

F. GRAELL I DENIEL

LA UNITAT I EL NOMBRE
UNA INTRODUCCIÓ A L'ARITMÈTICA

QUADERNS DE FILOSOFIA

31

F. GRAELL I DENIEL

LA UNITAT I EL NOMBRE
UNA INTRODUCCIÓ A L'ARITMÈTICA

31

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2019

2^a edició: juny de 2019 [1^a edició: abril de 2011]

© F.Graell i Deniel

ISBN: 978-84-938454-0-7

www.xtec.cat/~fgraell

E-mail: fgraell@xtec.cat

La web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb
Quaderns de Filosofia.

Es prega de tenir en compte sempre de consultar si hi ha una nova edició (que
inclou canvis de vegades prou rellevants) en la web esmentada.

CONTINGUT

Pròleg a la segona edició, 7.

Presentació, 9.

I. UNA OCUPACIÓ INDIVIDUALITZADORA.

§1. La cosa, 11.

§2. La individualització, 13.

II. LES PLURALITATS I ELS SEUS ELEMENTS.

§1. La part i el tot, 15.

§2. L'element d'una pluralitat, 16.

§3. La integració des d'un element des de la pluralitat, 17.

§4. Una raó (relació) entre raons (elements i pluralitats), 22.

III. LA NOCIÓ DE QUANTITAT.

§1. La quantitat, 24.

§2. La certesa, 27.

§3. Més i menys, 28.

§4. La igualtat, 29.

IV. QUANTITAT I QUALITAT, 32.

V. LA UNITAT I EL NOMBRE.

§1. La unitat, 36.

§2. Noció de nombre (cardinal), 37.

§3. Noció de nombre (ordinal), 39.

§4. Unes paraules de Brunschvicg, 39.

VI. LA FORMALITZACIÓ.

- §1. El nombre formal és el genèric, 41.
- §2. L'extensibilitat de l'aritmètica, 43.
- §3. La teoria numèrica de les xifres, 45.
- §4. Nota sobre la lògica formal i els nombres, 49.
- §5. Nota sobre l'axiomatització de la teoria numèrica, 50.

ANNEX 1. Una crítica logicista a l'axiomatització i formalització de Peano, 51.

ANNEX 2. Cop d'ull al concepte de nombre des de les classes, 54.

ANNEX 3. La inducció matemàtica, 58.

ANNEX 4. Un funcionalisme aritmètic, 60.

Pròleg a la segona edició

L'origen remot de la correcció del quadern li és extrínsec i prové d'algun problema sorgit en d'altres estudis, en especial pel fet que havíem defensat la impossibilitat de quantificar un moviment (ho faríem per l'espai recorregut, i aquest espai fóra quelcom estàtic). Per motius explicats en el seu lloc, ara ens inclinàvem a assumir que es compta moviments, àdhuc les parts d'un moviment. Això comportava que la unitat no abasta sols la cosa (un moviment esdevé), i ara exposarà l'individualització.

Tanmateix, i fent bona la dita que els canvis mai no vénen sols, sembla així mateix que cal arribar a la conclusió que allò general o comú sempre pensa quelcom concret, la qual cosa posa a l'aguait d'una qualsevol generalització que s'estimi que ho sobrepassa. Tot plegat demana uns capgiraments encara més grans perquè comporta que un hom sempre es mou enmig de concrecions i particulars, afers que es discuteixen en algun altre lloc.

Si a més a més s'evita les referències lingüístiques que puguin produir confusions, el lector s'adonarà del sacseig considerable en l'orientació del treball, que alhora provoca que s'hagi de repassar d'altres aportacions no incloses aquí, palesant que unes modificacions en van provocant d'altres: les unes han dut a la present revisió, però aquesta en provoca d'altres, d'acord amb una corrua que sembla difícil d'aturar.

Pel cap baix hem introduït una colla de canvis importants, sobretot respecte de l'estudi del tot i de les parts, que ara s'inclou en el d'una distinció de més abast, la de la pluralitat i els seus elements. Tot plegat comporta la introducció de novetats en la mateixa noció d'unitat i de nombre, de manera que s'ha deixat enrere el que s'hi defensava en la primera edició del quadern gràcies a les incorporació de la raó i del que s'hi troba integrat.

A més hi ha hagut una altra interpretació que s'ha revisat. Ens referim a la de la mateixa aritmètica per la qual no renunciem a comprendre-la per mitjà d'algun genèric, i assumim la seva universalitat a partir del domini numèric, i a partir del fet que aprenem

aquest domini, el que té de més senzill, des dels particulars, de manera que la universalitat de l'aritmètica gaudeix d'una comprensió a través del paral·lelisme (una relació) de les raons (de les estructures) particulars. L'aritmètica esdevindria un mitjà meravellós de treballar quelcom a banda (el seu domini numèric) la raó de la qual cosa es trobaria, en allò més senzill, en particulars varis.

L'inici de tantes revisions no sembla que hagi estat exempt d'haver-se contaminat pels estudis de filosofia de la ciència: sempre hi ha una gota que fa vessar el got, i la circumstància de repensar nocions elementals de mecànica i d'electricitat, al costat del rigor dels estudiosos dels segles passats, deu haver comportat un canvi lent de la sensibilitat per a acollir d'altres reflexions pròpies que ja han semblant amb alguna manca de claredat.

Sigui com sigui esperem que l'escrit mantingui el seu interès; les successives lectures han permès si més no anar serrant el que s'hi exposa, simplificant al màxim els paràgrafs, a fi i a efecte que s'hi lliuri fàcilment què s'hi vol mantenir.

PRESENTACIÓ

El repàs de la noció de nombre (natural) es deu a la necessitat de tant en tant de repensar allò que ja s'ha obtingut: la seva importància i l'aparent simplicitat convida al gaudi d'un discurs que en principi no ha d'oferir un gran nombre de dificultats, i on es fa difícil de mantenir-hi grans errors.

Car sembla molt estrany de defensar un criteri rígid en l'avaluació del treballs dels estudiosos que ho han provat: i la conveniència o no d'això o d'allò per a la circumscripció de la noció de nombre, un afer ben bé de filosofia, no prejutja una opinió conjunta de la comprensió d'una disciplina formal. És més: s'ha afirmat amb aparent encert que l'aritmètica, per exemple, no té necessitat d'elucidar la natura exacta de les seves nocions bàsiques, un motiu de més per a admetre una aproximació a allò que és la unitat i el nombre sense destorb per a l'activitat posterior.

El repàs que aquí es proposa no segueix ben bé les orientacions lliurades a *Lògica, llenguatge i matemàtica*: la noció d'unitat s'hi empeltava amb la de cosa, es remarcava la importància de l'ús de les formes lingüístiques diferents per al compte i l'enumeració i, en canvi, ara s'amplia el criteri del que és u i s'evita un excés de referència a l'ús de formes lingüístiques. Aquí s'ha mantingut així mateix algun esclariment per al formalisme i l'axiomatització, i uns annexos continuen recollint alguns textos que es trobaven en l'obra esmentada.

També s'hi palesa algunes simplificacions rellevants: per exemple, els nombre exemplars i els estructurals s'han cregut innecessaris. I el lector hi trobarà sobretot un esforç per a lliurar de manera clara i sense confusió allò bàsic que s'hi estudia. En particular la noció de quantitat sembla especialment reeixida quan se l'entén a partir d'allò plural i els seus elements, i s'ha procurat que superi una qualsevol ambigüitat. Si s'hi abasta o no el que se cercava es veurà amb el pas del temps.

D'altra banda s'ha intentat d'esvair la possibilitat d'un qualsevol malentès sobre el sentit de posar en connexió alguns textos rellevants d'autors ja consagrats, i per això se'ls ha separat en annexos

independents, que han permès així mateix un breu comentari de l'abast de cada cita a fi i a efecte de donar un horitzó a unes consideracions sobre la unitat i el nombre, elements privilegiats d'un paisatge que permeten un desplegament indefinit de temes i de referències, i d'anar-hi introduint tota mena d'observacions.

I

UNA OCUPACIÓ INDIVIDUALITZADORA

La cerca de la unitat demana algunes indicacions a propòsit d'allò susceptible de ser u, i ho farem tenint en compte la cosa, per després provar de disposar de quelcom més apropiat.

§1. La cosa.

El bolígraf, la taula, el tros de poma, les ulleres, el text, la pedra, etc., són coses. Versemblantment no tenen cap circumstància material comuna, o fins i tot que s'assembli: la cositat no depèn de què estan fetes, ni de la capacitat de posar frec a frec els elements de què consten. Ocorre que els afers reals es lliuren com a bolígraf, taula, goma, ulleres, i també – al nivell que es vulgui – hi ha diferències, esdeveniments (moviments), hi ha anàlisis, meditacions, i d'altres.

Cap inspecció d'una cosa no sembla capaç d'oferir fàcilment el motiu pel qual és cosa.

Una primera aproximació exposaria que la cosa i les coses són importants en un ordre dels afers: aquell pel qual una cosa és allò més consistent, independent, subsistent en alguna accepció. Potser fóra convenient d'afegir: la cosa és allò que es lliura i que és capaç de ser agafat, o si més no aïllat d'una qualsevol manera, identificat, reconegut, pres com a quelcom estàtic, com un tot, etc., amb l'afegit que quelcom seria cosa precisament perquè com a tal cosa es prendria tal qual, sense parts, malgrat que divisible, per això la cosa fóra unitària. D'aquí també que la cosa pogués ser dita individu.

La noció de cosa implicaria doncs, en aquesta primera aproximació, que de fet o d'una manera factible (àdhuc imaginable) quelcom fos independent, solt, agafable, resseguible, rodejable. La cosa hauria de ser subsistent, o hauria de semblar que és possible de ser-ho.

Tanmateix la circumstància que la cosa s'ha d'entendre com una manera de pensar afers de la realitat natural, proposada si més no per llur mateixa textura, no suposa que el pensament no s'ho faci de

moltes maneres (diferència, medita, fantasieja): sí, la cosa exigeix que hi hagi quelcom que mereixi que ho sigui, però també és una via de pensar els afers.

La cosificabilitat permet d'entendre, per exemple, que els trossos d'un traç vagin essent també coses, no tant perquè efectivament hi hagi l'activitat d'aillar-los, suposadament en el paper tacat i retallat precisament així, o per una activitat imaginària que separés la tinta de què està fet el traç i el paper on és, o que simplement l'imaginària al marge d'un qualsevol suport, no tant per tot això en concret, sinó per la circumstància de pensar-los així, de tenir-los com a coses al marge d'una qualsevol suggerència, malgrat que, és obvi, sols s'avaluen com a coses perquè són susceptibles d'una independència.

Una tal independència no és aquí la de quelcom rodejable o engrapable, sinó d'alguna cosa individuable (hi ha una discriminació visual), que palesa un domini d'activitats, que discrimina tant respecte del blanc del paper com al llarg del traç.

Es podria pensar que hi ha coses arreu, gairebé cada parcel·la real ho podria ser (i pensar-la així doncs), amb el nou afegit que una cosa mantindria tot el seu contingut en pensar-la com a tal: l'elefantet d'ivori que un hom té a la mà lliura la seva realitat material a través de l'experiència perceptiva de què es va gaudint, no hi ha res del que és que no s'hi trobi, en aquesta cosa.

No costa massa d'adonar-se que la cosa fàcilment abastaria tots aquells individus que quotidianament s'evitaria de fer-ne exemples: aquí no es podria fer excepcions d'aquest tipus sense caure en alguna unilateralitat. Tot allò que podria individuar-se d'alguna manera seria una cosa.

També s'entendria així en general per què els tots són coses, però també les parts, de no importa quin àmbit. Per això també un paisatge, una panoràmica, la contempció del cel, etc., potser també es podrien avaluar com una cosa malgrat que no s'hi permet prendre-ho com a quelcom agafable, amb alguna proporcionalitat amb els braços i les mans. Ha d'haver-hi una ambigüitat en els límits de la cosa¹.

¹ Considerem així mateix el següent: aquesta pedra és també aquesta cosa i aquest ésser. Tanmateix se la copsa amb alguna variació: és pedra per les seves característiques físiques, és cosa per la seva independència i

§2. La individualització.

L'estudi de la cosa permet algunes remarques: que la cosa és individualitzable, que és independent en aquesta concepció. Que l'ocupació té un paper actiu a l'hora de determinar una cosa i que, més enllà del que és agafable o manipulable, l'estén a d'altres afers que no ho són o que no ho són tant.

Cal superar, però, aquest estadi. Ja sigui per una assimilació a partir dels molts exercicis que porten a manipular coses i a admetre'n; ja sigui potser pel fet d'haver-hi algun tret ocupacional que s'estén més que per a l'ocupació de la cosa, que en seria sols un cas particular, sigui com sigui, repetim, hi ha una característica de l'ocupació que fa que la cosa s'ofereixi només com una manera específica d'exercir-la.

Es tracta d'ocupar-se explícitament de quelcom circumscrit, determinat. D'haver-hi una individualització. La cosa fóra llavors una de les maneres d'exercir-ho, però no l'única. Potser ajudaria a entendre també que s'estengui la cosificabilitat més enllà d'allò que és manejable.

Tanmateix la cosa no resol l'ocupació individualitzadora: ara allò que es pot circumscriure s'amplia considerablement i no deixa res, sembla, que no es pugui explícitament entomar plegat.

Per exemple, cada oscil·lació del pèndol se l'estima com l'oscil·lació de la qual un hom pren nota. Cada part d'un moviment passa també a ser determinada, etc.

Certament en cap dels casos no hi ha mera arbitrarietat o convenció, però en tots els casos és la tasca ocupacional que individualitza, sigui cosa o esdeveniment. Aquella tasca és un exercí i alhora es duu a terme perquè hi ha dèbit, altrament, què s'individualitzaria?

individualització, com a ésser es palesa tal qual sense d'altres característiques o circumstàncies. Això suposa, una vegada més, la rellevància del que un hom s'ocupa.

Per tant l'activitat circumscrividora és tan arbitrària o tan poc, com el fet, per a nosaltres, que només hi ha realitat per tot el que s'hi apunta.

II

LES PLURALITATS I ELS SEUS ELEMENTS

La quantitat es troba, sembla, en el fet que hi ha tots i hi ha parts, conjunts i els seus membre, pluralitats i els seus elements. Ara toca de capficar-s'hi abans de parlar-ne, de la primera.

§1. La part i el tot.

1. Les activitats relacionades a fer parts de quelcom són múltiples: tallar llenya, llescar el pa, trencar una gerra, estripar un paper, desmuntar una màquina, descargolar això o allò, saltar una cosa del seu lloc o del cos al qual pertany, desfer els terrossos, esberlar pedres, treure escorces, etc. Versemblantment es podria allargar bastant la llista, com fóra prou llarga la que apuntés el fet d'unir, d'ajuntar, d'apilar, de fondre, de recollir, d'aplegar, de soldar, d'encaixar, d'afegir, etc.

El nombre de les activitats vàries que podrien ser ben bé comparables entre si faria palès la importància de les dues direccions: la que va a les parts, i la que va a llur composició.

Potser deu ser rellevant que tots els comportaments associats aquí als tots i a les parts siguin d'ordre pràctic, en l'accepció que afecten el tracte amb productes naturals i els seus derivats. Sens dubte la circumstància que l'ésser humà hagi necessitat, i necessiti, per a subsistir de manipular els éssers naturals permet si més no d'estar a l'aguait del fet que hi ha una urgència pràctica de desfer les coses i de fer-les (o refer-les).

No hi hauria doncs parts si no hi hagués tots, i a l'inrevés. L'assumpte palesa la complementarietat entre les múltiples activitats humanes.

2. És clar que res no obstaculitza que un mateix observi teixits, pells, fustes, dibuixos, i que hi consideri trossos grans i parts seves, de manera que es palesi que l'ocupació individualitza ara quelcom gran,

ara quelcom més petit. Es podrà estimar que això perllonga una activitat pràctica o es postularà que es tracta d'una capacitat de mateix comportament humà.

Sigui com sigui es tracta d'una activitat que s'efectua arreu: un moviment permet també les respectives individualitzacions de parts i de tots. S'hi troba parts i tots en una qualsevol mena de moviments, siguin trasllats, alçaments, caigudes, caminades, gesticulacions, etc., potser s'hi podria afegir el que fa referència a una colla de treballs actius pel fet, per exemple, que un hom s'adona que encara li queda una part de feina o que ja l'ha feta tota.

En efecte sembla que l'extensió d'allò que pot ser part i tot es desplegui per un nombre rellevant de les activitats de l'ésser humà, en camps prou dispers, circumstància que suggeriria el seu caràcter bàsic.

3. Òbviament s'hi pot atendre molts altres afers en «tot» al marge d'aquestes consideracions, o complementàries a unes tals consideracions, que es volen circumscriure a unes nocions bàsiques a propòsit de la quantitat. L'esclariment de la part i el tot en aritmètica no comporta en cap cas un estudi seu general.

La defensa del caràcter apriorístic de l'enunciat «el tot és més gran que la part» a partir de la mateixa operació de pensar tot i part suposa que el fet d'expressar què és un tot i què una part basta per a assumir-lo. Tanmateix, si un hom demana de discutir una mica més què fa que el tot sigui més gran que la part, sembla que li caldrà pensar què és un tot i què una part, l'elucidació de la qual cosa difícilment deu poder evitar alguna representació que palesi exemplarment la veritat que s'enuncia.

En efecte el principi «el tot és més gran que la part» s'ofereix a tall d'un exponent genèric, el particular corresponent del qual en dóna raó.

§2. Els elements d'una pluralitat.

L'estudi de la part i el tot bastaria per a poder presentar la quantitat.

Però el manteniment en un ramat de bens d'una relació de tot (sí que es parla així per a aquest conjunt), i de part, sembla forçada (ho sembla l'esment d'un be com a part), i alhora cal admetre que una qualsevol circumstància que es pugui dir, a propòsit de la quantitat, per al tot i la part, valdria així mateix per al conjunt i el seu membre. És a dir: hi ha quantitat pels tots i les parts, i per als conjunts i els seus membres. Per això continuarem l'exposició sabent que hi pot haver una part d'una cosa prèviament entera o d'un moviment sencer, i que hi ha membres que han estat sempre individualitzats tal qual en un conjunt.

Reblarem tot plegat fent esment de quelcom plural, o d'una pluralitat, i dels seus elements.

En efecte un hom pot evitar l'esment del tot i la part, i parlar d'una pluralitat i d'un element, que no pressuposa si és un tot sencer de parts respecte d'una d'aquestes, o un conjunt d'individus independents i el corresponent individu. Donat que caldrà introduir-hi la integració, bastarà, en una pluralitat, que un hom parli de la pluralitat com a integració, i d'un seu element com a integrat.

Tanmateix sembla rellevant d'avançar que els genèrics no expressen integració, i això és vàlid tant per als tots i les parts com per als conjunts i els seus membres i, és clar, per a les pluralitats i els seus elements. La qual cosa implica que cal iniciar-se en l'estudi des de pluralitats particulars

§3. La integració des d'un element i des de la pluralitat.

1. Els usos d'aquests mots poden ser molts i aquí tindrem sols en compte aquells que suposen que un hom para esment a la integració d'allò plural i dels seus elements, que deu ser l'únic camí per a poder comprendre què és la quantitat.

«La part del troc», quelcom pensat, permet suposar que hi ha un tot; «tot el troc» permet que hi hagi hagut alguna referència a la part malgrat que pensi ara en el tot.

Això valdria arreu: una pluralitat de cadires al voltant d'una taula implica si més no que un hom s'adona que hi són, i que són més d'una: cal doncs que ho hagi atès poc o molt; és a dir, que hagi mirat

de pressa que hi ha cadires pel fet, per exemple, que la de l'extrem en té unes quantes davant. Cal alguna atenció a algun element dins de la situació (a remarcar-ne d'altres si molt convé), i que es pensi (i s'expressi) que hi ha una pluralitat.

És molt possible que un nombre rellevant del usos de 'tot' i de 'part', de 'conjunt' i de 'membre', de 'pluralitat' i de 'element', es facin considerant precisament que hi ha pluralitats perquè hi ha hagut elements, i que els elements han suposat allò plural. Si més no el fet de contenir una referència a les parts no és aliena en algunes expressions: per exemple, quan un hom vol «tot el tronc» hi ha versemblantment el desig que no se'n llevi cap part, que se li lliuri tot complet («de parts»), etc.

2. Ara bé: els genèrics «element» i «pluralitat», mentre es poden explicar pels particulars («aquest tros de tronc», «tot el tronc», «aquesta cadira», «el conjunt de cadires») no tenen cap altra significació que la que es deriva del seu ús, que en principi no inclou cap significació racional.

D'altra banda una part del troc i la cadira del conjunt no gaudeixen de res que pertanyi a l'una i a l'altra alhora, com no en gaudeixen els tots plurals respectius.

Això implica que, àdhuc quan ens expressem genèricament, cal remetre'ns als casos particulars en cas de necessitar un qualsevol aclariment, perquè únicament aquí se'n dona raó, del genèric. El lector és convidat doncs a les connivències que es trobi necessàries.

3. La circumstància que el tot del tronc pugui suposar una referència passada de la part, i aquesta d'aquell, no fa més que exemplificar la complexitat de la consideració d'un objecte com el tronc (o d'un conjunt de cadires) per la qual hi ha un element i allò plural. És a dir: se li suposa una integració en l'ocupar-se, de manera que un hom conté en això present quelcom passat. Algú pot comprendre el tot del tronc, i a l'inrevés, és a dir, pot comprendre l'element-part.

Això mateix és una raó: un hom explicita quelcom i no oblida el punt de partida, i hi retorna engreixat amb allò explicitat. I així

repetidament i en totes les direccions. La raó és integració. Per això, una vegada més, el tot del tronc i una part seva s'impliquen, quan els tractem així, i d'aquí també que un hom pugui matisar com raona, com sigui que una qualsevol integració no es manté com un afer rígid o rigorós, sinó que l'ocupació s'esbulla per arreu d'acord amb una activitat que no té un programa precís, mentre una raó s'ofereix sobreixint en una diversitat d'integració que provoca l'ocupació.

Ara bé: una raó com a integració no compromet, és clar, que un hom sigui capaç d'abastar una comprensió il·limitadament fecunda. Vol dir sols que un hom es troba en un punt d'arribada que també s'explica pel que ha passat. Un tot plural del tronc, el conjunt de les cadires, es comprenen, en un context quantitatiu, i en el cas d'haver repassat els elements, com un resultat: àdhuc en el cas de molts elements bastaria haver-ne atès un, i adonar-se de la situació, perquè la respectiva pluralitat es compregués tal qual.

4. Cal tenir present que, en un tal context, una pluralitat particular, per exemple el conjunt de cadires, acostuma a ser pensada objectivament, i és així individualitzable; que versemblantment hi ha hagut abans alguna referència d'algun element; i que difícilment aquella pluralitat remet a una síntesi expressa d'elements representats.

En el cas que algú volgués circumscriure més el que expressa un tot de cadires dut a terme en una ocupació particular assumiria versemblantment el següent: repassa una cadira (si fos el cas) i és ocupat en una altra cadira que, des d'aquí, pensa en el tot de l'una cadira i de l'altra. Tanmateix el pensament (des de la cadira que es percep o ja implícitadament²) d'una pluralitat (de l'una cadira i de l'altra)

² En d'altres llocs (cf. *Entre les raons bàsiques i el pensament genèric* QF27) s'ha mantingut que un hom entén els objectes físics que el rodegen, que de fet els anomena pel que són, que expressa el que percep, etc., de tal manera que no hi ha solució de continuïtat entre quelcom percebut i el seu pensament, sinó que ho esmentem com a percebut per la diversitat dels sentits, entès, anomenat, pensat i expressat, quan se'l considera al marge del polifacètics sentits. D'altra banda un hom pot circumscriure's a l'observació d'un fet perceptiu, o el pot considerar o ponderar, de manera que hi ha un notable ventall d'explicitació i d'implicitació en l'ocupació. En els afers de la raó val

no és el d'una síntesi (de representació dels elements). No havent-hi síntesi, i suposant pel seu sentit els elements que hi havia (i que ara no hi són atesos més enllà del que es percep, quan és el cas, o de la implícitada), allò pensat del conjunt sols deu ser el d'una integració, de manera que, al marge que s'atengui o no una cadira, aquest pensament d'una pluralitat de cadires (l'una cadira i l'altra) és el d'un integració, de la qual pluralitat o integració en dóna raó un element qualsevol. Per tant s'arriba al pensament de la pluralitat del paràgraf anterior, però el rodeig fa adonar que el conjunt d'aquestes cadires no suposa una síntesi de representació, sinó un pensament. Ara bé es tracta d'un pensament racional, en l'accepció que és una de les maneres de pensar una integració que ha estat duta a terme element a element (si fos el cas).

Una pluralitat d'aquestes cadires no exigiria doncs cap operació cognoscitiva més: es tractaria d'una manera de considerar una integració. Un pensament que és una racionalitat.

Per la seva banda el pensament d'un element seu no es duria a terme independentment de la pluralitat-integració en l'accepció que com a mínim hauria d'implicar que hi ha un restant. El pensament de l'element ofereix certament un tal caràcter racional. Un nou pensament que és una racionalitat.

5. Aquestes consideracions són extensives, és clar, als elements que no són encara la darrera pluralitat: un be, per exemple, s'ofereix a tall d'una individualització, sense més. Quan hi ha un altre be, llavors algú sap que hi ha bens, i no un de sol, perquè poc o molt ho ha atès: tanmateix no s'hi troba cap representació fosa d'un be en l'altre, tampoc no sembla que faci cap síntesi que no respectaria la solució de continuïtat d'un be amb l'altre. Què vol dir doncs que hi hagi bens? Doncs que n'ha atès un i tot seguit l'altre, mentre manté el saber del primer, per tant és això el que anomenem una integració, o una raó.

Ara s'hi afegeix un tercer be: certament un hom pot parlar displicentment dels bens sense més. Suposi's que ho vol atendre en

més no insistir en aquestes matisacions, i tenir en compte que es tracta d'un afer de pensament: allò més important no rau en una distinció impossible entre allò percebut i allò entès o pensat, sinó entre particular i genèric.

detall: en aquests cas la parella anterior ja és un tot, una pluralitat, un conjunt, i ara se li afegeix un tercer be, que s'integrarà per tal que hi hagi la respectiva raó. Hi haurà un nou tot o pluralitat.

Per tant un qualsevol plural (això és, no singular) expressat particularment és un tot, un conjunt, una pluralitat.

En les relacions entre la part i el tot, el membre i el conjunt, l'element i la pluralitat, quan es parla de les parts, membres, elements, es pot fer la convenció que no són, aquests mateixos, els darrers tots, conjunts, pluralitats (perquè sí que són un tot, un conjunt, una pluralitat, i valdria per a aquests mateixos el que es diu per al darrer tot, conjunt, pluralitat).

Potser caldrà tenir present llavors que, en una pluralitat (per exemple, de cadires) la integració des d'una part que no sigui la darrera podrà ser doble: l'una, que integra allò anterior, l'altra, independent de la primera, que ho raona tenint en compte que hi ha un tot darrer. Per tant des d'aquella part que no és l'última es pot pensar un tot o pensar-la integrada en un altre tot.

Això deu comportar que la presència d'unes tals raons recullen quelcom que remet a la memòria i al cos. No perquè això no es trobi activament engrossint la raó present, sinó perquè hi ha el contrast entre una admissió racional i el convenciment que no es pot pretendre que s'integra un repàs de molts elements amb claredat en l'ocupació d'ara.

En una raó, s'hi manifesta allò que fa parlar d'aprenentatge, d'una reiteració, d'un domini, afers que remetent certament a treballs ocupacionals, a un afer adquirit i servat gràcies a alguna accepció del que és el cos.

Comptat i debatut el pensament racional treballa així. L'atenció a una raó més o menys cenyida no lleva que hi hagi d'altres condicions que se li fan escàpoles. En una pluralitat de molts elements hi ha una raó des d'un o dos elements, malgrat que un hom resti convençut que hi ha una pluralitat de molts elements; és a dir, que aquella raó ho inclou, altrament no comprendria el que fa, no interpretaria que el que es fa és vàlid per a tota la pluralitat.

6. No cal que en el repàs d'elements (més d'un) un hom hagi d'avaluar, des de cada element que no és el darrer, que hi hagi la seva respectiva pluralitat: els plurals (això és, no singulars) sens dubte ho fan, si s'atén l'afer. Però un hom pot repassar una cadira, després una altra, i així successivament, fins a arribar a la pluralitat, de manera que no hi ha el pensament de cap més pluralitat, i es manté per aquella pluralitat la integració o raó, i que des d'una qualsevol cadira pugui així mateix saber que s'integra en un conjunt.

7. L'abast de la racionalitat no permet una qualsevol integració. Versemblantment un hom és capaç d'adonar-se d'un tal joc per a dos, potser tres elements: ben bé no sembla que es pugui saber perquè es tracta d'un pensament, i no d'una representació. A més algú pot trobar-se clarivident o ofuscat, i no se sap on acaba una raó lúcida i on comença allò que fa portar a col·lació la memòria. Sigui com sigui una raó es mou enmig de tot això i és amb tot això que es treballa: un hom podria atendre la raó que hi ha en dos elements, passar a la raó que hi ha en dos altres, retornar a l'anterior, i així anar fent, de manera que el pensament es descabdella des de raons cap a raons fent que el que s'esvaeix aquí es posi en relleu allà, tot fomentant un pensament de racionalitat. Fet i fet s'arriba a la comprensió de problemes difícils (deixant ara la quantitat) actuant d'una manera paral·lela: es va repassant llur racionalitat.

I tenint en compte que arreu es pot remetre a l'aprenentatge, al domini, a moltes condicions, amb suport en alguna de les accepcions del cos. Fet i fet el repàs d'una raó feta abans des d'una d'ara, i d'aquí a d'altres ja pensades, es fa sovint més com un regal que com el fruit d'una activitat voluntària: gaudim de moltes raons, que quan les tenim present, ho fem com quelcom que prové d'un passiu a mà. Hi ha moltes raons suggerides o conquerides en un passat, on es palesa un passiu.

§4. Una raó (relació) entre raons (elements i pluralitats).

Es planteja per què una cadira d'un conjunt i una part d'un traç, i les corresponents pluralitats, es mantenen com a donadors de raó d'un

genèric «element i pluralitat», una vegada hem admès que no hi ha res que pertanyi als dos elements, o a les dues pluralitats.

En efecte no és el fet de ser cadira o haver-hi un tros del traç que permet alguna aproximació més enllà d'oferir-se diferents.

I si l'aproximació no es troba en això o en allò, cal admetre que un genèric «element i pluralitat» remet, com a quelcom que li dóna raó, a alguna cadira i al seu tot plural, a la part del traç i al seu tot, però aquell genèric no suposa que hi hagi cap raó entre un element genèric i la pluralitat genèrica.

Per tant l'aproximació entre alguna cadira amb la seva pluralitat, i la part del traç, amb la seva respectiva pluralitat, es troba entre la racionalitat d'una banda i de l'altra – un hom atén una cadira, i pensa en el conjunt; atén una part del traç, i pensa en el tot –, en el fet potser important que ha d'haver-hi un joc racional entre jocs racionals: una relació entre raons que treballa com qualsevol altra relació. Hi ha unes racionalitats paral·leles, que no poden ser dites iguals si no és el cas (no n'hi ha entre els elements i les pluralitats de cadires i de traç).

Sigui com sigui un genèric «element i pluralitat» no suposa res que no suposi un qualsevol altre genèric: que, quan convingui, hi ha quelcom que li dóna raó. En la consideració del que hi ha entre un element (una cadira) i la seva pluralitat, i l'element (tros de traç) i la seva pluralitat, el fet singular rau que el particular aquí ja és la resultant d'un exercici racional: arreu no hi ha cap dissolució d'elements o de pluralitats, o de raons, sinó la circumstància d'unificacions a partir d'exercicis racionals que suposen els apuntament de l'existència.

III LA NOCIÓ DE QUANTITAT

La pluralitat ha permès d'introduir la raó com a integració, que sembla una condició indispensable per a comprendre primer què és la quantitat, i després què és el nombre. Ho farem en apartats diferents.

§1. La quantitat.

1. Doncs bé: la consideració de quelcom natural, per la qual hi ha tots i parts, conjunts i membres, pluralitat i elements, permet introduir la quantitat (o allò quantificable).

Aristòtil va afirmar *ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχοντα ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἐν τι καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι* (*Met.* 1020a 7-8). En ell la resposta a la pregunta «quant?» (*ποσὸν*) apunta allò que és dividit (*διαιρετὸν*) en el donat prèviament (*ἐνυπάρχοντα*), mentre que cada dividit (*ἑκάτερον ἢ ἕκαστον*, «cadascun i per seu cantó») és (*πέφυκεν εἶναι*, «té fet ser») un i ben precís (*ἐν τι καὶ τόδε τι*, «algun un i algun aquí»).

Sembla que la quantitat pressuposi la pluralitat. Si més no Aristòtil ho explicitaria; «quant» suposaria una comprensió unitària: allò que és dividit (*διαιρετὸν*). Quelcom tindria quantitat perquè seria una pluralitat d'elements, i hi hauria quantitats determinades quan una pluralitat constés d'uns elements, i precisament d'aquests.

I la quantitat demanaria que tant l'element com tota la pluralitat fossin individualitzacions.

La quantitat no s'oposaria a res, sinó que complementaria: allò que dóna raó a l'element i a la pluralitat (arreu genèrics) no pot pensar-se al marge del que són els elements (cadires, recorreguts, etc.) i al marge del que és la pluralitat (de cadires, del moviment, etc.).

La quantitat fóra una manera de pensar i de referir-se als afers naturals. Quelcom quantitatiu implicaria haver-hi pluralitats.

2. Certament no deu tenir rellevància que la quantitat es consideri des d'una pluralitat o des d'algun element pel fet obvi que, en l'estudi particular, la quantitat és la resultant d'haver seguit poc o molt algun element i algun tot, de manera que integra el que havia estat abans en l'ocupació d'ara, independentment que un hom considerés la quantitat des d'un lloc o des d'un altre.

Precisament la quantitat expressa que hi ha hagut individualitzacions dels elements, i també que hi ha una pluralitat.

De fet la quantitat es diferencia del nombre perquè aquest usa un nom diferent per a cada unitat, de manera que l'última a ser usada pugui expressar també una quantitat definida.

Això vol dir que la quantitat definida des d'una pluralitat, com el nombre d'un col·lectiu, expressa una racionalitat (una integració) i no és cap síntesi.

Certament la quantitat pot expressar simplement quelcom genèric sense cap referència a un particular, i llavors es pot usar el terme 'quantitat' amb una significació que palesi que se'l sap usar i d'acord amb un context. I en tots els casos quan algú es pregunta què és la quantitat caldrà que refaci algun camí.

Qualsevol quantitat doncs és una pluralitat, però una pluralitat sols pot ser també considerada una quantitat. Aquesta darrera, és clar, expressa quants elements hi ha, donada alguna característica de l'element. Mentre la pluralitat atén la diversitat d'elements independentment de com és de llarga o de curta aquesta pluralitat, la quantitat la suposa acumulada o determinada.

Per això la quantitat està emparentada amb la magnitud, allò que pot ser més o menys.

En la pluralitat, hi resta imprecís el seu ventall – en la quantitat s'hi palesa una circumscripció de la pluralitat.

La quantitat és una pluralitat que explicita què abasta o que ho pregunta. No és res d'estrany que les quantitats per excel·lència siguin els nombres, amb els quals es poden comptar uns qualssevol dels elements d'una pluralitat, en especial les mesures de l'espai i de les seves dimensions, i els moviments. La quantitat respon a la mida d'una pluralitat.

Potser gaudeix d'un cert interès fer l'observació que la quantitat manté que hi ha hagut la raó d'una pluralitat i la pregunta «quants» i, si molt convé, se segueix d'un compte o d'un mesurament. Allò rellevant aquí és que la quantitat no és la resultant d'una mera observació («veig la cadira»), o del fet de recollir per la raó una colla d'elements, sinó que inclou el saber de l'abast d'una pluralitat. És com un repàs del que s'ha lliurat en un raó per a precisar-ne els elements. D'aquí que es trobi situant-se en una integració.

3. Una vegada més recordem que una raó es troba circumscrita a molts pocs afers, i que la integració no ho supera. Tanmateix nosaltres arrosseguem talment la racionalitat passada que permet afegir que compremem el que fem ara, mentre que no conté la diafanitat del que ens ocupa. Versemblantment l'activitat present explota uns recursos suggerits, que deuen remetre a alguna circumstància que se'ns escapoleix, passiva, i que convida a tenir-ho a tall d'alguna accepció del cos.

A propòsit de la quantitat, un hom s'ocupa d'un element o d'un tot, passa sense solució de continuïtat a un altre element, repassa l'anterior, i així successivament, de manera que hi ha un procés racional que va duent al fet que es tracta d'una quantitat de molts elements, per exemple. Però això ha necessitat de diversos expedients: d'una raó particular privilegiada, sí, però també d'altres raons, tant més que un hom ho domina, ho duu a terme amb comoditat, tot plegat fent sospitar sempre també d'alguna accepció del que és el cos.

És clar que no s'està suggerint que el pensament i les raons descabdellades amb facilitat, o la sedimentació del que ja està fet en el que ara es fa, remetin a un cos objecte (intern o extern), sinó que l'existència, que sempre hi és, també s'hi troba dependent, que s'explica per allò que ha fet i per allò que ho permet, i que es lliura a la seva manera mentre existeixo.

Certament no sé soscava una raó pel fet de dependre de molts factors. Nosaltres sols podem comprendre d'acord amb la seva possibilitat.

§2. La certesa.

No sembla que l'ocupació en afers particulars que duu a terme alguna consideració de quantitats i, en conjunt, de pluralitats, quan s'hi tracta amb pocs elements, tingui molts dubtes: aquí qualsevol atenció als elements i a la quantitat sembla gaudir de prou certesa.

Una discussió a propòsit del que és a posteriori o a priori en tot això no té sentit: no hi ha res que permeti una tal distinció, ni pot haver-hi cap deducció que deixi destriar-los. A més a més no n'hi ha necessitat.

La certesa prové primerament de l'activitat que duu a terme la consideració, i palesa una característica de la seva integració quan un hom estudia casos particulars.

En aquests casos un més gran grau de seguretat, o més petit, no es deu sols a la mateixa articulació d'haver-hi quelcom integrat, sinó també a allò que s'integra, i que treballa en l'element i en la pluralitat.

Ara: s'ha de descartar que l'evidència aquí provingui del pensament com si en fos el garant el fet que, aquell desfent-se d'una qualsevol remissió a considerar afers natural, la pogués exposar amb la seva claredat. En aquest cas potser es desorientaria i tot per a saber què és element i què és pluralitat o la quantitat. La certesa privilegiada en efecte deu provenir del que s'integra a nivell particular.

Ocorre que en inspeccionar quelcom l'element no sols està integrat en la quantitat que és integració, sinó que també hi és efectivament, i hi ha estat immediatament pensat. Si es vol així: l'ocupació de la quantitat, que integra l'element, manté la situació.

Passant ara a l'element particular, aquest suposa un restant implícit que es manté efectivament en la situació, i l'hi ha pensat, i és en aquest sentit que hi ha una integració.

Després hi ha totes les condicions que possibiliten la comprensió del que s'està fent pel que ja s'ha fet, de manera que la certesa d'ara continua certeses anteriors.

Hi ha doncs una certesa molt accentuada en allò que fa referència a l'element i a la quantitat en els afers particulars. Per això el pensament genèric la conserva, i la revalida amb una qualsevol representació si cal.

§3. Més i menys.

1. Un particular seria més quan s'atén una quantitat respecte de l'element o dels elements que l'integren, aquella quantitat no essent sols aquests elements. Precisament l'element o elements en qüestió serien menys que tota la quantitat.

No caldria àdhuc molta explicitació per a saber si un particular és més o menys que un altre afer. Una quantitat integra l'element o els elements corresponents, ja se sap que n'hi ha més que quan sols es considera alguns elements; i també, quan es considera l'element, se sap que n'hi ha menys que en tota la quantitat.

L'afer deu palesar més aviat una colla d'alteracions graduals de l'ocupació.

La quantitat particular, que és integració, i l'element (o elements), que estan integrats, van fornint de pensament: hi va havent aquí una raó entre una quantitat, que és més, i la resta, que és menys.

Per tant el més i el menys expressen unes relacions: des del tot respecte de l'element o elements, des d'aquest respecte del tot.

I llavors els genèrics corresponents usen simplement els mots que toquen d'acord amb un domini seu.

2. El més i el menys de les quantitats i els elements treballen com acabem de dir.

Tanmateix d'altres usos de 'més' i de 'menys' no són simplement intercanviables amb els de dalt: per exemple, un tros de ratlla és més curt que tota la ratlla (i aquesta és menys curta). És obvi que aquí hi ha un entrellaçament de qüestions quantitatives (es pensen pluralitats i elements). Però quelcom és més curt perquè li falten parts per a arribar a allò que és menys curt: és més precisament essent menys. L'única solució sembla la d'admetre que allò curt s'hauria de posar al costat d'altres afers on l'element inquantificat és l'únic que compta (més vermell, més àcid, etc.), on allò que es vol dir no implica tant aspectes quantitativs com l'efecte que fan els esdeveniments i les coses.

Tot això posa a l'aguait de la possibilitat que algunes consideracions a propòsit de més o menys entre elements i pluralitats mereixen de ser tingudes també com d'afers intensius: allò que val per a «més curt» valdria per a «més llarg». Aquí res no seria explícitament o implícitament més que un altre afer si no es contemplés respecte què, és a dir, de què és més que. Uns tals més/menys entre elements i pluralitats serien doncs un afer quantitatiu i intensiu.

En la suma s'usa el terme 'més', i en la resta 'menys'. Es tracta de dues operacions que són enmig d'elements i de quantitats: la proximitat de les consideracions no lleva d'entendre que 'més' s'usa com s'usa 'i' o 'afegit a', i 'menys' com 'sense això' o 'tret això'. Per tant tornen a una quantitat a partir d'elements (un o uns són afegits) o d'una quantitat es lleva elements (un o uns són trets). Al cap i a la fi el pensament d'una quantitat amb els seus elements permet considerar una altra pluralitat amb els seus elements (algun nou), o una altra quantitat amb els seus elements (tot i que ha perdut algun element). Arreu sembla una reiteració de la mateixa capacitat de pensar la quantitat i els elements, i de pensar que hi ha més afers (que poden ser elements), o que es pot deixar afers (que eren elements).

§4. La igualtat.

1. Hi ha una identitat entre una quantitat de cadires i les cadires com els seus elements. Si més no la quantitat i els seus elements es deuen deixar pensar així. Es tracta de les alteracions graduals de l'ocupació, mentre hi ha la certesa i el rigor de fer la quantitat igual als seus elements.

En conjunt la igualtat és d'afers varis i hi ha igualtat de llargada o d'intensitat de color.

I també hi hauria igualtat quantitativa quan es considerés així: una qualsevol igualtat de llargada potser no és per això mateix una igualtat quantitativa, però segurament n'hi ha quan s'estima les parts de les dues llargades, en la qual cosa s'hi trobaria sens dubte una complicació entre integracions.

2. Un hom troba coses i moviments iguals, i d'altres que no ho són: en cap cas no es tracta aquí d'una discussió a propòsit si són o no

exactament iguals perquè n'hi ha prou a ser iguals i abandonar l'èmfasi.

Es pensa també en la igualtat genèrica, i cal estimar-la paral·lelament al pensament d'un qualsevol altre afer (l'home, la roca, etc.).

En efecte no es promou una investigació exacta pel fet que es consideri això o allò iguals, o per una igualtat genèrica, sinó per una cerca activa en dos objectes o moviments perquè s'apropin a ser iguals en més aspectes (la igualtat es troba en el que es palesa igual, i no en allò que encara no ho sembla).

La igualtat és, en els afers varis, una relació i cal interpretar-la en aquests termes. Poc o molt deu haver-hi sempre una integració quan se la constata, àdhuc fer-se quantitativa si és el cas.

La relació deu ser en conjunt una raó, però una raó no sempre és una relació. La relació sembla sols tenir compte d'unir els extrems relacionals, i res més. Si és vol així: la seva integració se circumscriu a tenir en compte l'altre extrem quan un hom s'ocupa d'un extrem.

Per això també una relació entre pensaments seria una raó mínima si no hi hagués més fonaments que donessin raó.

D'altra banda la igualtat permet algunes digressions enriquidores a propòsit que no qualsevol relació és d'igualtat. Algú podria preguntar-se com pot haver-hi una relació d'igualtat si els dos termes de la igualtat no semblen gaudir de res que els superposi. Tanmateix un hom sap que això és igual a allò, i que un elefantet d'ivori i la taula on és no són iguals malgrat la relació que hi ha.

La resposta ha de ser subtil: car representativament dues coses iguals no tenen res que pertanyi alhora a les dues. La igualtat, però, les estableix en relació, l'una integra l'altra (no la dissol), i és així com s'estima igual. La igualtat en efecte és una manera de manifestar-se els afers, no en garanteix cap exactitud (d'aquí l'esforç d'observar l'un i l'altre terme), es palesa per si mateixa en la relació i és per aquest aparèixer així que ens n'adonem. En d'altres paraules: la garantia de la igualtat es troba en la mateixa donació dels dos termes; aquests són els referents d'una relació d'igualtat: és clar que ha calgut per això que la relació pugui lliurar-se tal qual, com ho reblen els apuntaments.

La integració fa que hi hagi una implicació del terme que no s'explicita: és així com mantenim la igualtat. Per això la gran part de les vegades que expressem que dos termes són iguals descobrim mes tard que no

ho són sinó aproximadament, quan un hom s'esforça de passar d'un terme a l'altre, i d'observar-hi més detalls.

IV QUANTITAT I QUALITAT

Cal mantenir que la quantitat no sols no s'oposa a la qualitat, sinó que la pressuposa en els seus inicis. Apuntem-ne alguna referència, i comencem a propòsit que s'estima la qualitat quelcom propi d'un cos, i després esmentarem si no pot haver-hi qualitat en un moviment, o si s'hi atén un assumpte propi del moviment.

1. Primerament cenyim-nos als cossos, àdhuc a les coses en l'accepció d'objectes concrets més o menys manejables

Les qualitats sensibles ensenyen l'eficàcia de tractar els afers a partir d'alguna peculiaritat seva. Que l'estoig sigui vermell pot tenir moltíssimes explicacions, però no hi ha dubte que un hom pot diferenciar la seva vermellor del seu tacte metàl·lic: les qualitats serien dels objectes, i és permès de juxtaposar les unes a les altres, amb el ben entès que llur experiència simultània fóra allò que permet de trobar la seva unitat; el conjunt de les qualitats palesen llavors un ésser físic i cadascuna de les qualitats sensibles respondria del seu deïbit.

Les qualitats esdevindrien la manera de descobrir la realitat material: els matisos, les tonalitats, la gradació, la intensitat, un qualsevol tret que un hom pogués estimar, han de considerar-se objectius i que garanteixen la informació que lliuren.

Les concretes qualitats sensibles no oferirien certament cap motiu d'incertesa perquè lliurarien el que té la màxima certesa, allò natural.

Si l'art del pintor demana de diferenciar entre blancs varis (sembla que alguns pobles que viuen en les zones fredes del planeta ho facin també), mentre que comunament no cal, això deu palesar una diversitat d'interessos de les ocupacions. La circumstància d'estimar vermell allò que un altre ho tindria com un color específic no llevaria les conveniències respectives, ni diria res d'un caràcter convencional de les resultants de l'ocupació, quan es tracta que aquesta es capbussa en el mar de la sensorialitat, i hi apunta segons en sap d'acord amb les seves necessitats, seguint la seva capacitat, amb els marges que es

vulgui, perquè ignora una qualsevol quadratura o enfaixament, mentre cadascú s'adonaria que hi ha una perfecta univocitat en la situació donada.

Certament s'hi troba una munió d'afers: en l'òrbita visual hi ha color (i claror), la disposició de quelcom en l'espai, la seva forma, la distribució de colors en una superfície, els dibuixos que hi ha, etc.³

2. No ha d'estranyar que, així com la quantitat pressuposa la qualitat, també pot pressuposar quelcom que no és qualitatiu en l'accepció que hi ha qualitats en els cossos: car es compta moviments o, si es vol, la quantitat també pot pressuposar la mobilitat.

Un moviment no es troba en el cos al marge del que hi ha al voltant seu, ni en els altres cossos que rodegen el primer: n'hi ha gràcies al canvi constant de relació entre l'un i els altres. És un esdeveniment.

L'agulla dels segons que corre permet una distribució de parts en un tot, hi ha quantitat. Certament s'hi troba aspectes qualitius en els materials de què està fet el rellotge i també, en una accepció diferent, es palesa qualitats específiques del moviment (lent o veloç), tot plegat palesant que en els nivells bàsics la quantitat suposa també aquestes qualitats i esdeveniments.

Així mateix rebla el següent: que, més enllà de les qualitats de les coses, l'ocupació individualitzadora permet prosseguir una quantificació tant a partir de les coses amb les seves qualitats com a partir dels esdeveniments.

3. Aquests trets qualitius de les coses i allò que pot singularitzar el moviment estan dins del que un hom pot estimar un elements o una quantitat, quan es considera quelcom natural.

En efecte la cosa no pretén que l'ocupació se circumscriui a un vermell, o a una experiència tàctil, perquè la cosa que s'individualitza és allí donada, amb tot el seu color, la seva duresa, la seva flaire (si cal), etc., però ara no es capfica perquè sigui verda o groga, dura o

³ A *Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl. Part primera: La tesi de l'actitud natural i la seva desconexió* (Quaderns de Filosofia 12) es tracta amb una mica més de detall l'objectivitat dels afers qualitius.

tova, etc., sinó perquè es pren tal i com és, amb el conjunt de la informació qualitativa que n'hi hagi. No és el moment d'atendre aquesta o aquella qualitat, sinó allò que aquesta i aquella qualitat permeten també de copsar conjuntament.

Un hom podrà fer la ficció que l'individualització (i la quantitat després) no tracta de les qualitats, mentre que cap ficció li permetrà de pensar que una qualitat és independent de les qualitats percebudes. Llavors estimaria que el fet que no s'esmenti la qualitat basta per a concloure que les quantitats no es refereixen en origen a quelcom bastit per qualitats.

Tanmateix àdhuc el moviment palesa que no té lloc al marge de totes les qualitats del mòbil i del mitjà circumdant, pressuposa l'esclat acolorit i vari del que és qualitatiu, a més a més de les seves característiques pròpies. El moviment com un tot, o alguna part seva, qualsevol individualització doncs, es fa impossible sense això, fins i tot quan no se l'atén com a afer explícit.

Potser hi haurà algú que hi afegiria algun esclariment com segueix: la quantitat fa referència a quelcom dels afers naturals, però hi ha hagut una abstracció que en deixa tot allò que és qualitatiu. Malgrat que aquest discurs pot matisar-se de maneres vàries, sembla que hi introduiria unes virtualitats que no són la presència material de les coses, i els genèrics corresponents que hi han de remetre quan se'n vol donar raó. L'univers de les coses percebudes i de moviments determinats seria el lloc de remissió d'un qualsevol genèric: allò que vulgui ser originàriament la quantitat no sembla que pugui tenir més privilegis.

Qualitat i quantitat no podrien esdevenir doncs afers enfrontats quan un hom ho avalua en llur particularitat, sinó punts de mira que es pressuposen: una qualitat no sols no impedeix una qualsevol individualització en el seu si, sigui de cosa o d'esdeveniment, sinó que pot oferir-se per a una quantificació – una quantitat concreta necessàriament es fa des de quelcom amb colors, amb resistències, amb gustos, amb contrastos, etc., o si més no amb alguna qualitat. Qualitat i quantitat són en origen determinacions vàries de l'ocupació: l'una i l'altra hi són perquè un hom s'ocupa pluriformement dels afers, i no perquè hi hagi nivells diversos en quelcom perceptiu, ni

desconsideracions de cap tipus, talment com ocorre amb l'aigua de la platja, que pot contemplar-se des de diferents punts de mira.

V

LA UNITAT I EL NOMBRE

La presentació de la quantitat i de la circumstància rellevant que en els seus orígens està expressant l'ens ha de deixar ara pas a allò que fa referència al nombre i a esbrinar com ha estat possible de poder-lo trobar arreu.

§1. La unitat.

1. La individualització no es independent d'allò que s'individualitza: aquest elefantet d'ivori, aquest moviment. Sens dubte una manera de fer referència de quelcom concret és l'ésser. Un hom s'ocupa en qualsevol cas d'éssers. Aquests fan referència d'afers que són allí, suposen un dèbit.

Una individualització és d'un ésser. Hi ressona l'antiga doctrina que fa de l'ésser i de la unitat transcendents.

També aquí, seguint Aristòtil, cal tenir, en un altre sentit, la individualització a tall d'una unitat quan un hom vol fer-ne, d'aquella individualització, l'origen del nombre.

Però això permet consideracions en la direcció del nombre.

Si es pren aquesta direcció, llavors sembla fàcil d'admetre que un, com a principi del nombre, ho és quan es vol enumerar, en l'accepció d'atendre un per un els elements d'una pluralitat, les coses que formen un conjunt, una sèrie, etc., o vol comptar-les.

Un té en compte doncs sempre quelcom precís, aquest ésser.

2. L'elefantet d'ivori, l'oscil·lació del pèndol, permeten la respectiva individualització en ocupar-nos-en.

No se'ls predica l'ésser, sinó que el palesen.

Quan els penso (o els expresso) com a éssers no els penso (o els expresso) com a elefantet o com a oscil·lació. Tanmateix no hi puc pensar res que no suposi aquest elefantet o aquesta oscil·lació; pensarlos com a éssers és fer-ho en el seu dar-se gratuït, un treball de l'ocupació, que permet també ocupar-se'n com a elefantet d'ivori i com a oscil·lació.

Un hom s'ocupa de l'ésser pel fet que s'admira del dèbit (un apuntament), com si la subjectivitat l'estranyés. Llavors és un perquè se'l circumscriu, i elefantet o oscil·lació per les singularitats que els éssers i les unitats inclouen. Es tracta sempre de tenir present el particular, i de respectar les alteracions del cas de l'ocupació d'un ésser particular, de la seva unitat, de les seves característiques.

Si es vol així: deixant el genèric, l'ésser és sempre particular, i hi ha una singular diferència, que és aquella que separa l'elefantet-ésser o l'oscil·lació-ésser dels altres éssers.

Per tant la sort d'aquest ésser és la de la seva unitat. La unitat de l'elefantet és diferent de la unitat d'un altre afer, i també és diversa de la unitat de l'oscil·lació (òbviament un elefantet d'ivori pot ser igual a un altre: una unitat igual a l'altra).

Cada individualització és una, i alhora cada unitat és diferent d'una altra.

La universalitat de l'ús d' 'u' no lleva el fet de la diversitat del que s'individualitza.

Per això, en pensar l'u o la unitat independentment del cas particular, allò que es fa rau a pensar la mateixa individualització que suposa allò pensat quan es pensa la unitat o l'u, quelcom versemblantment prou imprecís, però que permet aquest nova individualització. I sempre pot exemplaritzar-se de nou en un qualsevol afer natural o imaginat.

§2. Noció de nombre (cardinal).

1. Les consideracions a propòsit de la pluralitat porten a apuntar que, com n'hi ha un, d'element (una cadira), així n'hi ha dos (dues), mentre dues es diu de la individualització corresponent. Però dos va després d'un i sols perquè va després d'un és dos.

Certament dos no prejudja que hagi de mantenir l'ordre dels elements. Un hom podria ben bé haver començat per aquest dos, que llavors seria u, i l'altre seria dos.

Per tant dos suposa que abans n'hi hagi hagut un. N'hi ha dos perquè he comptat l'un i l'altre. He arribat a dos.

He comptat fins a dos. Immediatament puc pensar en una quantitat de dos. No es tracta de cap síntesi, sinó d'una ocupació pensativa a propòsit d'haver-hi una integració, es pensa en un tot de dos.

El fet d'arribar a dos pot palesar doncs una tal individualització, que segueix la d'u – o pot fer pensar en una quantitat de dos.

En principi del fet de comptar expressaria la primera acció.

Dos seria un nombre cardinal, però, com a expressió d'una individualització que segueix una primera, i com a expressió d'una quantitat de dos.

Després de dos, n'hi haurà tres, quatre, i d'altres.

¿És la unitat un nombre? Depèn si un hom estima que el nombre hagi de contenir quantitat o no. En el primer cas no ho seria. Sigui com sigui és el principi del nombre i de fet la cosa o l'esdeveniment és un, en aquesta accepció, perquè un hom vol comptar i expressar nombres.

2. Quan un hom pensa en dos al marge d'un qualsevol cas particular no sembla que pensi en res especial, i més aviat hi ha una certa perplexitat. L'adult sap comptar, però ho fa sense que calgui pensar-hi res en dos, i quan atén el que expressa (dos) fa com sempre: una consideració representativa integradora. En efecte «dos» pot pensar-se a tall d'un genèric, del qual donen raó, per exemple, dues taronges o dues pomes. Però tal qual no pot pensar en gairebé res més enllà del fet de saber utilitzar el mot, no hi ha en aquest ús cap raó.

I això es perllonga per un qualsevol altre nombre. Tanmateix són nombres – en direm quelcom en tocar la formalització – no perquè un hom se sàpiga la sèrie formal numèrica, sinó perquè un hom pot comprendre'ls com a individualitzacions i quantitats. No es tracta certament que els nombres grans puguin interpretar-se a tall d'un immensa integració com si l'ocupació en fos capaç de mantenir-la, sinó de la possibilitat d'interpretar la unitat dominat (la del compte que s'expressa) seguint l'anterior, àdhuc imaginant-ho, si fos els cas, i de la corresponent quantitat.

3. Per tant un hom ha après els noms dels nombres i els simbolismes amb els quals els escrivim.

Aquí som deutors per totes bandes del que ja hem fet abans i que ara no es manté integrat, però que permet que compreguem què hi ocorre. Perquè si, de papers, n'hi ha tres, potser encara un hom hi integra l'u, el dos, i ara el tres. Però no sembla versemblant de dur molt més enllà una tal integració, malgrat que comprenem que el següent paper serà el quatre, i després vindrà el cinc. Mentre deuríem practicar de petits una vegada i una altra el domini de xifres i d'integracions de dos o tres elements, és possible que tot plegat anés a parar a l'obvietat de les enumeracions de l'adult; i que la comprensió de la seva activitat convidi a tenir present l'adquirit, les aportacions en l'ocupació d'allò que fa comprendre el que es fa, o que permet dur a terme un comportament.

§3. Noció de nombre (ordinal).

La cardinalitat descabdella la prossecució del nombre sense que consideri rellevant l'ordre d'individualitzacions mentre s'hi compti cadascuna, i hi hagi la corresponent quantitat.

Ara bé: el nombre ordinal posa en relleu l'ordre d'individualitzacions, que no és indiferent, mentre manté una seqüència d'enumeració.

Una segona característica apunta que, mentre hi ha un repàs ordenat d'un a un dels elements, exclou la integració quantitativa. El nombre ordinal és una individualització ordenada

I llavors els nombres ordinals van essent els nombres dels diferents individus ordenats.

Un hom podria dir que el nombre ordinal es redueix a fer allò primer del nombre cardinal, el compte (l'enumeració), i a respectar l'ordre que ha seguit.

§4. Unes paraules de Brunshvicg.

Sis o deu són nombres a interpretar tal i com s'ha defensat dalt: en voler fer referència precisament a la sisena unitat, malgrat que hi

hagi les altres, s'usa un mot *ad hoc* o el nom d'aquesta unitat amb alguna modificació (és a dir, el mot de l'ordinal o el mot del cardinal amb article).

Observi's que l'ordinalitat també admet que se la pensi com un conjunt (els sisens, etc.), però en aquest cas no s'ha après a quants individus correspon.

Amb el que s'ha anat indicant es pot interpretar fàcilment les paraules de L.Brunschvicg quan defensà que «*no hi ha ni nombre merament ordinal, ni nombre merament cardinal. Una col·lecció que es dóna en bloc a la percepció com un tot indivisible no és un nombre; no esdevé un nombre sinó quan es distingeixen els diferents elements per a ser enunciats, això és quan l'esperit és capaç de fixar-se successivament en cada unitat. I a la inversa, una sèrie d'unitats que desfila davant l'esperit no esdevé nombre sinó quan s'assigna un rang a cada unitat, això és quan intervé el pensament per tal d'introduir en la idea de la unitat que passa la idea de les que han precedit, quan pot convertir per consegüent la successió en simultaneïtat. El rang de la sèrie i la xifra de la col·lecció podran utilitzar-se, l'un a part de l'altra, en els judicis ulteriors quan es tracti de passar del domini de l'aritmètica a les aplicacions empíriques que comporta, quan calgui determinar el lloc d'un element en un sistema ordenat o fixar la part dels elements en un grup donat. Però si sols es vol retenir la concepció científica per desenvolupar-ne íntegrament el contingut i definir-ne el principi, llavors és impossible de separar l'ordinalitat i la cardinalitat – la sèrie dels actes successius pels quals l'esperit recorre cadascun dels elements, i la síntesi que arreplega aquests actes diversos en la unitat d'un objecte intel·lectual. Un signe com 5 bastarà per a expressar la noció numèrica; però caldrà traduir-lo explícitament per una fórmula tal com: primer i segon i tercer i quart i cinquè, això fa cinc. La captinença característica del pensament encara és aquí una relació de correspondència: la correspondència entre la repetició de l'operació enumerativa i la representació de la col·lecció així formada*»⁴.

⁴ Léon Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique* (1912), A.Blanchard, París, 1972, pàgs.478-479.

VI LA FORMALITZACIÓ

La circumstància d'un tractament formal en l'aritmètica, tal i com s'esmentarà en els dos primers paràgrafs, no s'ha de confondre amb el fet que s'hagi pogut defensar que la teoria numèrica treballa amb xifres que tenen, per exemple, la forma de 1.

També s'ha de diferenciar una cosa i l'altra, i el fet que en prou contextos s'entén la formalització com l'exposició dels afers seguint els mètodes lògics, per exemple de la lògica d'enunciats i de predicats.

I encara basteix una altra qüestió diversa que un hom vulgui axiomatitzar un saber, es faci a través de la formalització lògica o deixant-la de banda.

Sigui com sigui es pot parlar del càlcul aritmètic com un càlcul formal, i de l'aritmètica com un saber formal, en el sentit que hi ha un procediment autònom d'operar amb els nombres (genèrics) i les seves quantitats (genèriques).

§1. El nombre formal és el genèric.

És el moment d'insistir que el fet que hi hagi dos papers palesa que s'integra, i que ha anat rebent la corresponent individualització; dos ocells fan també la seva respectiva integració, etc. Ara bé: entre dos papers i dos ocells no hi ha res dels uns que se superposi damunt dels altres; no hi ha cap coincidència pel fet de ser dos: la individualització manifesta l'ens natural, el posa en relleu, i la circumstància de fer-ne un compte no altera els fets.

Certament entre dos papers i dos ocells hi ha una relació. Quan es repassa cadascun dels papers, i n'hi ha dos, i cadascun dels ocells, i n'hi ha dos, un hom relaciona l'una raó i l'altra sense cap dissolució de res. Hi ha un paral·lelisme d'estructures, si és vol així, que no és una relació d'igualtat (sols ho seria quan fos el cas). D'altra banda ja vam indicar que els genèrics no suposen tal qual cap racionalitat. «Dos» es pensa així, malgrat que dos ocells o dos papers en donin raó.

Això vol dir que, en pensar en dos, un hom no hi pensa cap estructura (per a fer-ho caldria deixar el genèric i anar al particular), ni una relació d'estructures (sempre particulars). «Dos», com tot genèric, té un contingut específic, se sap què es pensa, i aquí no hi ha un afer de raó.

Versemblantment els genèrics deuen el seu contingut dels particulars sense que hi hagi necessitat de recercar com ha estat això possible, quan més aviat caldria sospitar d'alguna mena de resta deixada pel nostre contacte directe amb les particulars. Sigui com sigui «dos» mai no és una mera forma, sinó una forma amb significació quan algú s'expressa.

I així, mentre dos papers i dos ocells són desiguals, la circumstància de pensar en dos, al marge d'un qualsevol particular, fa mantenir el pensament en un nivell genèric (significatiu), i en aquesta accepció es pot parlar que hi ha una expressió formal (significativa).

Hi ha doncs un i dos (genèrics), i hi ha un paper i dos papers, així com un ocell i dos ocells. El genèric no pensa particulars, ni estructures (ni les relaciona). Tot es manté tal que és: els genèrics al seu nivell, les quantitats particulars al seu, les relacions particulars a continuació. I certament el particular dóna raó del genèric: un ocell a un, dos ocells a dos.

Es pensa en un i dos (genèrics), i es fa tenint present quelcom específic en cada cas (un, dos), i alhora irrepresentat. Es tracta d'un contingut significatiu, que es diu obvi pel fet que es torna als particulars que en donen raó, i que sols un hom s'hi manté quan ho vol atendre al marge de la natura, sense que, és clar, en pugui donar raó.

Sabem que no perllonguem molt enllà la integració d'elements: hi ha tres papers i tres ocells, i el genèric «tres». L'enumeració de particulars, i la corresponent quantitat, palesa el pòsit que hi ha en l'activitat, en l'accepció de quelcom passiu adquirit que permet comprendre el fet que hi hagi quatre papers i quatre ocells, cinc papers i cinc ocells, etc., on la relació entre els uns i els altres es valdria d'unes integracions que ja incorporen allò que fa comprendre la situació. Aquest procés s'engreixa amb el dels genèrics corresponents, de manera que hi ha un encreuament de les circumstàncies que permeten de comprendre un nombre i el fet d'haver-hi genèrics: l'un fet i l'altre faria que, des de petits, anéssim adquirint el domini del compte i la

destresa de simbolitzar un qualsevol nombre. Tot plegat porta fàcilment a operar amb genèrics i a la confecció de regles.

§2. L'extensibilitat de l'aritmètica.

L'aritmètica va mantenint el seu descabdellament formal, amb una significació genèrica numèrica i amb una significació genèrica de la quantitat, i es permet moure's a diferents nivells: pot recórrer, quan convé, a allò que dóna raó de quelcom (particular), es col·loca en el formal (genèric), descabdella un càlcul, repassa la formació dels nombres i de les operacions, i d'altres afers.

D'on s'extreu doncs l'extensibilitat de l'aritmètica, la seva universalitat d'aplicació en diferents camps naturals quan és el cas que no se circumscriu al particular, i a les relacions particulars, i desplega una operativitat a partir d'uns nombres genèrics amb un específic contingut?

La resposta es descabdella a la mateixa manera que ho hem fet per a un i dos.

D'una banda l'aprenentatge inicial al nombre i a la quantitat es fa a nivell particular. És així com, de nens, hem après els nombres, les operacions elementals (suma, resta, multiplicació i divisió), també les bases de les fraccions i potser alguna cosa més. D'una altra hem adquirit el domini de tot això i ho perllonguem en diferents càlculs i regles.

Ara bé, el nombre formal o genèric gaudeix de la seva significació, i el saber dels nombres formals o genèrics, del càlcul, de les regles autònomes de formació de nombres i de tota mena d'operacions, no destorba que un hom sap què fa, en qualsevol moment pot exemplificar-se quelcom d'un qualsevol compte, àdhuc imaginant-ho, de manera que hi ha alguna transversalitat entre tot allò que és formal i autònom cap a algun afer particular.

Aquesta transversalitat, la pot perllongar a propòsit de molts afers, àdhuc pot recordar com ha après els nombres particulars i les operacions particulars, i de fet són aquests particulars que donen raó del genèric en els nombres i en les operacions. Alhora allò que s'ha

anat descabdellant com a càlcul i autònomament s'ha basat en el que s'ha après abans.

Això vol dir que qualsevol certesa aritmètica remet al cap i a la fi a allò particular.

Tres ocells i dos ocells fan cinc ocells.

Tres papers i dos papers fan cinc papers.

Les seqüències particular no són iguals, i el genèric «tres i dos fan cinc» rep una raó de la primera seqüència i rep una raó de la segona seqüència. Tanmateix cap no es dissol en cap, no hi ha superposició.

Nosaltres podem mantenir la relació entre la primera suma i la segona: unes seqüències racionals entren en raó respecte d'unes altres seqüències racionals. Però tot plegat s'esvaeix, la racionalitat del conjunt esdevé massa detallada: per tant no sembla possible de portar a col·lació una nova suma particular a integrar alhora amb aquestes sumes particulars. Tot i això nosaltres *compremem* que és possible una altra suma, i quan ens sembla que podem reiterar-les indefinidament (una intenció de fer una suma alhora intenció de continuar-ho sense aturar-se).

L'extensibilitat de les bases de l'aritmètica es comunica a allò que s'ha après i, comptat i debatut, a tota l'aritmètica. La seva universalitat prové que, a més del seu càlcul i autonomia, d'una qualsevol concepció formal del nombre i de la quantitat, és possible sempre alguna transversalitat circumscrita de quelcom numèric particular, que dóna raó del seu genèric i que és una afer diferent.

També caldria també interpretar la formalització de l'aritmètica així: allò que s'abasta de formal, d'autònom i de càlcul, en l'aritmètica, a l'hora de tenir-ho en compte en un qualsevol afer de les coses i dels esdeveniments de la natura, es podria interpretar com si es tractés d'un treball particularitzat del conjunt dels fenòmens naturals en qüestió en el sentit de ser els únics considerats, i els quals permetrien les quantificacions respectives, els nombres, i els passos particulars, des dels quals un hom podria passar als genèrics corresponents, a l'estudi formal i als descabdellaments autònoms que menarien al domini de totes les operacions de l'aritmètica i, en conjunt, al càlcul.

§3. La teoria numèrica de les xifres.

Malgrat que, al costat del seu ingent treball, no deixa de ser gairebé una anècdota la seva concepció material dels objectes de la matemàtica, val la pena de recordar que David Hilbert defensà que els objectes materials, és a dir, extralògics, de la matemàtica són quelcom precis, immediatament accessible a la intuïció.

L'autor en efecte es desmarcà del logicisme en afirmar que *«Kant ja ha ensenyat – i això constitueix certament una part integrant de la seva doctrina – que la matemàtica disposa d'un contingut garantit independentment de qualsevol lògica i per tant que mai dels mais no pot fonamentar-la sols la lògica, per la qual cosa els esforços de Frege i de Dedekind havien també d'anar-se'n en orris. Més aviat està ja donat quelcom en la representació com a condició prèvia de les aplicacions de les inferències lògiques i de l'exercici de les operacions lògiques: certs objectes concrets extralògics que estan allí d'una manera intuïtiva, com a vivències immediates prèvies a qualsevol pensament. Si les inferències lògiques han de ser assegurades, llavors cal examinar perfectament aquests objectes en totes les seves parts, i llur aparició, llur diferència, el fet de seguir-se els uns als altres o de trobar-se arrelgats els uns al costat dels altres, es donen així mateix d'una manera intuïtiva immediata amb els objectes, com quelcom que no es deixa reduir a una altra cosa o que no necessita una reducció. Aquest és el punt filosòfic bàsic que mantinc com a necessari per a la matemàtica i en general per al pensament, per a la comprensió i per a la comunicació científics. I en especial en la matemàtica els objectes de la nostra consideració són els nombres concrets mateixos, la forma dels quals, d'acord amb el nostre punt bàsic, és immediatament clara i reconoscible»*⁵.

⁵Über das Unendliche, pàgs.170-171. a *Mathematische Annalen* vol.95 (1926), pàgs.161-190. Conferència pronunciada el juny de 1925 en les sessions organitzades per la Societat Matemàtica Westfaliana a Münster i.W. en honor de Weierstrass.

Aquesta concepció es retroba a les *Grundlagen der Mathematik*, una obra que cerca la formalització (lògica) de la matemàtica i llur axiomatització. Car en parlar d'aquest formalisme cal distingir entre els objectes extralògics, que són els objectes de la nostra experiència immediata, i l'aparell lògic gràcies al qual, per exemple, és possible de bastir l'axiomatització d'una disciplina, això és, l'ús d'un sistema de fórmules amb una interpretació, sistema a partir del qual parteixen les corresponents proves.

Entrem doncs en el primer punt, el dels objectes matemàtics, aquí els de la teoria numèrica, tal i com seria possible de descabdellar-los independentment d'una axiomatització definitiva i d'acord amb les representacions d'una experiència concreta:

« En la teoria numèrica tenim un objecte de sortida i un procés de desenvolupament. Cal que concretem les dues coses d'una manera intuïtiva i seguint una línia. Certament el tipus particular de concreció és aquí inessencial, tot i que cal mantenir l'opció agafada al llarg de tota la teoria. Escollim doncs la xifra 1 com a cosa de sortida, i l'afegiment de 1 com a procés de desenvolupament.

«Les coses que, partint de la xifra 1, s'obtenen per mitjà de l'aplicació del procés de desenvolupament, com per exemple

1, 11, 1111

són figures de la següent mena: comencen amb 1, acaben amb 1; a cada 1 que no constitueix el final de la figura, el segueix un 1 afegit. Per tant s'obtenen per mitjà de l'aplicació d'un procés de desenvolupament, per mitjà doncs d'una construcció concreta que arriba al final, i per això aquesta construcció s'anul·la també pas a pas per mitjà d'una desconstrucció.

«Aquestes figures constitueixen una classe de xifres; aquí volem usar el mot "xifra", simplement, per a assenyalar aquestes figures.

«Quant a la naturalesa figurativa exacta de les xifres, pensem, com és usual, que hi ha un cert marge de llibertat, això és, cal que no entrin en consideració les petites diferències de faïçó, tant quant a la forma de 1 o a la seva mida, com quant a la distància a la qual col·loquem un 1. Allò que tenim com a essencial és sols que tant en el 1 com en l'afegiment gaudim d'un objecte intuïtiu que es pot reconèixer d'una

manera unívoca, i que puguem examinar sempre en una xifra les parts discretes a base de les quals està constituïda.

«Al costat de les xifres introduïm també uns altres signes, signes "per a la comunicació", que cal diferenciar de cap a cap de les xifres que constitueixen els objectes de la teoria numèrica.

«Un signe per a la comunicació és també, pres per si mateix, una figura, de la qual pressuposem igualment que es pot reconèixer unívocament i que no depèn de petites diferències en la faïçó. Dins de la teoria, però, no fem pas aquell signe l'objecte de les consideracions, sinó que constitueix aquí un mitjà per a la formulació breu i clara de fets, afirmacions i supòsits.

«Usem en la teoria numèrica les següents classes de signes per a la comunicació:

1. Lletres gòtiques petites per a designar qualsevol xifra no concretada;

2. Els nombres usuals per a l'abreujament de xifres determinades, per exemple 2 per a 11, 3 per a 111;

3. Signes per a certes accions que duem a terme amb les xifres, i per a certs processos constitutius pels quals guanyem unes xifres des d'unes altres donades;

4. El signe = per a comunicar la igualtat figurativa, el signe \neq per a comunicar la diversitat de dues xifres; el signe $<$ per a designar la relació de quantitat (que encara hem d'esclarir) entre signes numèrics.

5. Parèntesis com a signes per a la manera en què els processos se succeeixen els uns als altres, quan això no és clar sense més.

«Com s'opera amb els signes introduïts i com cal fer-hi entrar consideracions fecundes, ho veurem de la manera més clara si descabdellem una mica la teoria numèrica en els seus trets cabdals»⁶.

Una vegada acabat l'esbós de la teoria numèrica des d'un punt de mira no axiomàtic afegeix:

«Basti això per a la caracterització del tractament elemental de la teoria numèrica. L'hem descabdellat com una teoria de les xifres, per

⁶ David Hilbert i Paul Bernays, *Grundlagen der mathematik*, vol.I, Springer, Berlín, 1934, pàgs. 20-22. La redacció del treball, tanmateix, és de Bernays.

tant d'una certa classe de figures especials simples. La significació d'aquesta teoria per al coneixement es troba en la relació de les xifres amb el propi concepte del nombre (Anzahl-Begriff). Aconseguim aquesta relació de la següent manera:

«Tinguem davant un tot concret (i en qualsevol cas finit) de coses. Col·loqui's una darrera de l'altra les coses del tot, i adjunti-se'ls, seguint la sèrie, les xifres 1, 11, 111, ... com a números [Nummern]. Quan ja no tenim cap cosa més, haurem abastat una certa xifra n. Així aquesta xifra es determina primerament com a nombre ordinal [Ordinalzahl] per al tot de coses en la sèrie escollida.

«... podem adjuntar-la [i.e. la xifra n] en aquest sentit al tot com el seu nombre (Anzahl). Diem que el tot consta de n coses»⁷.

La circumscripció de la teoria numèrica a partir de xifres exemplaritzada doncs a través de la sèrie 1, 11, 111, 1111, etc., de Hilbert l'enumeració.

En efecte aquestes xifres serveixen d'exemplarització de les respectives individualitzacions dins d'un joc d'elements i quantitat. El text va afegint 1 per a cada xifra, de manera que cada xifra conté tots els altres 1 de la xifra anterior i un 1 més. Som exactament allò que un hom fa, per exemple en 1111, amb 4.

Tanmateix no sembla ben trobada la qüestió d'adjuntar un reguitzell de coses i la corrua de xifres, cadascuna de les quals contenint un 1 més que l'anterior xifra: cada cosa hauria de treballar com un 1, per tant sembla que cap hauria d'anivellar-se més que amb un 1.

L'inconvenient queda resolt, és clar, gràcies als nombres usats per a l'abreujament de xifres determinades⁸.

⁷ Ídem, pàgs.28-29.

⁸ Reproduïm gairebé literalment el text.

Nosaltres mateixos hem defensat que el nombre usual és si més no el formal o genèric, del qual hi ha un domini del seu ús, de les combinacions amb els altres nombres, i no deu perdre mai algun supòsit de la quantitat, per tant d'allò que és pròpiament numèric. També: el nombre particular compta (no certament com a abreujament) 1111, i dóna raó del genèric.

El text rebla per tant que el nombre fa referència en els seus orígens a les relacions entre quantitat i elements, i que cal escorcollar això en quelcom lliurat a l'observació.

§4. Nota sobre la lògica formal i els nombres.

L'equipament d'una exposició dels nombres amb les lògiques formals pel cap baix complica tant el procés del seu descabdellament com una possible (i segurament desitjable) axiomatització de l'aritmètica. Però, donat que els autors que les assumeixen estan pensant sovint en quelcom ja formalitzat *en una accepció comuna* (és a dir, un hom «ja sap» els nombres, «ja domina» la majoritat i la minoritat, etc.), en principi la superposició de la lògica matemàtica als corresponents afers numèrics hi introduiria maneres de manipulació dels nombres, quelcom si més no sempre legítim, però de vegades no avantatjós⁹.

D'altra banda la preocupació que els sistemes formals no menin a contradiccions, que hi hagi *Widerspruchsfreiheit*, és quelcom que sols es pot anar assegurant a través del descabdellament discursiu d'una disciplina, quelcom si més no emparentat amb les consideracions de Hilbert sobre la verificabilitat d'una fórmula i la seva falsedat, i sobre la deductibilitat, sols que la no contradicció d'un sistema és quelcom que es va trobant, alhora que qualsevol axiomatització, en direm de seguida quelcom, és una manera d'anar presentant l'estat d'una disciplina: es pot tenir doncs problemes sense resoldre, canviar les presentacions, etc., i arreu és vàlid que no interessa tant mostrar que un hom no es contradia – afer que no ho ensenyarà res si un hom no ho reconeix sobre el procés de pensament – com avançar en el descabdellament de la disciplina¹⁰.

⁹ Una avaluació de les lògiques formals des dels pressupòsits que es defensen aquí es trobarà a *Entre les raons bàsiques i els pensaments genèrics* [2^aedició] (Quaderns de filosofia 27).

¹⁰ Recordi's que el treball de Gödel «*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*» [1931], tal i com el seu autor ho defensà encertadament, val per als sistemes esmentats en el títol, això és, sistemes que mantenien el logicisme. La teoria de Gödel es presentà com una sorpresa (i un escàndol) *per a la lògica que afecta una extrapolació indefinida* (serví de crítica «interna»).

§5. Nota sobre l'axiomatització de la teoria numèrica.

L'axiomatització d'una disciplina formal palesa la coherència de l'estudi de la disciplina. És part del saber i cal valorar-la com un intent d'ordenació d'allò que s'ha après, que pot permetre després variants i tot, que possibilita la recerca i la troballa de nous camps d'investigació, i que en conjunt és útil per a plurals afers. En qualsevol cas la crítica a alguns formalismes axiomàtics no prové del dret indiscutible a les més diverses presentacions, sinó a la inoportunitat d'introduir artificiosament nous problemes.

Nosaltres mateixos podríem interpretar, per exemple, una axioma del tipus «un nombre és més petit que el seu successor», de la següent manera: en principi seria la resultant d'haver anat pensant el nombre dos (o la xifra hilbertiana 11), després tres (111), d'haver establert una colla de relacions entre elements i quantitats, de tal manera que la reiteració, la capacitat humana d'aprenentatge, la circumstància que un nombre és un dels membres en qüestió, permetrien establir «un nombre és més petit que el seu successor»; però pròpiament allò que dóna raó a un tal axioma remetria a les relacions concretes de què un hom és capaç entre dos nombres determinats, i l'axioma tal qual fóra incapaç, no sols d'explicitar aquestes relacions que li donen raó, sinó una qualsevol altra relació entre dos altres nombres determinats. En d'altres paraules: el genèric rebria una raó d'allò que li dóna raó.

Tanmateix tot això esdevé de poca rellevància des de la mateixa activitat formal que domina els nombres, llurs relacions, i que cerca constantment noves aportacions. D'aquí que una exposició de la teoria numèrica, tal com ho entenen i ho fan els manuals superiors, presentada axiomàticament o sistemàticament, evita amb encert la discussió d'afers difícils i que no entren necessàriament en el descabdellament de l'aritmètica

ANNEX 1. UNA CRÍTICA LOGICISTA A L'AXIOMATITZACIÓ I FORMALITZACIÓ DE PEANO

Certament el logicisme en aritmètica gaudí de brillants avaladors. Encara es llegeix amb plaer prou dels seus escrits. Aquí en farem esment d'un per a gaudi del lector.

Havent après els nombres i llur càlcul, l'aritmètica esdevé una disciplina ordenada formal i la axiomatització n'és una presentació a partir d'unes tals circumstàncies.

En efecte un hom pot provar de recollir en fórmules precises, encadenades les unes a les altres i, a poder ser, demostrades a partir d'axiomes, allò adquirit en l'aritmètica.

No sembla, per exemple, que fos una altra la intenció de Peano en els seus *Arithmetices Principia* (1889), on assumeix una notació lògica i nou axiomes per a l'aritmètica.

De fet el mateix Peano reelaborà la seva formalització i axiomatització: al *Formulaire de Mathématiques*, vol II. (1899) §3, n'hi ofereix una altra a partir de tres nocions bàsiques (0, nombre, successor) i cinc proposicions («0 és un nombre», «el successor d'un nombre és un nombre», «dos nombres no tenen mai el mateix successor», «0 no és el successor de cap nombre», «qualsevol propietat que pertany a 0 i al successor d'un nombre que té la propietat esmentada, pertany a tots els nombres»).

S'hi ofereix una exposició axiomàtica que, com en qualsevol altra cas, demana una connivència del lector; no sembla que vulgui dir què és el nombre ni què és la unitat; la sèrie de nombres pot ser reemplaçada per qualsevol altra sèrie (mentre sigui sèrie) sense que la substitució de la sèrie natural per una altra sèrie sigui senyal d'alguna inconveniència: qualsevol cosa podria treballar com els nombres, mentre se'n tinguéssim una sèrie, mentre cadascuna posseís una marca distintiva i permetés el seu ús com a nombre, i mentre poguéssim diferenciar una sèrie així constituïda d'una altra.

A propòsit d'aquesta última axiomatització B.Russell escrigué:
«una sèrie de la forma

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

on hi ha un terme primer, un successor de cada terme (de tal manera que no hi ha un darrer terme), cap repetició, i on es pot abastar un terme qualsevol per un nombre finit de passos des del començament, s'anomena una progressió. Les progressions són molt importants en els principis de les matemàtiques. Com acabem de veure, qualsevol progressió verifica els cinc axiomes de Peano. Es pot provar inversament que qualsevol sèrie que verifica els cinc axiomes de Peano és una progressió. D'aquí que aquests cinc axiomes poden usar-se per a definir la classe de les progressions: les "progressions" són "aquelles sèries que verifiquen aquests cinc axiomes". Pot prendre's la progressió com la base de les matemàtiques pures: podem donar el nom "0" al seu primer terme, el nom "nombre" al conjunt sencer dels seus termes, i el nom "successor" al següent terme de la progressió. Però la progressió no necessita estar composta de nombres: pot estar composta de punts de l'espai, o de moments del temps, o de qualssevol altres termes dels quals hi hagi una assortiment infinit. Cada progressió diferent originarà una interpretació diferent de totes les proposicions de les matemàtiques tradicionals pures; i totes aquestes interpretacions possibles seran igualment vertaderes.

«En el sistema de Peano no hi ha res que ens faci ser capaços de distingir aquestes diferents interpretacions de les seves idees primitives. Més aviat s'assumeix que sabem què significa "0", i que no suposarem que aquest símbol signifiqui 100 o l'obelisc de Cleopatra, o qualsevol altra cosa que pugui significar.

Aquest fet, que "0", "nombre" i "successor" no poden definir-se per mitjà dels cinc axiomes de Peano, és important. Perquè nosaltres no volem sols els nostres nombres per a verificar les fórmules matemàtiques, sinó també per a aplicar-los correctament als objectes comuns. Nosaltres volem tenir vint dits, dos ulls i un nas. Un sistema en el qual "1" signifiqués 100, "2" signifiqués 101, etc., podria anar molt bé per a les matemàtiques pures, però no seria apropiat per a la vida diària. Volem que "0", "nombre", "successor", gaudeixin d'uns significats que ens permetin el compte correcte dels dits, dels ulls i dels

nassos. Ja tenim algun coneixement (prou articulat o analític) d'allò que "1", "2", etc. signifiquen, i cal que el nostre ús dels nombres en aritmètica sigui conforme amb aquest coneixement. No podem assegurar que aquest sigui el cas en el mètode de Peano: tot el que podem fer, si l'adoptem, és dir que "sabem el que "0", "nombre" i "successor" signifiquen, malgrat que no podem explicar el que signifiquen en termes d'altres conceptes simples". És prou legítim de dir això quan ho hem de fer, i en un cert punt tots ho hem de fer; però l'objecte de la filosofia matemàtica és de diferir aquest «hem» tant de temps com sigui possible. I per la teoria lògica de l'aritmètica som capaços de fer-ho per molt de temps»¹¹.

Certament Russell estimà oportú de circumscriure la unitat i el nombre a partir de la definició d'una classe de classes. I trobà una dificultat en la presentació axiomàtica de Peano pel fet que Russell perseguí la deducció de l'aritmètica des de la lògica. Un repte sens dubte admirable.

Tanmateix sabem que Peano es trobava en la direcció correcta, i que des de Gödel i d'altres la cerca d'un desplegament de l'aritmètica a partir de la lògica, tal i com ho féu el logicisme, ha esta abandonada.

¹¹*Introduction to mathematical philosophy*, Allen and Unwin, Londres, 1919 (11^a 1963), pàgs.8-9.

ANNEX 2. COP D'ULL AL CONCEPTE DE NOMBRE DES DE LES CLASSES

Sembla haver-hi alguns problemes en la noció d'unitat quan no s'atén alguna individualització, pel cap baix representable en algun nivell («així jo entenc per objectivitat una independència de les nostres sensacions, intuïcions i representacions, de les projeccions d'imatges internes a partir de records de sensacions passades, però no una independència de la raó»¹²).

Sigui com sigui la interpretació de la unitat i del nombre des de les classes, conjunts, etc., a través d'una actitud logicista, després ja superada, o com a mètode expositiu d'aproximació, mereixeria un espai considerable pel seu propi interès. Permeti's afegir sols alguna observació puntual.

L'acotació del nombre (natural) a partir de l'equivalència de conjunts o el fet de tenir-lo com una classe de classes, deixant de banda la indicació de Hume al *Treatise* I,3,1, amb els retocs corresponents, o fins i tot en marcs intel·lectuals prou diversos, entra dins de les consideracions de Cantor¹³ (*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, 1878), l'usa si més no Frege, que concep el nombre a partir de l'equivalència de classes (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884)¹⁴ –

¹² G.Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Reclam jun., Stuttgart, 1987, pàg.59; cf. també, per exemple, Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, pàgs.335-336 [*Gesammelte mathematische Werke*, Braunschweig, vol.III (1932)], que avalua així mateix l'aritmètica, l'àlgebra i l'anàlisi com a parts de la lògica.

¹³El circumloqui es deu al fet que Cantor identifica «potència» d'un conjunt i nombre cardinal, però no confon unes tals expressions amb la de «conjunt» o, com també usa, amb la d'«equivalència de conjunts», cf. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, pàg.119; *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, pàgs. 141, 151, i tot el paràgraf primer de les *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* [a *Gesammelte Abhandlungen. Mathematischen und philosophischen Inhalts*, Georg Olms, Hildesheim, 1966]

¹⁴La definició de nombre de Frege passa per les seves nocions sobre concepte i objecte; se la transcriu a tall de mostra: «L'expressió "el concepte F és

Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 1888) emprèn més aviat un camí propi¹⁵ –, i es generalitza amb Whitehead i Russell i els seus seguidors, que ho fan des d'un classes de classes (*Principia Mathematica*, 1910). Un punt i a part són els treball de Quine (*Mathematical logic*, 1940), matemàtics com el col·lectiu Bourbaki (*Théorie des ensembles*, 1939), etc.

Certament, deixant el logicisme, la introducció dels conceptes d'unitat i de nombre (natural) a partir de la teoria de conjunts o de classes pot gaudir sens dubte d'alguna utilitat en la disciplina formal.

La circumscripció del nombre a través d'una classe de classes, o d'una equivalència de conjunts, gaudeix sens dubte d'un fonament racional, que es troba en el fet de posar en relació elements únics (per a

numèricament igual al concepte G" tingui el mateix significat que l'expressió "Hi ha una referència ϕ , que coordina unívocament per les dues bandes els objectes que cauen sota el concepte F amb els objectes que cauen sota G".

Repeteix: El nombre (Anzahl) que correspon al concepte F és l'extensió del concepte "numèricament igual al concepte F"; i afegeix: "n és un nombre" tingui el mateix significat que l'expressió "Hi ha un concepte tal que n és el nombre que li correspon".

Per tant s'ha aclarit el concepte de nombre, aparentment, sí, per mitjà de si mateix, però no obstant sense falta, perquè s'ha aclarit ja "el nombre que correspon al concepte F"», Die Grundlagen der Arithmetik, pàgs.105-106 (es recomana al lector que no es perdi l'escriptura conceptual d'aquestes expressions a les Grundgesetze der Arithmetik I, Georg Olms, Hildesheim, 1962, 34-42).

¹⁵De vegades es posen en connexió els treballs de Frege i de Dedekind, però sembla que es fa amb un cert equívoc: si l'autor afirmà que «tots els sistemes infinits simples són semblants a la sèrie numèrica \mathbb{N} i per consegüent també ho són els uns als altres» (ídem, pàg.376; Dedekind treballa cabdalment amb correspondències, *Abbildungen*), per a ell el nombre aritmètic per excel·lència és l'ordinal i , «en consideració d'aquest alliberament dels elements de tot altre contingut (abstracció), els nombres es poden esmentar amb tota justícia com una creació lliure de l'esperit humà» (pàg.360), mentre que la presentació del cardinal (cf.pàg.387) sembla prou fluïxa. (Per a la importància de l'escrit tant en la investigació de principis com en la teoria axiomàtica de conjunts cf. la nota de Noether, pàgs.390-391).

la unitat), elements dobles (per a dos), etc. Sabem que una relació és una raó, i que aquí hi hauria relacions entre estructures paral·leles (un element doble amb un altre element doble, per exemple). La dificultat no rau doncs en això, que d'altra banda és el que permetria comprendre la universalitat de l'aritmètica, sinó en el fet que no es posa en relleu les quantitats particulars i els nombres particulars.

Hi pot haver en efecte motius per a preferir una altra aproximació. Per exemple, i agafant sempre com a model la unitat: (1) el fet que normalment no es creu que quelcom sigui un a partir de l'equivalència amb un altre afer o pel fet d'entrar en una classe de classes d'un únic element; l'equivalència de quelcom amb un altre afer o el fet d'entrar en aquella classe seria una condició suficient perquè s'hi pogués explicitar unitats, però no una condició necessària. (2) Un lector més conspicu afegiria que l'expressió «tots els conjunts que li són equivalents» o «una classe de classes» aparenta, sembla, que les generalitzacions tenen un abast intel·lectual considerable, quan això podria ser posat en qüestió: les formes genèriques no superen, sembla, la seva mateixa concreció. (3) La circumscripció de membres i de classes permet la respectiva individualització, i podria creure's que en això rau precisament la unitat. Si més no una nova consulta a l'obra d'Aristòtil (per exemple *Metafísica* X, 1 1052a ss.) seria segurament allisonadora. D'aquí que si la unitat i el nombre s'entenguessin des de la relació biunívoca entre els membres de conjunts tampoc no semblaria que hi pogués haver relació sense individualització dels termes, on la individualització comportaria, si convingués, unitat. S'objectaria doncs que la noció d'un conjunt o d'una classe ja és la resultant d'un treball que, entre d'altres coses, ja ha destriat allò que convé – per més que no ho reconegui; en d'altres paraules: la circumstància de no admetre la unitat (per exemple) no llevaria els fets de la individualització al lloc corresponent.

Sigui com sigui recordi's que hi ha el tractament de la teoria numèrica a partir de la teoria de conjunts com a conjunts *de* nombres – que ja ha esdevingut la manera usual de fer-ho –, que és útil i que pot afavorir la recerca matemàtica. És prou sabut que «*en matemàtiques la "natura vertadera" dels elements primitius [nombres, punts, etc.] és prou irrellevant. Des del punt de vista del treball matemàtic, fins i tot és prou natural de mantenir-los a tall d'individus elementals*» (H.-D. Ebbinghaus

a *Zahlen*); i una tal irrellevància valdria també per a la consideració de l'abast de les respostes a les preguntes què és un axioma, què és la inducció (i la recurrència), i d'altres. Perquè les exposicions dels nombres amb un llenguatge de teoria de conjunts són convencionals en l'accepció que no voler esbrinar què és el nombre.

ANNEX 3. LA INDUCCIÓ MATEMÀTICA

El següent text porta a col·lació la inducció i la recurrència, i ho fa de la mà d'un important autor, sense d'altra finalitat que la de recollir un tema comú en aquests contextos.

El gran matemàtic Henri Poincaré afirmà que: *«aquesta regla [la regla del raonament per recurrència], inaccessible a la demostració analítica i a l'experiència, és el veritable tipus de judici a priori. D'altra banda hom no podia pas fantasiejar de veure-hi una convenció, com per a alguns dels postulats de la geometria. Per què doncs aquest judici s'imposa a nosaltres amb una evidència irresistible? És que no és res més que l'afirmació del poder de l'esperit que se sap capaç de concebre la repetició indefinida d'un mateix acte des del moment que un tal acte és possible. L'esperit té d'aquest poder una intuïció directa i l'experiència no pot ser res més per a ell que una ocasió d'utilitzar-lo, i per això de prendre'n consciència. Però, direu, si l'experiència bruta no pot legitimar el raonament per recurrència, ¿passa el mateix de l'experiència ajudada per la inducció? Veiem successivament que un teorema és vertader del nombre 1, del nombre 2, del nombre 3 i així cap endavant, la llei és manifesta, diem, i ho és amb igual dret que tota llei física recolzada en observacions, el nombre de les quals és molt gran, però limitat. No podríem desconèixer que hi ha aquí una analogia sobtant amb els procediments habituals de la inducció. Però hi subsisteix una diferència essencial. La inducció, aplicada a les ciències físiques, és sempre incerta perquè es recolza en la creença d'un ordre general de l'univers, ordre que és exterior a nosaltres. La inducció matemàtica, això és, la demostració per recurrència, s'imposa contràriament d'una manera necessària perquè no és sinó l'afirmació d'una propietat de l'esperit mateix»¹⁶.*

Afegeix que un hom podria diferenciar la inducció completa (que facilitaria la propietat commutativa, valgui el cas) i la definició per

¹⁶*La science et l'hypothèse*, Flammarion, París, 1932, pàgs.23-24.

recurrència (que caldria aplicar, per exemple, a la funció $1 \times 2 \times \dots \times N$), i que d'altres matemàtics també anomenen per inducció.

Certament es fa difícil de capir que la propietat commutativa no inclogui un raonament per recurrència (en l'accepció que aniria valent per als nous casos, i que aquests podrien ser il·limitats).

D'altra banda la recurrència incideix en la intenció de prosseguir les operacions, i la inducció no suggereix tal qual una recurrència, sinó més aviat apunta el fet generalitzador. Versemblantment fóra una qüestió de matís.

Pel cap baix es podria defensar que hi ha una inducció matemàtica a nivell de l'aritmètica: les mateixes regles per a la confecció d'un nombre s'estableixen, per exemple, d'acord amb un principi inductiu. I al cap i a la fi no semblen res més que l'expressió general del que es va aconseguir a d'altres nivells bàsics.

La qüestió rau més aviat a admetre si hi ha o no un saber *a priori*. La prudència sembla suggerir que no s'afavoreix un saber per prendre posicions extremes, i que contràriament a la suposada evidència cartesiana, la conclusivitat de les ciències exactes no sembla sempre evident quan un mateix sospita del que coneix.

ANNEX 4. UN FUNCIONALISME ARITMÈTIC

L'aritmètica no és un do natural de l'home, sinó una disciplina forjada que necessita de l'ensinistrament de cada nova generació d'homes per a arribar a dominar-la. Llavors es podria arribar a concebre que allò important és sols la generació de la progressió numèrica tal i com diu P.Benacerraf:

«Per això defenso, estenent l'argument que conduïa a la conclusió que els nombres no poden ser conjunts, que els nombres no són de cap manera objectes; perquè no hi ha més raons per a identificar un nombre individual amb un objecte específic que amb un altre (no sabut prèviament que és un nombre).

«La futilitat de tractar de determinar quins objectes són els nombres deriva doncs directament de la futilitat de fer qüestió d'un nombre individual. Per als propòsits aritmètics les propietats dels nombres que no tenen el seu origen en les relacions que hi ha entre els uns i els altres en virtut de trobar-se arranjats en una progressió no gaudeixen de cap importància. Però serien sols aquestes propietats les que singularitzarien un nombre com aquest objecte o aquell altre.

«Per això els nombres no són de cap manera objectes, perquè en donar les propietats (això és, necessàries i suficients) dels nombres tu sols caracteritzes una estructura abstracta – i la distinció rau en el fet que els "elements" de l'estructura no tenen més propietats que les que els connecten als altres "elements" de la mateixa estructura. Quan identifiquem una estructura abstracta amb un sistema de relacions (en intensió [intension], naturalment, o si no amb el conjunt de totes les relacions en extensió isomòrfiques a un sistema donat de relacions), aconseguim que l'aritmètica elabori les propietats de la relació "menys-que", o de tots els sistemes d'objectes (això és, estructures concretes) que exhibeixen aquella estructura abstracta. D'altra banda que un sistema d'objectes exhibeixi l'estructura dels enters implica que els elements d'aquell sistema tenen algunes propietats que no depenen de l'estructura. I ha de ser possible d'individuar aquells objectes independentment del paper que tenen en aquella estructura. Però això és precisament el que no es pot fer amb els nombres. Ser el

nombre 3 no és res més, ni menys, que estar precedit per 2, 1, i possiblement 0, i estar seguit per 4, 5, etc. I ser el nombre 4 no és res més, ni menys, que estar precedit per 3, 2, 1, i possiblement 0, i estar seguit per... Qualsevol objecte pot tenir el paper de 3; això és, qualsevol objecte pot ser el tercer element en alguna progressió. Allò que és peculiar a 3 és que defineix aquest paper – no per ser un paradigma d'algun objecte que té l'esmentat paper, sinó per representar la relació que qualsevol tercer membre d'una progressió manté amb la resta de la progressió.

«L'aritmètica és doncs la ciència que elabora l'estructura abstracta que totes les progressions tenen en comú merament en virtut de ser progressions. No és una ciència que tingui a veure amb uns objectes especials – els nombres»¹⁷.

La inclinació de l'autor a rebutjar que els nombres siguin conjunts, per tant que un nombre tingui una significació, un objecte enllà del lloc que ocupa en una «estructura abstracta» (Benacerraf està pensant sempre en Frege), sembla que hagi pesat bastant: perquè el mateix autor parla de l'important paper de la *cardinalitat*, el fet d'anomenar amb nombres les coses, com una circumstància cabdal (això és el que l'autor creu que el separa de Quine), i que els nens aprenen, afer que ens remet a un exercici on no necessàriament es determina una estructura abstracta: fet i fet una tal estructura abstracta sembla contenir consideracions de la sèrie numèrica que un hom ha après, que s'hauria de poder explicitar, altrament semblaria impossible, per exemple, d'explicar l'origen d'aquesta estructura abstracta.

No estan en qüestió les necessitats de l'aritmètica, la funcionalitat de la qual està fora de dubte, sinó precisament una discussió de les relacions en la progressió abstracta de l'aritmètica i les altres progressions, sobretot quan s'ha posat fora de joc que el nombre tingui un objecte.

Certament el nombre de l'aritmètica es pot considerar que no té objecte en l'accepció que un hom va a parar al genèric (malgrat que

¹⁷ *What numbers could not be, a Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, 1983 2^a, pàgs.290-291.

difícilment abandona consideracions pròpies del nombre com a quantitat i d'altres). Però aquest nombre rep una raó del nombre particular, aquell que compta objectes.

Abandonant aquest camí es va a cegues. Com pot un sistema d'objectes exhibir l'estructura dels enters? Què té una estructura abstracta perquè pugui servir per a les altres? On és la quantitat en cada membre de la progressió a part de l'obvietat de seguir-ne d'altres? Per què no s'esvaeix el discurs quan dos vol dir que hi ha u i dos, i tant u com dos no són res més?

L'afer sembla circumscriure's en efecte a l'assumpció que l'aritmètica serveix, i que no cal dir-ne gaire cosa més.

Tanmateix es podria defensar que l'aritmètica no perd les seves certeses pel fet d'esbrinar el possible origen dels seus nombres, ni cap de les seves eficàcies estructurals pel fet de provar de comprendre-les.