el sumand com en la resultant, i la segona l'ús de zero en la multiplicació a partir de fer el mateix per al corresponent infinit petit en el multiplicador i en la resultant: en els dos casos hi ha un fet obvi perquè es pren com a sumand i com a multiplicador allò que ja s'ha definit com a zero, i

12 És a dir, el llenguatge d'infinits es troba per al nombre de termes de la sèrie creixent, per al nombre de reiteracions d'operacions i per a l'acreixement del denominador–divisor, palesant la seva varia semàntica d'acord amb el context, amb la intenció posada en les consideracions infinitesimals. Malgrat tot l'afer no suposa que tots aquests infinits siguin límits, quan convencionalment sols se'l considera com a terme d'una sèrie (per exemple, es veurà tot seguit, la sèrie que va satisfent denominadors–divisors, etc.).

s’hi aplica simplement el que s’estipula com la suma de zero i un nombre, o llur producte.

Malgrat tot val la pena de remarcar ja dues coses: de bell nou que els límits *propis* són aquells on s’avalua la insignificança numèrica dels infinitament petits (per això el límit és zero), i que els altres dels infinits sols s'usen en tant que esdevenen maneres de parlar útils i precisament en le mesura que acondueixen a infinitament petits; expressions del tipus

$$\lim_{x \to \pm\infty} a + x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} a \cdot x = \pm\infty \text{ o } \mp\infty$$

mantenen una *uniformitat* amb tots els límits (són *còmodes*), però *de fet* no s’usa uns tals límits més que en la mesura que treballen com un especial «etcètera» i que poden entrar en les consideracions dels infinitament petits, i precisament a tall d’un paral·lelisme. D’aquí doncs que es conservi el mot «límit» per a aquest infinit, i no per al mateix infinitament petit (que d’altra banda és el que té pròpiament límit).

Un segon punt fa veure que tots els límits finits (és a dir diferents de 0 i de ± ∞) sempre són la resultant d’avaluar una quantitat infinitament petita (per tant d'haver efectuat un límit propi), és a dir, són avatars dels càlculs en tant que hi ha l’obvietat de bandejar un indefinidament petit, tal i com es veu en el límit d'una suma (o d'una diferència) d'una constant amb una quantitat infinitament petita.

3. L'infinit expressa el rebuig a continuar, el fet de no valer la pena la prossecució. En definir la divisió com l'operació inversa de la multiplicació

$$a : x = y \ \ \text{->} \ y \,.\, x = a,$$

essent a constant, el fet de decréixer x implica que y ha de créixer: la circumstància de decréixer x més i més fins a quantitats infinitament petites pressuposa certament un nombre més i més gran y (indefinidament gran, infinit, etc.) per a poder abastar una quantitat a.

Llavors val la pena d'assenyalar que l'estipulació

$$a : 0 = \pm \infty$$

és la conseqüència de trobar obvi el bandeig de l'infinitèsim en tant que es duu la sèrie decreixent que fa de divisor al límit, però no és la conseqüència d'un bandeig qualsevol en la resultant, car la resultant sols diu que «no val la pena de continuar», que es tracta sempre d'un «més enllà d'un qualsevol nombre», afers que estan d'acord amb la circumstància que pròpiament parlant $\pm \infty$ no és un límit, sinó una expressió còmoda en aquesta accepció en què se'l pensa (el decreixement indefinit és també el d'una sèrie infinita). *En conjunt tots els límits que duen a l'infinit són d'un tal caire*, cosa que no implica que no siguin interessants en la mesura que intervenen en la consecució de límits estrictes (a banda que informen del seu propi contingut).

Paral·lelament si en

$$y \,.\, x = a$$

x va creixent més i més, a essent constant, y ha de decréixer més i més (hi ha doncs dues accepcions infinites), i ara l'estipulació

$$a : (\pm \infty) = 0 \qquad (1)$$

és la consequència del fet que el bandeig de l'infinitèsim comès a la resultant de

$$a : x \qquad (2)$$

quan x va creixent més i més respon a la certesa que el quocient pugui ser sempre inferior a un qualsevol nombre donat, per petit que sigui, és a dir, és l'expressió

$$\lim a : x$$

quan x va essent indefinidament gran. En aquest cas es menysprea el quocient de (2), i (1) és l'expressió d'un tal fet: noti's el divers paper de $\pm \infty$ i de 0 en (1); en d'altres paraules, quan s'escriu

$$\lim_{x \to \pm\infty} a : x$$

el límit propi no ve donat pel límit de x, sinó per no haver fet esment de l'infinitèsim en el quocient (en la resultant, en la sèrie decreixent) de $a : x$.

Hi ha doncs un interès *diferent* per al límit 0 i per al límit $\pm \infty$, però un hom implica l'un amb l'altre (d'aquí el mot «límit» per a

± ∞), i en tots els casos s’estipula la relació entre uns tals límits a partir de seqüències quantitatives; tanmateix es manté arreu que l'infinit del tall de ± ∞ interessa – a banda de la seva mateixa informació – en tant que intervé en els raonaments que fan no esmentar quantitats infinitament petites.

Això és: aquells raonaments en els quals les quantitats van essent infinitament petites pressuposen sovint, d'acord amb les operacions, quantitats infinitament més grans, i per això les usem; el zero com a límit d'una seqüència pressuposa de no fer esment d’un infinitèsim i les quantitats infinitament grans entren en unes tals consideracions.

Per tant

$$\lim_{x \to \pm\infty} a : x = 0$$

esdevé una estipulació per a zero (zero no és cap nombre en una accepció primera) a partir de la corresponent consideració infinitesimal. I

$$\lim_{x \to 0} a : x = \pm\infty$$

esdevé una altra estipulació per a zero a partir de la corresponent consideració infinitesimal. Els dos casos palesen que s’usa ± ∞ per a saber usar 0 (i no fer esment d’un infinitament petit).

4. La funció

$$x^a$$

té uns límits que mereixerien uns comentaris semblants: en tots els casos els límits genuïns són aquells en els quals hi ha un decreixement, per exemple quan x arriba fins a quantitats infinitament petites, o quan la resultant conjunta de la funció esdevé una quantitat infinitament petita; en

$$\lim_{x \to 0} x^4 = 0$$

hi ha el bandeig de l’esment d'un infinitèsim i la potència resta sense efectes; en

$$\lim_{x \to \infty} x^{-4} = 0$$

el límit genuí és el que duu a no formular l'infinitèsim corresponent; en

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-4} = \infty$$

el límit propi és el decreixement de la variable, la resultant essent un especial «etcètera» (i que ja s'ha vist), etc. Noti's que en x^a hi ha la possibilitat de múltiples valors, àdhuc d'imaginaris.

5. El límit genuí es lliura pel bandeig de la menció d'un infinitèsim, la circumstància de tenir límits finits és una resultant de càlculs *ad hoc* (i del límit genuí), i el fet de parlar de límits infinits del tall de ± ∞ no deixa de ser un fet harmonitzador. El lector podrà extreure per ell mateix on es troba la genuïtat en els límits d'una funció com

$$A^x,$$

i ara circumcrigui's sols al límit següent

$$\lim_{x \to 0} A^x \qquad (1)$$

on hi ha un genuí límit pel fet de valorar la insignificança d'un infinitèsim (en l'exponent); ara bé, allò interessant de la resultant conjunta de (1) rau en la circumstància que l'anul·lació de l'infinitèsim en l'exponent correspon a l'anul·lació d'un infinitèsim en una sèrie, és a dir, prenent A = 16, i fent x = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, etc., les resultants van essent

4, 2, 1,414..., 1,1892..., 1,090..., 1,04417..., 1,021..., 1,010... , 1,005..., ...

seqüència que va seguint

$$1 + \alpha$$

α podent ésser tan petita com es vulgui, i per tant s'anul·la l'infinitèsim: es tracta doncs d'una resultant (d'un límit) finit perquè hi ha també l'anul·lació d'un segon infinitesimal en la resultant (a través d'un límit genuí), afer del tot congrüent amb el següent:

$$A^4 : A^4 = A^0 = 1.$$

6. En els estudis sobre límits es fa per comoditat *tabula rasa* de les diverses accepcions en les quals es parla del límit del valor d'una variable o d'una funció; i en correspondència amb això tampoc no es distingeix entre els límits (genuïns, finits, infinitament grans) de les expressions on intervenen els primers: mentre hi ha una certa manca de discerniment d'allò que es fa, es treballa d'una manera ràpida i eficaç.

Un quadre por recollir els valors singulars de les variables i de les resultants circumscrits a *funcions real simples*:

funció		$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$a + x$		$-\infty$	$[a]$	∞
$a - x$		∞	$[a]$	$-\infty$
$a.x$	*a* positiu	$-\infty$	0	∞
	a negatiu	∞	0	$-\infty$
$a:x$	*a* positiu	0	$\pm\infty$	0
	a negatiu	0	$\pm\infty$	0
x^a	*a* positiu i par	∞*	0**	∞
	a positiu i impar	$-\infty$	0	∞
	a negatiu i par	0*	∞**	0
	a negatiu i impar	0	$\pm\infty$	0
A^x	*A* sup.a la unitat	0	1	∞
	A inf.a la unitat	∞	1	0
log *x*	base log > 1	–	$-\infty$	∞
	base log < 1	–	∞	$-\infty$

sin *x*	M (-1, +1)	0	M(-1,+1)
cos *x*	M (-1, +1)	1	M(-1,+1)

*Si *a* és una fracció amb denominador par el valor de la funció és imaginari.
** Si *a* és una fracció amb denominador part la resultant real se circumscriu a: $\lim_{x \to 0^+} x^a$.

S’hi barregen els límits propis (per a les quantitats que decreixen fins a infinitèsims) i els que tendeixen als infinits grans, a l'hora de parlar de la variable independent, i on no hi ha un clar discerniment entre els límits propis, els infinitament grans i els finits, a l'hora de parlar dels valors de la funció.

7. Les funcions trigonomètriques són funcions simples. Unes tals funcions se singularitzen prou respecte de les altres funcions simples pel fet que la relació des de l'angle al valor del sinus i del cosinus no s'estableix per mitjà d'una expressió numèrica, sinó per mitjà d'una inspecció geomètrica (i numericogeomètrica) que posa en correspondència valors de l'angle amb valors del sinus i del cosinus.

En efecte es defineix el sinus d'un angle dins d'una circumferència de radi unitari, sinus representat per la quantitat α, com la projecció de l'arc, que l’angle circumscriu, sobre el diàmetre vertical, el diàmetre horitzontal passant per l'origen de l'arc (projecció que és també la del radi que passa per l'extrem de l'arc). Noti’s que, quan s’usa radiants, el valor de l’angle coincideix amb el de l’arc d’una circumferència de radi unitari.

Si es vol saber, per exemple, el sinus de $\pi/4$, l’angle i l'arc de la circumferència de radi unitari és allò que dóna peu per a trobar d'altres relacions, però com a tals valors no estan inclosos en el càlcul *ad hoc* que es fa ($2\alpha^2 = 1$, $\alpha = \sqrt{2}/2$), cosa que es manté per a un qualsevol valor del sinus.

Independentment de les consideracions dels límits s'extreu per inspecció geomètrica que, en el cas de no haver-hi arc, no hi hauria sinus; és a dir, s'estipularia que

(1) angle 0º $\leftrightarrow$ el sinus val 0

perquè zero significa que no hi ha res. Però quan l'angle (l'arc) val $\pi/2$ no hi ha projecció, sinó simplement el semidiàmetre vertical. El sinus (es veu per la inspecció geomètrica) ha de trobar-se en uns valors que oscil.len entre 1 i la inexistència. Per tant en escriure

$$(2) \quad \sin 0 = 0$$
$$\sin \pi/2 = 1$$

hi ha el fet remarcable: (*a*) que la funció sinus és en conjunt entre angles i valors de la projecció; (*b*) que per tant s'estipula aquí la correspondència.

Si es pren (2) com a límits, es fa tenint tant l'angle com el sinus a tall d'afers independents i en correspondència, és a dir

$$\lim_{\alpha \to 0} \text{angle } \alpha \leftrightarrow \lim_{\beta \to 0} \beta \text{ (}\beta\text{ essent el sinus)}$$

(α i β essent del mateix signe) que són dos límits genuïns en paral·lel fins que s'arriba a (1), que és allò que s'havia estipulat, i que restaria parcialment desdibuixat quan s'escriu

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

on de fet hi ha dos límits genuïns.

Però aquella necessitat de mantenir la correspondència en el cas de prendre (2) com a límit es palesa molt més quan es passa a l'altre cas, car aquí caldria una expressió del tipus

$$\lim_{\alpha \to 0} \text{angle } \pi/2 - \alpha \leftrightarrow \lim_{\beta \to 0^+} 1 - \beta$$

per tal de fer veure que els límits finits són la resultant de límits propis, i que duen a allò que ja s'havia estipulat; en efecte a

$$\lim_{x \to \pi/2} \sin x = 1$$

fa difícil de reconèixer els plurals casos.

D'una manera paral·lela:

$$\lim_{\alpha\to 0} \text{angle } \pi - \alpha \leftrightarrow \lim_{\beta\to 0} ß$$

(α i ß del mateix signe)

$$\lim_{\alpha\to 0} \text{angle } 3\pi/2 - \alpha \leftrightarrow \lim_{\beta\to 0^-} -1 - ß \,,$$

finalment

$$\lim_{\alpha\to 0} \text{angle } 2\pi + \alpha \leftrightarrow \lim_{\beta\to 0} ß$$

(α i ß del mateix signe) on arreu es retrobaria allò que ja s'hauria estipulat, etc.

Cal entendre el límit de l'arc d'una manera independent del límit del sinus o del cosinus (que no vol dir sense correspondència), i tant en un lloc com en l'altre, s'hi troba o límits genuïns o límits finits a partir de límits genuïns, etc.

§6. **El zero i l'infinit com a límits: notes per als límits d'altres funcions reals**

1. En les funcions simples (deixant la del sinus) ha estat fàcil de descobrir què s'havia d'establir com a resultant d'una funció a l'hora d'admetre que el límit d'un infinitèsim és zero, ja fos un tal infinitèsim donat directament per la variable o per les operacions resultants amb l'infinit.

Val la pena d'assenyalar, tanmateix, que això de vegades no és fàcil en d'altres casos; per exemple, és difícil de capir què s'ha de considerar la resultant de la funció composta

$$x^x$$

quan *x* decreix cap a quantitats infinitament petites i, amb el límit corresponent, què cal tenir com a

$$0^0$$

o, per exemple, què val

$$x^{\frac{1}{x}}$$

quan *x* és una quantitat infinitament gran (per tant hi hauria en 1/*x* un límit propi). En conjunt aquí cal l'enginy de saber mostrar mitjançant càlculs algèbrics que els límits (propis, infinits, finits) d’unes funcions són els mateixos que els d’unes altres funcions més fàcilment dutes al límit; per exemple, mostrar que

$$lim[f(x)]^{\frac{1}{x}} = lim\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

quan x creix indefinidament[13]: es tracta, en una tal demostració, d’un desplegament que domina les passes algèbriques i que duu aquests afers a les quantitats infinitament petites, i d’un fer que ja domina el zero com a límit d’una sèrie que decreix fins a quantitats infinitament petites (i de ± ∞ per a quantitats tan grans com es vulgui); per dir-ho així: hi ha una superposició de límits propis en la mesura que es bandeja les quantitat infinitament petites (i s’arriba al límit zero) per a prosseguir l’argumentació (i que es fa portar a col·lació les quantitats infinites grans o de les resultants finites).

Ara bé: és important de tenir present que arreu s’accepta els límits en la mesura que, depenent de quantitats que decreixen fins a fer-se infinitèsims, es fa insignificant l’esment de l’infinitèsim; que el límit infinitament gran és incomparable a l’anterior, i que el límit finit pressuposa el propi; sens dubte la solució ràpida de

$$\lim x^{\frac{1}{x}} = \lim\frac{x+1}{x} = 1 + \lim\frac{1}{x} = 1$$

quan x creix més i més esvaeix allò que s’està fent en profit del domini que se’n té, però cal si més no explicitar-ho en algun àmbit (fins i tot no deixant la mera conducta apresa).

2. En conjunt cada límit-resultant gaudiria de la seva història: els importants límits (les derivades) que tenen la forma de

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}$$

sempre que un hom atribueixi a la variable x un valor en el veïnatge del qual $f(x)$ és contínua, i on tant $f(x + \alpha)$ - $f(x)$ com α es podria dir que tendeixen en general a valors infinitesimals de

[13]El lector encuriosit pot llegir, per exemple, Augustin Cauchy, *opus cit.*, pàgs.54-64.

primer ordre conjuntament, serien en principi límits finits diferents de zero indeterminats mentre no es concretés la funció de què es tracta.

Tanmateix cal dir en conjunt que «quan els dos termes d'una fracció són quantitats infinitament petites, els valors numèrics de les quals decreixen indefinidament amb el de la variable α, el valor singular que rep aquesta fracció, per a $\alpha = 0$, és ara finit, ara nul o infinit»[14].

Això mateix valdria per al límit al qual convergeix la relació de dues quantitats, quan els seus valors numèrics anessin creixent indefinidament amb el d'una mateixa variable x.

Respecte dels valors singulars de funcions amb dos o més variables, cal dir que en algun cas són completament determinats i independents de les relacions que un hom pot establir entres les variables. Però en conjunt cal anar estudiant els plurals casos.

Agafi's, a tall d'una exemplificació amb variables independents, els límits de

$$\frac{x}{y}$$

que podrien resumir-se de la següent manera

$$\frac{0}{0} = M(-\infty, +\infty)$$
$$\frac{0}{\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$
$$\frac{\infty}{0} = \frac{-\infty}{0} = \pm\infty$$
$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{-\infty}{-\infty} = M(0, +\infty)$$
$$\frac{\infty}{-\infty} = \frac{-\infty}{\infty} = M(-\infty, 0)$$

etc.

Malgrat això són indeterminats en prou casos mentre no establim alguna relació funcional entre les variables, etc.

---

[14] *loc.cit.*, pàg.64.

Arreu és vàlid que s'ha uniformitzat i harmonitzat afers diversos en profit de l'eficàcia i de la simplicitat: sempre que hi ha un decreixement numèric fins a fer-se un infinitèsim hi ha un límit propi amb el pas a zero des de la valoració d'una quantitat que pot ser tan petita com es vulgui. És en un tal context que s'usa l'infinit gran com un acompanyant de les consideracions infinitesimals que duen a límits propis i que, a banda de la seva informació, interessa pel fet que és sovint el correlat dels infinitèsims; d'altra banda la circumstància d'anomenar 'límit' l'infinit gran (i de no fer-ho per a l'infinitèsim) es deu simplement que més enllà de l'infinit gran hi ha encara el mateix infinit, i que no és aquest el cas de l'infinitèsim. I una resultant finita és sempre la resultant de considerar en una expressió un límit propi.

Ara bé, fins i tot a nivell de funcions simples hi ha una reiteració de límits en el límit d'una funció simple, i en conjunt hi ha una reiteració de límits en el límit d'una funció, arreu mantenint-se que, una cosa essent els decreixements fins al límit zero, una altra els usos dels infinits grans, una altra les resultants finites, la simplicitat expositiva dels límits esvaeix uns tals fets.

No cal doncs sinó l'admissió (en els límits propis) del caràcter irrellevant d'una quantitat per la insignificança d'allò que esdevé tan petit com es vulgui, cosa que duu a una resultant finita (o, per exemple, a una aproximació finita a partir del fet que els infinits grans fan reiterar una operació) resultant dels càlculs (o prèviament definida), a una quantitat tan gran com es vulgui, o a zero.

3. Un cas interessant és el del nombre *e*, com a límit de l'expressió

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

quan *n* tendeix a l'infinit; en efecte, descabdellant el binomi de Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n};$$

d'on

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{3!}\right)+\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}.$$

Quan *n* tendeix a l'infinit positiu hi ha els límits genuïns dels corresponents subtrahends, i llavors

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

per mitjà del límit infinit, i dels límits genuïns: fet i fet *e* és la resultant que hi hauria quan s'estableix els límits genuïns d'una suma d'infinits sumands. Però aquí apareix la dificultat afegida de la indefinició del nombre de sumands; si es vol, *e* és un nombre impossible d'abastar, per això cal circumscriure's a aproximacions finites. D'aquí que *e* sigui un peculiar límit, obtingut, com sempre, a partir de límits propis (que s'acompanyen del discurs infinit), que alhora reitera un discurs infinit de termes a sumar. La necessitat de circumscriure's a una aproximació d'una tal resultant rau en el fet que el discurs d'infinits grans que permet el límit d'allò massa petit compromet aquí alhora el nombre de sumands en la resultant[15]

[15] Per a l'assumpció dels irracionals com a límits, cf. *Sobre les concepcions aritmetitzants dels nombres irracionals,* Quaderns de filosofia, 3.

QUADERNS DE FILOSOFIA

1. *Sobre l'ús del mot 'bo'*, desembre 1997 [2ª edició juliol 2013].
2. *Què vol dir* responsabilitat? *Amb un annex sobre la llibertat,* abril 1998 [2ª edició març 2010, 3ª edició octubre 2012].
3. *Sobre les concepcions aritmetitzants dels nombres irracionals,* desembre 1998 [2ª edició març 2015).
4. *En quina accepció els grecs demostraren la incommensurabilitat?,* febrer 1999.
5. *Del discurs teòric*, juny 1999 [2ª edició març 2012].
6. *Dels temps i dels moviments elementals*, octubre 1999.
7. *Consideracions sobre el llenguatge del llibre X dels* Elements, febrer 2000.
8. *Sobre la subjectivitat*, maig 2000 [2ª edició novembre 2013].
9. *Sobre el principi de la moralitat,* desembre 2000 [2ª edició setembre 2008, 3ª edició juliol 2010, 4ª edició octubre 2012].
10. *Dotze notes a propòsit de la causa i de l'efecte*, març 2001.
11. *La proporció d'Èudox i la generalització de la proporció,* juny 2001 [2ª edició: maig 2007].
12. *Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part primera: La tesi de l'actitud natural i la seva desconnexió,* desembre 2001.
13. *Propostes en ocasió del cos i de les passions*, novembre 2002 [2ª edició: desembre de 2011].
14. *Anotacions marginals als* Principia Mathematica *newtonians,* maig 2003.
15. *L'originalitat del sagrat i la seva crítica* (I), maig 2004 [2ª edició gener 2010, 3ª edició octubre 2014, 4ª edició octubre 2016].
16. *L'originalitat del sagrat i la seva crítica* (II), octubre 2004 [2ª edició gener 2010, 3ª edició gener 2015, 4ª edició octubre 2016].
17. *L'originalitat del sagrat i la seva crítica* (III), març 2005 [2ª edició gener 2010, 3ª edició març 2015, 4ª edició octubre 2016].
18. *Sobre els límits d'acord amb l'obra de Cauchy,* desembre 2005 [2ª edició gener 2017].
19. *Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part segona: Consciència i realitat natural*, abril 2006.
20. *Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part tercera: La regió de la consciència pura i les reduccions transcendentals,* setembre 2006.
21. *La qüestió nacional. Nous esborranys per a avui*, gener 2007 [2ª edició maig 2010].
22. *La llum i els colors. Unes aproximacions elementals,* maig 2007.

23. *Introducció a l'estètica. Esbossos d'una teoria de l'art i de la bellesa,* octubre 2007.
24. *Apunts de l'ús lingüístic per a la definició dels diferencials i de les derivades en Cauchy i Weierstrass*, febrer 2008.
25. *La saviesa, la fe i l'infinit*, juny 2008.
26. *A propòsit de la política, la democràcia i la justícia*, febrer 2009 [2ª edició: abril 2010].
27. *Resums de lògica i llenguatge*, maig 2009.
28. *El lógos de la ciència. Indicacions preliminars des de l'*Almagest, octubre 2009 [2º edició: juliol 2015].
29. *El llibre* El Callat *de Joan Vinyoli i el referent ontològic*, abril 2010.
30. *Un exercici crític a propòsit de l'inconscient freudià*, setembre 2010.
31. *La unitat i el nombre. Una introducció a l'aritmètica,* abril 2011.
32. *La història, la bona nova i la conversió. Una recerca de filosofia*, juny 2011.
33. *Una realitat anticipada, la festa, la promoció d'un sí. Una recerca de filosofia*, agost 2011.
34. *Notes de lectura de filosofia de la ciència (Popper, Lakatos, Fayerabend),* febrer 2012.
35. *Estudis sobre la comunicació. Llenguatge, acció comunicativa i nous mitjans*, agost 2012.
36. *Introducció a la geometria euclidiana. Apunts per a una filosofia de l'espai*, gener 2013.
37. *L'estudi de l'hermenèutica. La possibilitat d'experiència des dels escrits de filosofia*, setembre 2013.
38. *Temps i moviment. Una introducció a la cinemàtica*, gener 2014.
39. *La qüestió nacional. Annexos*, maig 2014.
40. *Tres exemples d'estàtica. Aproximacions de filosofia de la ciència*, gener 2015.
41. *Una aproximació a la força. Estudis de filosofia de la ciència*, maig 2015.
42. *Comentaris de l'experiència sagrada en el* Bagavad-Gītā, octubre 2015.
43. *Observant el cel amb l'esfera armil·lar. Apunts per a una filosofía de la ciencia*, gener 2016.
44. *A l'entorn de la passa heliocèntrica de Copèrnic. Escrits per a una filosofía de la ciència*, abril 2016.
45. La raó de temps entre moviments pendulars i lliures en l'*Horologium oscillatorium* de Christiaan Huygens, setembre 2016.