

F. GRAELL I DENIEL

**INTRODUCCIÓ
A LA GEOMETRIA EUCLIDIANA
APUNTS PER A UNA FILOSOFIA DE L'ESPAI**

QUADERNS DE FILOSOFIA

F. GRAELL I DENIEL

**INTRODUCCIÓ
A LA GEOMETRIA EUCLIDIANA
APUNTS PER A UNA FILOSOFIA DE L'ESPAI**

36

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2025

3ª edició juny 2025

[2ª edició juny de 2022
1ª edició gener de 2013]

© F.Graell i Deniel
ISBN: 978-84-938454-5-2

www.dossier.graell
www.xtec.cat/~fgraell
www.quadernsdefilosofia.cat

E-mail: fgraell@xtec.cat

El web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb
Quaderns de Filosofia.

CONTINGUT

Pròlegs, 7.

Presentació, 8.

I. DE L'ESPAI QUOTIDIÀ A L'ESPAI PUR.

1. Cap a l'espai quotidià, 10.
2. Ocupar-ne un lloc, 12.
3. Un domini en l'estimació d'espai, 13.
4. Què és la percepció, 14.
5. El percebut suposa l'espacialitat (o l'és).
L'espai perceptiu, 15.
6. La quotidianitat de l'espai perceptiu, 16.
7. L'espai intern del cos propi, 18.
8. Espai perceptiu i espai natural, 19.
9. L'espai i l'a priori, 20.
10. Un espai antropològic, 20.
11. El llenguatge d'un mer espai, 21.

II. SOBRE LES DIMENSIONS.

1. Les dimensions de l'espai natural, 24.
2. Pel cap alt la reversibilitat forma part de l'espai natural, 25.

III. ESPAI NATURAL I ESPAI EUCLIDIÀ.

1. La implicació de l'espai en les mesures, 28.
2. El punt, 29.
3. La línia, 31.
4. La superfície, 31.
5. El límit, la figura i el cercle, 32.
6. Els sòlids, 33.
7. Llur paper en la geometria euclidiana, 34.
8. Els ens geomètrics com a límits d'un decreixement, 36.
9. Geometria i natura, 37.
10. Espai geomètric, espai natural, i mer espai, 40.

IV. LA CERTESA GEOMÈTRICA.

1. Demostració, construcció i deducció geomètrica, 42.
2. Més sobre els principis, 47.
3. ¿En quina accepció es diria que els principis de la geometria euclidiana són inductius?, 49.
4. La transitivitat de la igualtat, 50.
5. Els principis de la geometria i John Stuart Mill, 53.

Pròleg a la segona

Després de deu anys semblava necessària una relectura del treball per tal d'introduir-hi els avenços que s'ha anat abastant en els estudis. Es tracta d'un ventall de temes que fàcilment apassionen com sigui que inclouen també el de l'espai, i que calia discutir les connexions entre espai i percepció. En conjunt s'ha mantingut l'escrit com era (seccions, paràgrafs, les idees bàsiques), però se l'ha retocat intensament pàgina a pàgina: s'introdueix les darreres innovacions aconseguides, s'ha eliminat allò que era sobrer i que sols desorientava, s'ha reordenat algun paràgraf per a millorar la claredat, i també s'ha procurat fer ressaltar els aspectes d'alguna explicació que podria fer passar per alt la rellevància del que s'hi tracta.

Els petits canvis han estat nombrosos, i deuen ser els que contribueixen a fer atractiu un escrit en la mesura que fan desaparèixer allò que no contribueix a la comprensió. Alhora ha permès adequar el seu contingut al conjunt dels altres quaderns de la col·lecció, justament revisats per a trobar-los l'expressió d'una manera de considerar els afers.

Pròleg a la tercera edició

Una nova anàlisi de la percepció ha fet veure que no s'havia subratllat prou el seu espai, semblava que no fos el quotidià. El que s'hi havia insinuat podria avaluar-se irreal. La seva conversió en un espai perceptiu i una propietat més del medi duia a renovar de dalt a baix la primera secció, i d'haver de refer aquelles parts de la resta del quadern que en podrien ser afectades. La resultant es distancia més i més de les posicions transcendents i fenomenològiques.

Presentació

L'estudi dels principis de la geometria euclidiana, i del tarannà del raonament que li és propi, era una de les fites que perseguia *Lògica, llenguatge i matemàtica*, obra que ja era una resultant de redaccions anteriors. La nova presentació d'ara no fa més que actualitzar aquell treball, en manlleua parts, en reordena això o allò, àdhuc ofereix algun punt de mira potser passat per alt. Sobretot el treball es mostra molt més segur perquè els anys han permès de repassar l'horitzó on s'ha de col·locar un escrit com aquest i perquè a poc a poc sembla que es podrà anar aconseguint els propòsits dels punts de partida d'un estil de pensament, amb tota la provisionalitat i la fragilitat que es vulgui.

En efecte les disciplines matemàtiques mereixen que se les consideri un dels exponents privilegiats del que es pot fer. Car poques coses deuen provocar tanta admiració com l'ingent treball que ha comportat, el descabdellament progressiu de les diferents branques, el seu arrodoniment, i la construcció d'un edifici amb un ordre sorprenentment ben trobat.

La qual cosa provoca d'adonar-se de dues característiques: la primera, la circumstància que hi ha implicats una munió d'individus que han contribuït amb el seu esforç al progrés de la ciència, que hi han dedicat un nombre indefinit d'hores, i que els uns han fet i refet el que d'altres hi aportaven. Un treball que mena sens dubte a tota classe de mostres d'agraïment.

El segon tret es troba relligat a aquest: la dificultat de fer filosofia de la ciència; cap altre àmbit mostra haver de repensar tan pòsit intel·lectual humà com aquesta. És més: al costat del que s'ha abastat en nom de la ciència, la filosofia de la ciència, una ocupació que deu molt al tarannà d'un individu, sembla ridícula, si no il·lusòriament prepotent.

I en alguna accepció l'esforç no vinculat a una disciplina rigorosa sembla superflu i banal. Les nostres meditacions, com d'altres d'aquest caire, passaran, mentre l'home anirà conreant nous camps de

la ciència, sigui de la geometria o de qualsevol altra branca. ¿Val la pena l'esforç de comprendre una tal activitat? Potser sí, mentre hi hagi algú que es meravelli del compromís de tants i tants éssers humans en els diferents sabers, i es preguntí com ha estat possible.

I

DE L'ESPAI QUOTIDIÀ A L'ESPAI PUR

Ha d'haver-hi alguna manera d'anar des de la percepció dels tràfecs quotidians a l'espai geomètric, o si més no d'encalçar el que hi duu.

Quan s'afirma que hi ha una realitat espacial, s'hi constata en qualsevol cas una manifestació de domini en les significacions: es parla així al marge i tot d'una qualsevol representació.

I enmig de tot això la contemplació dels cels desvetlla profunditats i llunyanies.

1. Cap a l'espai quotidià.

1. L'espai quotidià no conté cap de les nostres prevencions: surto a agafar quelcom amb tota la certesa que hi ha una jardinera amb geranis que fan flors roses. Sobren les consideracions quan es tracta de moure'm per la porta i l'eixida, que palesen prou què és el real. Miro els objectes que són allí, l'espai que me'n separa: quan m'oblido una mica de la meua subjectivitat em sé més aviat ocupant un lloc en l'habitació, entre parets, arran de la porta, davant de l'eixida. L'autèntic es troba fora de mi.

No podem dir que contingui res del passat: l'experiència fa inqüestionable l'espacialitat d'arreu, i m'inclou com un cos més enmig de moltes coses.

Aquest és el genuí espai quotidià. Es tracta d'haver arribat on s'havia d'arribar, que assumim deu remetre a l'aprenentatge des de petits. Nosaltres, però, no hem de pretendre de reproduir les passes fins a l'èxit final, *sinó sols rumiar què lliura*.

2. En el dia a dia no dubtem de la realitat de l'espai. Tampoc no es troba en qüestió el mobiliari de casa, les parets, el carrer, el cel, etc., i que enmig és ple d'aire. Car gaudim d'una experiència de l'aire: aquest pot ser fred o calent, fa una certa resistència al moviment de la mà, de vegades se'l nota amb el vent, amb les olors, infla una bossa, ens és imprescindible per a respirar, etc. Manté aquesta consistència

subtil, que palesa una vegada més que no soc jo qui imposa els criteris del real, sinó que em venen donats. I uns trets prou rellevants: l'aire, fora d'alguns casos, és transparent, hi veig més enllà seu, és penetrable pel meu cos, em trasllado a l'altre cantó d'habitació sense pensar-hi, es fa escàpol quan provo d'agafar-ne amb les dues mans.

Quan allargo el braç i faig moure la mà contra l'aire l'experimento a tall de quelcom holístic, en l'accepció que, mentre el que toco és una sensació quan ho atenc amb el seu dèbit corporal, és una qualitat de l'aire quan ho anoto per a aquest¹. Alhora parlo de les sensacions articulars i motrius, quan els apunto el dèbit corporal, però passen a informació de l'aire quan les anoto pròpies de l'aire. De l'aire, en soc peculiarment conscient quan els oferiments són tan pocs (quelcom tàtil i resistent, calent o fred), i hi són, és clar, la resta d'apuntaments. Aquesta és la mirada quotidiana de l'aire, prou important, per a l'estudi de l'espai, com sigui que descabdello tota una colla de moviments corporals en una qualsevol direcció, per tant que constantment hi estic en contacte, i precisament l'espai, en una primera accepció, es diu per la penetrabilitat, transparència, de l'aire, i per la motricitat.

Tanmateix cal delimitar-ho una mica més. Quan estiro el meu braç, camino, o sigui quin sigui el moviment del meu cos, quan m'hi fixo, no sols sé de l'aire per tocar-lo o, si és el cas, per resistir-se'm, sinó que el desplegament de la meua motricitat, que en una accepció la sento i la percebo, en una altra em fa saber perceptivament precisament l'aire, com es lliura. La penetració en l'aire – els moviments del meu cos al voltant – el revela. No cal que hi hagi aquí una notícia tàtil, per exemple, i una altra que podríem anomenar motoroperceptiva: l'ocupació no té el programa de les *nostres* classificacions, pot abraçar el que sigui *sense que hi tingui rellevància distincions posteriors*. Es toca l'aire, se'l sap espacial, analitzable pel que es toca en l'ordre de la percepció i per la motricitat perceptiva.

No es tracta d'admetre que l'aire es desplegui espacialment, sinó d'assumir que, quan hom experimenta l'aire, aquest es mostra

¹ Per als dèbits extern i intern, cf. «Què és una sensació» a *Propostes en ocasió del cos i de les passions* QF13.

espacial. D'aquí que l'espai quotidià sigui primerament el de l'aire. *L'espai és allí perquè el que hi ha allí és aire.*

Què és doncs l'espai? Quelcom propi – una propietat – de l'aire, tan original com el color blanc del paper o el seu tacte. La circumstància que l'estudi analític hagi dut a classificar les qualitats, i les corresponents sensacions distribuïdes pel sentit, ha tendit a menystenir que el coneixement perceptiu ni s'hi redueix, ni es copsa com a suma de qualitats. *L'ocupació no té com a programa cap de les nostres classificacions*: l'espacialitat es revela com una manera de conèixer-lo talment com ho pot fer la transparència o la resistència al tacte, mentre l'experiència de l'espacialitat de l'aire es duu a terme quan em moc, em trasllado, i ho faig dins de l'aire.

I l'espacialitat de l'aire es troba al costat de la de l'aigua o d'un qualsevol altre medi penetrable.

Cal subratllar també que una tal propietat del medi és tan original com el blanc o la suavitat, *i que no és analitzable* (sí en parts extenses) *en l'accepció que no ho és el fet de ser blanc o suau.*

2. Ocupar-ne un lloc.

Agafó un petit elefant d'ivori a la mà. Si provo de fer-ho amb els ulls tancats hi ha una experiència concreta, fornida de les notes lliurades pels moviments dels dits, per la distància que hi ha entre el polze i els altres dits, per la pressió sobre la pell, per la resistència que hi fa, per la duresa. Una experiència única que englobaria allò que es va assenyalant, i d'altres afers, per exemple, el seu dèbit constant pel fet que es tracta d'una realitat tàctil, però prou més organitzat i conjuntat del que una qualsevol descripció podria dir-ne.

En obrir els ulls tot manté un aspecte de normalitat: la talla d'ivori segueix oferint quelcom tàctil, que ara també és visual, inseparable d'una tensió visual, dels mateixos moviments dels ulls, amb els dèbits corresponents d'una realitat visual, per tant de la circumstància que atendre visualment quelcom demana una adaptació. L'encaix de tot (aspectes tàctils, estrictament visuals, motors, etc.) es fa amb una efectivitat prou feixuga de seguir.

Sembla difícil de negar que el tracte amb l'elefantet no pugui permetre remetre a aprenentatge. Des que es neix hi hauria un exercici en molts afers a tocar, a engrapar, a moure el cos, a veure les coses, a bellugar-se de moltes maneres, a coordinar la visió, la motricitat i el tàtil. Però una conducta meva específica no reenvia a res, no informa de res més. No hi ha un resseguiment d'un cas concret que contingui tal com és cap tros d'història d'una realitat.

Allí on acaba la penetrabilitat s'esgota l'espai del medi. L'elefantet, que palesa que està rodejat d'espai del medi, marca el seu límit, talment com ho fa el meu cos perceptiu, i el conjunt d'afers que circumscriuen la meva visualitat, malgrat que ja sé que el puc remoure, l'elefantet, i que llavors hi resta l'espai.

És així com es diu que l'elefantet ocupa un lloc en l'espai del medi, o que l'ocupo jo mateix.

3. Un domini en l'estimació d'espai.

El fet que, quan hi medito, no m'estic de parlar de l'espai del medi i, d'alguna forma, de tot allò que s'hi troba, no vol dir que no domini le relacions d'espai

1. Sé la distància que em separa de la jardinera de la terrassa, d'una forma que no arriba ni a ser implícita quan no en faig qüestió, explícitament quan n'hi paro esment. Hi ha la corresponent informació, la circumstància que no es tracta d'una recreació com si les perspectives fossin infundades: si s'explicaria (per remissió) l'originalitat del saber espacial a partir de la coordinació del visual i dels moviments de trasllat en un medi, restaria la concreció de la distància on és la jardinera, l'estimació de l'espai que hi ha.

Diguem-ho amb d'altres paraules: quan miro la jardinera de la terrassa hi va havent un dèbit del mateix esguard des d'on soc fins a allí, dèbit que es troba en la visualitat amb els afers motors dels ulls, i amb allò que és propi de la seva adaptació. Certament es remet aquí a un aprenentatge: se sap veure i mirar, i on són les coses. També faig alguna remissió a una motricitat, és a dir, d'apropament i d'allunyament a quelcom, de manera que parlaria d'una coordinació entre trasllat i

visualitat (amb la seva complicació pròpia) a través del medi. Es tindria per descomptat que se sap com apropar-s'hi; tanmateix el saber quotidià de l'espai entre la jardinera i un mateix no contindria ni explícitament ni implícitament res d'això, àdhuc admetent que s'hagués anant coordinant des de petit trasllat i visualitat, afer tàtil inclòs. Llavors l'estimació d'un espai remetria a l'aprenentatge en l'accepció que tot allò que hagués pogut ser el camí que duu a aquella resultant a través del medi no hi seria més que a nivell d'una adquisició d'un cos fora de l'abast.

2. Per això, quan estic aturat no tinc l'experiència de moure'm a través de l'aire, i la relació d'espai es va determinant cabdalment, a tall d'un adquirit, per les coses que hi ha enmig, pel que copso entre la finestra i el carrer – el cel està en un lloc bastant indeterminat (per més que hi apareixen les aus, el fums, els núvols, l'horitzó, que hi orienten).

Les quatre parets, el sostre, i el terra, contribueixen a la individuació d'un espai real, que és el de l'aire, mentre se'ls relaciona.

La circumstància que aquesta és la manera de donar-se distàncies i espais vindria corroborada des de l'estudi físic i neurofisiològic, on s'hi palesaria l'adaptació de l'ull i de l'organisme cap a la llum reflectida de les diferents coses i esdeveniments a diverses distàncies.

3. M'aixeco, i llavors retrobo l'espai de l'aire per la seva resistència i motricitat perceptiva, de manera que hi va havent una orientació de dèbit extern que va confirmant la realitat de l'espai del medi que vaig creuant, tot i que de nou hagi de remetre a un cos no dat fenomènicament, precisament per l'eficàcia del meu trasllat.

Es ressegueix l'espai d'allò real del medi; hi ha el pas de la taula a la jardinera, o de la taula a la paret, d'aquí a la finestra, i miro el carrer, el cel.

4. Què és la percepció.

Se sap on és quelcom que es veu i que no és a la mà, malgrat que tot el que implica de saber-ho no s'hi trobés *representativament*, en un tal saber (es remetria a les moltes experiències visuals, tàctils, motores, a

través d'un medi, amb les coses, a la coordinació, i d'altres: per exemple, a l'importantíssim paper d'un cos no dat).

El representat es diu perceptiu per lliurar-se multifocalment (a través del tacte, de l'espacialitat, de la visió), polimòrficament i policromament (com a exemple d'una multiplicitat de tipus qualitatiu).

El cos propi en forma part. D'aquí que no sigui estrany que tot allò que fa referència a on són les coses hagi d'incardinar un context.

La multifocalitat a través dels sentits i dels moviments en un medi, la polimorficitat per allò divers que troba, àdhuc la policromia de colors, de diversitat de tactes, no farien més que descriure com es va lliurant el perceptiu, i la percepció seria la capacitat de percebre, d'assumir quelcom així, és a dir, de tal manera que s'és capaç de parlar d'una multiplicitat de qualitats i substàncies, d'espais, etc., i també, és clar, la percepció expressaria el fet mateix de percebre.

5. El percebut suposa l'espacialitat (o l'és).

L'espai perceptiu

1. Qualsevol afer percebut *se sap* a través d'un medi que és espacial: per a tocar el paper, no sols cal estendre el braç, sinó així mateix jugar amb el paper mentre es mou dits i mans. Àdhuc en la contemplació d'un edifici, hi intervé la motricitat dels ulls i del cap, la tensió del cos, a més de *saber* on es troba, a quina distància, etc.

El paper que toco (i que veig) decididament palesa amb això mateix que és suau; el tocar-lo vol dir això: el conjunt de moviments dels dits i de la mà mentre s'experimenta la suavitat. L'espacialitat està sabuda o experimentada inclosa en un qualsevol aspecte perceptiu.

Com el paper és blanc o llis, també no pot haver-hi un paper que no estigui suposant en el mateix moment alguna espacialitat del medi i que hi hagi alhora la motricitat dels ulls i de la tensió corporal.

2. Es corre, se salta, s'agafa, s'estira els braços, s'arriba als estris, s'engrapa les coses, es mira. S'hi troba l'experiència per la qual hi ha paisatges, i per la qual s'abraça una alzina, o es capbussa dins de l'aigua del mar; per la qual el capvespre s'il·lumina amb infinits colors; per la

qual m'oriento en la foscor o segueixo un perfum. I l'espai va implicant-se en tot.

Ens expressem al ritme de l'ocupació: no es pot fer *de manera que s'explicités* *ahora* prou aspectes; per això hi ha l'apuntament de l'ocupació situacionadora, que cal considerar també com a quelcom delimitador. D'aquí l'anar expressant-nos: hi ha realitat, és a dir, ésser; tanmateix la natural, l'explicitariem (si ens hi poséssim) com a quelcom amb un comportament més o menys reiteratiu, per exemple; s'hi expressaria doncs l'afer tal i com és i en una tal manera global. I llavors el percebut es lliura, atenent el que s'hi troba implicat, multifocalment (a través del tacte, de l'espai, de la visió, etc.), polimòrficament, policromament. L'espai n'expressaria una característica del medi, i experimentada sempre perquè ens hi movem, quan ho atenguéssim expressament: si no esdevé més aviat quelcom sabut sense més.

3. L'espai perceptiu s'ofereix doncs com l'espai del medi, sabut o experimentat, i ahora una qualsevol informació perceptiva està suposant el medi, que és espacial; forma part de la percepció amb el mateix títol que una qualitat, i no pot haver-hi d'altres dades perceptives que no es lliurin a través d'un medi transparent, penetrable, etc.

L'espai quotidià és aquest espai perceptiu, circumscrit per obstacles de tot tipus, però que *ahora sap* que hi ha molts afers més enllà i en totes les direccions.

Un espai per on els objectes ofereixen els seus colors i formes, el retallen: es diu que tenen un espai perquè hom els por remoure, i tot això es domina àmpliament. En *sabem* molt, de l'espai.

6. La quotidianitat de l'espai perceptiu.

Passejo pel carrer: a poc a poc vaig deixant enrere trams de voravia, els seus arbres, els vianants que xerren en grups, se'm van apropant aparadors i porteries; el cel, les façanes de les cases del fons, la calçada, van fent de marc que es modifica aquí un poc, allí gens i imperceptiblement. Penso en la complicació general que ha d'haver-hi entre el meu cos i l'entorn, però així mateix entre les diferents parts del meu cos; medito sobre la influència de la gravitació en tot això, que el

meu cos pesa i s'estintola damunt dels peus; m'adono de la interrelació entre els moviments dels meus ulls i la meua marxa. Se m'imposa arreu els edificis, els altres homes, el mobiliari urbà: *aquí no sé imaginar-me que hagi de comprendre les certes presents per d'altres experiències*; el camí que estic fent i que em permet parlar i tot d'espai (hi ha un espai), m'està lliurant una informació, on no sé veure cap rastre d'un passat en l'accepció que allò que estigui tenint ara hagi de remetre a moltes experiències.

Tota l'exploració física i neurofisiològica que hi pugui haver aquí: l'enfocament ocular, la mobilitat dels globus dels ulls, el sistema nerviós que informa del moviment dels membres, de l'estat del cos, els nervis que regeixen l'estat dels músculs, el sistema de l'equilibri corporal i de la correcció de posicions, les interdependències físiques entre l'entorn i el cos del tall de la gravitació, el contacte de l'aire amb la pell, tot això, que es pot estimar (quan sols hi ha comprensió a partir del patró de l'experiència perceptiva pròpia) com el correlat físic i neurofisiològic de l'esdeveniment perceptiu, no faria sinó confirmar a la seva manera la interrelació entre cos, medi, i les altres coses, i que si més no és la forma com hi ha la consistència d'un medi. En efecte la distància on es troben les coses i l'espai en conjunt són afers donats, i també constantment reelaborats.

Si conjecturo que s'ha hagut d'aprendre des de nens a percebre, la resultant de tot això no conté cap referència al passat, talment com la conducció encertada d'un cotxe no conté cap dels errors dels inicis en el domini del volant. Hi ha arreu una familiaritat perceptiva, però la remissió a condicions de memòria es fa des d'aquí, confirmada per tot allò que ara mateix vaig fent. És més: es podria considerar que les bases neurofisiològiques que explicarien la memòria no farien més que reblar la mútua implicació entre el cos i l'entorn, per tant que el món familiar és així perquè no és pas la primera vegada que el veig, que el vaig refent cada dia, i que el meu cos conserva quelcom codificat, fora de l'abast, de la mútua implicació en les plurals experiències.

En general cal dir que les explicacions que hi ha de l'experiència perceptiva no invaliden el seu saber, que corrobora, amb la meua conducta, un espai perceptiu; la naturalitat de les dades, el lliurament de les coses, esdeveniments, i del mateix espai; fet i fet les explicacions

físiques i neurofisiològiques també s'haurien de copsar com a explicacions a partir de l'experiència perceptiva.

És aquest espai que sé diàriament: pura transparència que em col·loca enmig d'un conjunt de coses, i que sols una consideració divagant en subratlla quelcom o prova alguna experiència que no s'hi troba, i que no n'és incompatible.

7. L'espai intern del cos propi.

Mentre s'és capaç d'individuuar un espai extern, el cos propi extern omple un lloc, que es revela espacial quan me'n vaig a un altre lloc, però tot això ja ho sé. També pot complementar-se amb les sensacions internes cinètiques i estàtiques *característiques de cada part del cos* (se sap d'un espai extern, entre d'altres motius, per aquella dimensió muscular i articular aplegada amb la tàtil, i d'altres, que fa que hagi experiència de quelcom extern – , però respecte al cos propi intern una gran part d'aquelles dades són meres sensacions), amb la sensació tàtil *de cada part del cos* (se sap que la cama és quelcom extern perquè se la veu i se la toca: però «l'espai intern» de la cama «l'omplen» també les sensacions tàctils de la cama, que no entren pas en la individuació *externa* de la cama), en un espai corporal, que conté doncs un «espai intern», que segurament sols es pot apuntar des del cos com un tot extern-intern (per exemple, des de l'espai de la cama com un tot), – fent una passa més: les qualitats² tàctils i motores de les coses externes, i degut al seu propi contingut, informen, individuades conjuntament amb afers visuals, per exemple, d'afers externs, però, les sensacions corresponents, se les inclou en la individuació del cos intern, i quelcom paral·lel es diu dels afers cinestèsics i estàtics dels membres, amb l'afegit que sols formen part de l'experiència externa conjuntament amb el tacte i la vista, incorporats en un comportament.

Mentre la informació externa organitza diferents elements de manera que hi ha un saber, no sols de l'espai perceptiu, sinó en conjunt de les coses i dels esdeveniments, les sensacions es manifestarien tal

² Els aspectes qualitatius són les maneres a través de les quals es lliura un cos natural. Són les seves qualitats. Cf. *Anotacions marginals als Principia mathematica de Newton* QF14, i *Unes distincions bàsiques* QF62.

com són i mes aviat cadascuna d'una manera característica; n'hi hauria una distribució i, en aquest sentit, una organització, però no hi hauria res comparable amb la singularitat dels esdeveniments de la percepció.

No ha d'estranyar que es *localitzi* unes tals passions, quan s'està disposat a fer-ho, en tant que esdeveniments del cos intern, per tant en un espai intern (i malgrat que hagi après aquest a partir del conjunt de l'espai del cos propi, o ho suposi).

Es localitza les sensacions tàctils, musculars, gustatives, etc., es pot gaudir, si es vol, d'un «espai intern», fent-lo sobresortir en un espai compost, i es diferencia les unes de les altres.

Al costat seu hi ha tot un material intern, prou elements del qual es troben sovint «a la seva manera» en l'experiència de cada dia, però que «informen» constantment de «l'interior» del cos. Malgrat que sols l'estudi ho permet anotar, hi ha tota una gamma sensible que s'és capaç de col·locar amb una certa precisió en el conjunt del cos, i de classificar d'acord amb les diferències: al costat de les sensacions dels membres, hi ha el seguiment possibles del procés digestiu a tot el llarg del seu trajecte, els vaivens de l'expiració, de la inspiració, i dels seus avatars, amb una informació conjunta prou específica, els batecs del cor, llurs alteracions de ritme, se sent els òrgans sexuals, s'és capaç d'apercebre el pols en les venes, i d'altres.

8. Espai perceptiu i espai natural.

El que es va dient d'un espai perceptiu es pot adjudicar a un espai natural. Si la natura expressa un saber conjunt que sobrepassa l'efectivitat d'un present perceptiu, o que permet parlar-ne al marge de qualsevol representació pròpia seva, això ho permet també la percepció; si s'hi suposa, per exemple, el coneixement del caràcter cíclic dels moviments dels astres, de les estacions, dels processos dels ésser vius, de la diversitat dels materials, etc., el dit valdria igualment referit al que es percep. I l'ús del terme «natura» s'arrela en prou usos del mot des d'antic, que l'han condicionat, cosa que no cal que afecti el seu significat.

L'espai natural és el perceptiu. No podria ser altrament quan tot el que coneixem, i en sabem de l'espai, es fa a través de la percepció, on hi

ha molt saber no efectivament present, que se'l pensa i se l'expressa de moltes formes, i que la natura inclou ja en la significació un cert comportament del que s'hi discrimina, quelcom que la consideració del perceptiu podria fer explícit.

9. L'espai i l'a priori.

L'espai *no* és certament una forma de la sensibilitat o una qualsevol altre requisit unitari d'una multiplicitat. Totes les defenses de l'espai a tall de quelcom necessari degut a unes exigències prèvies ho fan com a correlat d'un altre afer mal resolt: el d'una pluralitat elemental, les sensacions, per exemple, menesteroses d'estructures unitàries.

La consideració del que són les sensacions, que es troben més aviat com a afers del cos intern, es fa com si fossin meres entitats sense fons. La sensació ja no diu res del que deu del cos intern i, és clar, es fa omissió del dèbit natural.

Per tant o hi ha un arronsament d'espatlles o es regla la multiplicitat a partir del que hi exigeix quelcom a priori. Sembla que fou Merleau-Ponty que digué que les filosofies del concepte i de la constitució formal de l'objecte necessiten les tesis dels seus oponents, quan fan de les sensacions meres pluralitats cegues.

Ocorre que no sembla haver-hi experiència perceptiva que no reflecteixi alhora un dèbit (hi ha un fet natural que se sap per aquella experiència mateixa).

No deixem de meravellar-nos que s'hagi trasbalsat l'espai real fins al punt de dominar-lo a partir d'una condició de la sensibilitat o de la raó, tant se val. No caldria que la geometria corroborés un afer transcendental d'un espai, i d'altres interpretacions de la validesa d'aquella ciència permetrien ometre quelcom apriorístic.

10. Un espai antropològic.

L'espai que es troba a mà revela una propietat d'un medi gràcies a un cos que es troba entre d'altres cossos i coses. D'una manera o d'una altra la consideració de l'espai passa per les peripècies d'un cos que es

mou en un medi, que veu, que toca, i que de vegades no pot fer més que rumiar la distància que mai no ha recorregut.

La peculiaritat d'un espai antropològic no es trobaria sols pel fet que hi hagués espai, sinó també pel fet d'allò que l'ocupa. L'expressió agafaria una part pel tot. Provindria d'allò sentit i interpretat que els diversos llocs poden anar guanyant, i que s'explicaria per la remissió a les activitats que s'hi ha anat duent a terme, a la recreació més o menys imaginària, a les relacions personals que s'hi ha tingut, a d'altres experiències viscudes, de tal manera que el copsament d'un paratge no es faria sense la manifestació conjunta que el fa una realitat inclusiva³.

El que elucidaria que pogués gaudir d'un indret es perllongaria amb l'explicació de palesar-se inclusivament, i en ambdós casos s'hauria de conjecturar un cos no fenomènic⁴ que suposadament permetria l'experiència d'un racó, i també que el valor antropològicament.

Certament que es pot antropologitzar de moltes maneres. i com se sent i s'interpreta algun indret no lleva el fet d'haver-hi el seu espai.

En d'altres paraules: aquests racons naturals sentits i interpretats esdevenen força interessants; al cap i a la fi tinc un cos i aquest ha estat de moltes maneres a molts llocs, i no puc massa mirar els voltants sense implicar-m'hi. Un espai, amb tot el que hi ha, no competeix amb la seva realitat inclusiva.

L'espai antropològic és un indret inclusiu que es manté així⁵.

11. El llenguatge d'un mer espai.

Parlo de l'espai natural, o perceptiu, al marge d'atendre res; per exemple, en una conversa a propòsit de mides o mesures.

Quotidianament ens referim a aquest espai sense problemes perquè ja dominem els nostre trasllats pel medi, els llocs que omplen els

³ Cf. *Propostes en ocasió del cos i de les passions* QF13.

⁴ «Un cos no fenomènic»: imagino que el meu cos, que veig i que sento, es perllongaria per quelcom fora de l'abast, més enllà del que lliura fenomènicament, i faria que hi hagués en els fenòmens aquests elements cognitius o valoratius.

⁵ Unes tals realitats inclusives permeten certament d'expressar que «l'indret és molt significatiu per a mi» en l'accepció que és important per a mi.

objectes i tot el que ens rodeja, les distàncies i les maneres d'arribar-hi. El nostre llenguatge verbal a propòsit de l'espai natural o perceptiu no necessita prohibir-nos d'imaginar quelcom, sinó que pressuposem que ens referim a un saber proper.

Fent una passa més, però, podria meditar l'espai atenent exclusivament a la seva significació verbal. Llavor sembla que em podria convèncer que, expressat com a llenguatge, l'espai com a mer espai no gaudiria de cap dels trets pels quals es podria explicitar algun afer efectiu. Precisament aquesta direcció de consideracions permetria de copsar un espai sense cap concreció, de meditar l'espai com a mer espai, espai que no es concretitzaria en res (i també ho faria en tot), i se'l podria tenir com es volgués i amb els trets que li fossin adients, o incloure-hi tot allò amb què no fos incompatible.

Per exemple, permetria de titllar-lo de pur perquè no es trobaria caracteritzat per cap tret que el revelés enllaçat amb afers qualitatius; deixaria que se'l tractés d'un espai ideal perquè no es donaria fora del llenguatge que el pensa; es podria avaluar d'abstracte quan se'l copsés al marge d'una qualsevol manera de parlar de l'espai natural.

Tot i això no podria ser adjectivat d'homogeni, per exemple, sense tenir present l'espai natural des del mer espai: aquest no contindria res a diferenciar o a no diferenciar. Es diria doncs homogeni perquè se'l consideraria des d'un espai perceptiu, que es percep o que s'imagina, gràcies a la qual cosa, per contrast, es defensaria que no hi hauria res que pogués diferenciar el mer espai.

Paral·lelament es diria infinit o indeterminat perquè el mer espai no podria tenir cap qualitat o quantitat de l'espai perceptiu: no seria verd, però tampoc no tindria unes mesures (per tant una circumscripció). Aquest espai seria aliè a colors i a dimensions (i circumscripcions).

Si se'l considerés en l'horitzó de l'espai natural, o de la imaginació, el fet de no acceptar límit esdevindria al cap i a la fi el reflex d'un mer llenguatge que ignoraria tot el límit que acompanyaria una reiteració tantes vegades com es volgués d'un espai imaginat.

Tanmateix aquesta il·limitació es deuria al mateix comportament d'un llenguatge ideal en contrast amb un afer representatiu.

Certament no hi hauria manera de fer geometria amb un espai que fos llenguatge verbal. Llavors caldrà de resseguir com s'hi introdueix les

entitats característiques del tipus del punt, de la línia, del pla i del sòlid, d'acord amb les estipulacions necessàries que bandegen els inconvenients o les circumstàncies engavanyadores.

II

SOBRE LES DIMENSIONS

L'espai pot permetre un estudi de les seves peculiaritats en una direcció diferent de la que duu a diferenciar els llenguatges que en fan referència. Esmentem-ho succintament.

1. Les dimensions de l'espai natural.

L'espai que hi ha entre la paret i el meu cos permet que la mà que s'hi apropa, al mur blanc, vagi desplaçant-se abans d'arribar-hi. Fet i fet el braç pot moure's cap a tots els llocs que em rodegen i va ensopegant els camins de l'espai, que poden ser molts. Els moviments del braç, els moviments del cos que camina a la dreta o a l'esquerra, cap endavant o cap endarrere, que puja o baixa, palesen el nombre indefinit de desplaçaments que hi ha en l'espai.

Els camins, les dimensions, són maneres de copsar una forma de fer del moviment del cos en l'espai. Tenen una significació de desplaçament.

Que l'espai (natural o geomètric) tingui tres dimensions es refereix que hi ha com a màxim tres dimensions que són ortogonals les unes a les altres, i es comprova que és així pel fet de poder agafar la dimensió que es vulgui per a iniciar-ho.

¿És espai la dimensió? És obvi que a través de la dimensió s'està lliurant l'espai. Es tracta d'un nom específic pel fet que l'espai de la dimensió no esgota l'espai del conjunt perceptiu de què es gaudeix en un moment: el trànsit cap a la dreta no impedeix de percebre el paisatge, el cantó oposat, els dalt i els baixos. La dimensió accentua una perspectiva espacial, és espai que es lliura així, en el desplaçament i eficaçment, però no exhaureix l'espacialitat.

Un espai exemplifica, una després d'una altra, dimensions; o l'espai permet dins seu que s'entomi una dimensió, o quan s'hi penetra amb la mà.

¿Es pot dir que les dimensions es despleguen seguint la rectitud? Versemblantment hi ha una confluència d'afers procedents de contextos diversos: anar recte, seguir recte, fan que es vagi en una dimensió, com ho fan les línies traçades als camps i a les parets. Però «recte» seria una manera d'assumir la dimensió, aquesta no suposaria com la segueixo, i la rectitud esdevindria una característica sobrevinguda a la dimensió.

Si més no s'accepta que l'espai permet parlar de la llargada, l'amplada i el gruix, que segueixen dimensions ortogonals i que també mantindrien un significat de magnitud (qualcom en tant que té més o menys) en la respectiva dimensió. Això seguiria el fet que l'espai contindria com a màxim tres dimensions ortogonals.

Per consegüent serien les tres dimensions de l'espai en aquesta accepció⁶.

2. Pel cap alt la reversibilitat forma part de l'espai natural.

1. L'espai natural permet la reversibilitat dels moviments. Hi podria néixer doncs la qüestió si les operacions reversibles ajuden a compondre el contingut espacial, o és més aviat el cas que es derivin de l'adquisició prèvia d'espai.

La defensa de les aplicacions d'un esquema com la reversibilitat es recolzaria sobre unes interpretacions de la gènesi de l'espai, que després duria a unes seves estructures consolidadores.

Fet i fet la circumstància de voler fer engendrar l'espai des de la reversibilitat, i des de les operacions corresponents, el voldria fer una resultant d'aïtals operacions, de manera que tendiria a fer-lo aflorar a partir d'uns capteniments maldestres i temptejadors.

Hi hauria un saber d'operacions en un doble sentit, d'un lloc a un altre, i d'aquest al primer, per a copsar una qualsevol circumstància de l'espai, i ens en guardaríem prou, de negar que no es pugui concebre aquest tipus d'operacions, i fins i tot que els anars i venirs de tot tipus

⁶ La direcció (en una de les seves accepcions) pot tenir en compte la reversibilitat espacial; d'aquí que pot no circumscriure's a allò que és la dimensió. D'altra banda es parla de sentits per la doble marxa reversible d'una direcció; i el mateix mot 'direcció' es pot usar com 'sentit'.

no hagin contribuït a adquirir un espai natural a títol d'una incorporació més.

Ara bé: l'espai natural admetria certament una colla de camins que poden refer les marxes que s'hagi emprès. L'espai natural fora el de la natura, allí on és el cos propi. El tot en què es lliura l'espai natural s'avé amb la globalitat de la seva donació, *saber solidari* que permetria l'aportació que consideraria els sentits, el qualitatiu, i les diverses motricitats. Superaria afanys esquematitzadors. El perceptiu fora ben mira holístic, inclouria una diversitat aplegada on hi hauria també l'espai.

En efecte des d'un grup de desplaçaments, o des d'una reversibilitat elemental, sembla poder-se circumscriure un espai, però es podria creure que troben el seu sentit d'espai dins d'allò que precisament no descriuen de l'espai. En conjunt no es diu res de l'espai quan se'l té com un seguit de direccions, com un munt de línies (les unes i les altres foren afers espacials de l'espai); i se sap de l'espai quan es camina, quan s'inspira fortament, que es ressegueix amb la mà un objecte, quan es mira el color d'una paret, quan se sent l'olor d'una flor. Parlant en general l'espai és *un saber ample, compactadament escampat*. Certament que hi ha una coherència en els grups de desplaçaments, però això sols avala que hi ha en conjunt coherència espacial.

2. El nen no gaudeix de pensament abans dels dos anys. Tanmateix semblaria que no hauria de projectar-s'hi allò que no caldria mantenir per a l'adult. El nen aprendria també globalment, en un tot d'espai/espais que va fent emergir més i més una espacialitat. Per exemple, el moviment insegur del braç del nen menor de dos anys lliuraria una dimensió, fora una experiència espacial tactilomotora: però si hi hauria una experiència espacial en l'accepció d'una aventura real, aquesta es trobaria dins d'una experiència espacial protagonitzada per tot el seu cos.

L'espai/espais pràctics no caldria, sembla, prejudicar-los d'acord amb algun criteri massa prefigurat: bastaria que en cap moment no es perdés de vista la globalitat de l'experiència de l'espai, i la necessitat de prendre el punt de partida de cada gest i mirada, aprenent quelcom

que es palesaria en les conductes fins a adquirir una intel·ligència pràctica.

Pel cap baix es tractaria d'arribar a la conclusió que la circumstància d'haver de refer un camí per a tornar al punt d'origen deu ser una resultant que permet suposar que hi ha un aprenentatge pel fet obvi que el nadó no sap on és. Malgrat això, al cap i a la fi la necessitat de refer el camí prové de la mateixa condició de l'espai natural: al costat del fet que la pedra llançada cau lluny, si algú se'n va de casa seva, no hi és, a casa, i ha de tornar-se'n seguint els camins que hi menen. No seria una resultant d'una operació més o menys formal, o d'una condició més o menys apriorística, sinó allò que l'home hauria d'aprendre (i versemblantment un qualsevol animal), que si més no revela com és la natura. És a dir: el domini de l'espai natural suposo aprenentatge (hi ha una remissió), s'hi palesa un saber, i fa que hi hagi relacions de l'espai natural, és a dir, com es lliura i (en l'adult) com s'ha de pensar.

El cosmos és tal qual interessant pel fet de saber què s'hi manifesta. I arreu la realitat regalima que hi devem el que s'hi contempla⁷.

⁷ No es tracta que la realitat es manifesti tal i com és i sense cap referència a mi, de manera que gaudís de privilegi de conèixer un fet absolut. Més aviat es defensa que no tinc cap altra coneixement primer i origen dels altres que el que lliura el real, i que tots els altres sabers de la ciència en deriven i no els substitueixen perquè en són posteriors. Per a la realitat, cf. *Sobre la meditació fenomenològica fonamental de Husserl* QF12,19 i 20

III

ESPAI NATURAL I ESPAI EUCLIDIÀ

Introduïrem les nocions estrictament geomètriques, mirarem com s'ha de copsar, en conjunt, llur paper, i repensarem les relacions que hi ha entre la seva disciplina i la natura.

1. La implicació de l'espai en les mesures.

Mesurar una feixa consisteix a agafar quelcom com a unitat per tal de saber-ne quantes en té de llargada i d'amplada, en el supòsit d'un tros rectangular. Estrictament parlant la feixa no és espai, però *sé* (ho domino) que puc considerar que ocupa un espai. D'altra banda jo no mesuro, parlant el peu de la lletra, la feixa, sinó allò que hi ha arran de feixa, és a dir, l'aire, i hi ha el corresponent espai. La mesura de la llargada de la feixa és la mesura de la llargada de l'espai del medi, i que compto gràcies que la unitat de mesura omple un espai. I quan ho trasllado a un dibuix ocorre una mica el mateix, però ara la ratlla permet quelcom representatiu més discret, i ho seria també una unitat que li correspongués.

Si agafés una capsa hauria de fer una mica el mateix: aquí ja podria circumscriure'm directament a parlar del seu volum, en l'accepció que dono per descomptat que omple un lloc, i que la mesura es fa de l'espacialitat del medi per més a prop que es trobi del material de la capsa. Ho podria, és clar, representar a través d'un dibuix.

Nosaltres podríem exigir un conjunt de requisits a tenir en compte en les representacions de superfícies, i de sòlids, en el sentit de no assumir el representat com a allò que correspon genuïnament a les nostres nocions de punts i de línies, i que hem definit al marge de les representacions. Això ho feu la geometria grega, i la d'Euclides en fou un exponent prou complet. Val la pena doncs de passar una mica per aquestes nocions rellevants.

2. El punt.

Car les definicions de punt, de línia, i d'altres, semblen deutores de les d'Euclides o deuen suposar-la d'una manera directa o indirecta. Si més no cal reconèixer la genialitat de les contingudes en els *Elements*: si la del punt («un punt és allò que no té parts») tenia com a rerefons d'evitar la divisió *ad libitum* d'una cosa contínua, la radicalitat de la definició hauria deixat sense recurs al possible oponent; i potser pressuposa un transfons més o menys platònic⁸.

No sembla pas que una definició del tall de la d'Euclides (o els seus substituïts) pugui assumir-se altrament que amb una validesa funcional, o que valgui més enllà d'un (savi) registre; car «la part» sembla quelcom que està en un tot, de manera que un tot i una part són termes correlatius. «Sense parts» doncs refusaria l'ús de «part»; essent difícil que hi hagi quelcom que no pugui tenir parts, no hi hauria manera de tenir alguna cosa sense parts: per això la definició del punt podria convidar a pensar una partició reiterativa que, quan no s'és platònic, restaria així. El punt euclidià, però, és aquella definició, no cal interpretar-lo com un convit a reiterar l'anàlisi de parts. Es tracta d'un registre que va bé, que és útil, i per això se l'admet, mentre que no hi ha aquí cap altre pensament expressat que el que conté. Això vol dir que a efectes pràctics un punt fora quelcom suficientment petit que permeti que se'l consideri com a sense parts; en d'altres paraules: el punt geomètric eficient tindria sempre

⁸ El platonisme parteix, en aquest context matemàtic, de la certesa que hi ha un llenguatge d'aquests ens que fem nostre sense massa problemes, per tant que hi ha un tal coneixement que deixa l'inferior, i que permet avançar en la disciplina geomètrica.

Aquesta interpretació no deu poder-se criticar internament, i pressuposaria alguna instància capaç de conèixer així o de possibilitar-ho.

Per això la millor manera d'abandonar-la rau a mostrar que el descabellament de la geometria sols té en compte les definicions abstractes per tal de seguir com cal l'estudi *representatiu*.

La solució més senzilla sembla la millor a l'hora d'evitar complicacions innecessàries i que responen a un convenciment que deu provenir del conreu de la disciplina.

algun contingut mentre que el punt geomètric sense més seria una definició.

Potser és important de fer notar que no hi hauria una millor determinació en la definició geomètrica d'un punt «sense parts» des de la noció de punt com allò que serveix d'origen o de final, de marca, etc., és a dir, de senyal de lloc.

Un punt sense parts fora quelcom, no sols irrepresentable, sinó impossible de disposar quan es volgués fer-ho més enllà de definir-lo.

Per tant un punt sense parts seria una idealitat⁹. Una qualsevol definició del tall de l'euclidiana fora una convenció que evitaria si més no la casuística i la crítica. Una definició funcional que s'assumeix, tant més que se sap que una qualsevol mesura pot ser tan petita com es desitgi de fer-la.

No s'hi guanya res a estimar el punt el límit d'un decreixement. És una estipulació, talment com zero, estrictament parlant, no tindria res a veure amb els nombres si no fos perquè se l'ha incorporat en aquest univers, una vegada més, com una convenció funcional. L'assumpció del punt com a límit en fora una altra¹⁰.

No està en qüestió que no es pugui considerar el punt com a límit. Fet i fet un qualsevol límit pressuposa un salt. No es tracta de no usar-lo funcionalment com a límit, sinó d'una discussió de l'abast d'una definició. Així com el zero sols és interessant com a límit perquè hi ha els nombres, així el punt manté el seu interès perquè hi ha dimensions i cossos. La qual cosa lleva tota idealitat en el punt i fa lliurar, com s'apunta més avall, una colla d'estipulacions per a la reglamentació de dibuixos i maquetes, i per a disciplinar el llenguatge geomètric.

El punt, se l'ha après des del representatiu, se n'ha assenyalat en les maquetes, dibuixat en els gràfics, de manera que tota la significació no paradoxal que conté remet a una praxi concreta en relació amb la meditació de coses i amb la reproducció en gràfics.

⁹ Ser una idealitat es diria d'un llenguatge que no pot no suposar-se de ser verbal, de pensar-se sempre i sense excepció totalment al marge de quelcom representatiu.

¹⁰ La diferència entre «no haver-hi res», que fora el límit d'un decreixement, i un punt no ideal reblaria que el punt ideal no podria ser el límit sense convenció.

3. La línia.

Les possibles definicions del tipus euclidià de línia («una línia és una llargada sense amplada») continuen les del punt, i els és vàlid el que s'ha dit dalt sobre el punt.

Llur caràcter funcional es fa patent en el fet que s'assumeix que es desplega en una dimensió sense amplada ni gruix. Les línies són rectes, corbes, trencades; certament podria defensar-se que una qualsevol d'aquestes línies gaudeix del criteri que només té una dimensió (la que va seguint precisament a cada moment) tot exclouent-ne d'altres; això reblaria segurament la funcionalitat de la definició de línia¹¹.

4. La superfície.

Les definicions possibles de superfície («una superfície és allò que té sols llargada i amplada») són també funcionals. Només es poden copsar així, com a definicions: pressuposen que se les comprèn i que no es vol saber res de cap superfície raonablement gruixuda.

La superfície s'oposaria més aviat a la part interna de quelcom: la superfície del terra amaga dins quelcom, el forat ho mostra; en conjunt les coses palesen el seu exterior, la superfície; la mà topa amb la superfície de la taula, que es ressegueix pels costats i per sota, com agafa el guix per fora abans de trencar-lo per la meitat i veure'l per dins: dins i fora són maneres dinàmiques de tractar les coses, segons allò que es pot tocar i veure i allò que està ocult, que no es troba ara a l'abast.

Quan es fa una aproximació a la superfície des de la llargada i l'amplada, es fa així mateix perquè una llargada i una amplada es diuen de magnituds que es mantenen en dimensions ortogonals.

Es vol assenyalar la capa més prima possible d'una qualsevol cosa i no es vol considerar res més. Es voldria tenir en compte dues dimensions fent abstracció del gruix: quelcom que sols es podria definir, i més enllà

¹¹ Per a una discussió a propòsit de l'ús de 'llargada', cf. per exemple, *Lògica, llenguatge i matemàtica*, Anthropos, Barcelona, 1993 (Estudis de Filosofia 8), pàgs.281-282.

no es podria copsar més ni representar. Es pot no voler parar esment d'un gruix, d'un interior.

Car, si cal definir una superfície com allò que sols té llargada i amplada, i que més aviat les superfícies semblen coses (si es vol: coses espacials) que s'oposen als seus interiors, les comandes que siguin «pures superfícies» segons els supòsits de la línia i del punt, és a dir, que qualsevol línia que continguin, no sols sigui en qualsevol tros «sense amplada», sinó també «sense gruix» (això és, sense interior), que progressa al final en el fet que hi hagi un punt «sense parts», si més no tot això gaudeix d'una eficaç utilitat a l'hora de l'estudi dels dibuixos i maquetes.

La concepció geomètrica de superfície doncs es mou també en un doble nivell: mentre es considera les superfícies en els treballs tal i com es pot fer de fet, se les formula d'acord amb els trets de les línies i dels punts que contenen, formulació que s'avalua així mateix de manera funcional.

Al cap i a la fi el que interessa és l'estudi de les relacions de les magnituds, i llur quantificació, per això es basteix aproximacions que hi menin sense més problemes.

5. El límit, la figura i el cercle.

Eucl.I def 13 («un límit és allò que és l'extrem de quelcom») usa el terme ὅρος: el mot es podria traduir per «línia divisòria», «partió», sens dubte un terme de camp en els seus orígens, però que en afers geomètrics potser val la pena de traduir en conjunt per «límit»; el límit és si més no quelcom ben patent del camp, dels dibuixos, de les maquetes.

El fet de reservar en geometria el mot «figura» per a «allò que està contingut per algun límit o límits» (cf.*Eucl.I* def 14) gaudiria d'un fonament prou comprensible: els afers geomètrics (triangles, quadrats, cubs, etc.) estan limitats per les línies geomètriques, i permeten atendre superfícies.

Per tant es tracta de la cura de figures de tot tipus mentre es pensa que els límits són línies que les tanquen. Allò que es fa s'estipula d'acord amb unes comandes definidores.

Un afer ben quotidià: en prou jocs infantils cal fer un cercle, que és el lloc on els nens se salven, mitjançant una canya que grata el terra mentre el nen gira sobre ell mateix; el nen repassa, acabada la feina, que la distància entre un punt i els seus peus sigui igual – o la consideri igual – a la que hi ha entre els seus peus i un altre punt del solc, punts que marquen el límit del cercle: perquè, si en mantenir la canya ferma creu – canya i cos fent un tot – que pot conservar la distància entre la punta d'aquella i els seus peus, en traçar la rodona, no sols no ha tingut la seguretat de no modificar aquella distància tant com ha durat el moviment, sinó que tampoc no ha pogut determinar la igualtat de distàncies entre dos punts presos del solc i els seus peus mentre ha durat el gir. Què és doncs un cercle per al nen? Sens dubte alguna cosa, que té límits, els quals des d'allí i des d'aquell altre lloc equidisten dels seus peus, podent repetir la comparació de distàncies fins que se'n trobi satisfet – per tant el cercle com a tal és una figura que permet relacionar distàncies, des del nen fins al límit, que estima iguals.

Els nostres cercles se semblarien als cercles dels nens: se suposaria iguals les distàncies des d'un centre al límit, i les sospites que el cercle no fos exacte arribarien a descobrir que no hi hauria ben bé radis iguals; la igualtat, al cap i a la fi, seria l'estimació d'una relació.

És clar que en geometria s'assumeix tot d'acord amb les estipulacions, i no hi faria res que un esbós fos imperfecte quan ja s'ha formulat idealment: la definició d'*Eucl.I* def 15 («*Un cercle és una figura plana continguda per una tal línia, que totes les línies rectes que hi van a parar, des d'un punt d'entre els que estan dins de la figura, són iguals les unes a les altres*») manté una línia que fa de límit, una igualtat (també idealitzada), i és certament paradigmàtica com a definició: car es presenta el cercle des d'un altre punt de mira («figura plana») i se'n fa un estudi analític.

S'estableix per la definició com s'ha de trobar les relacions de les distàncies entre els punts del límit i el centre.

6. Els sòlids.

Les definicions que contempnen els sòlids a *Elements* XI – un sòlid té llargada, amplada i profunditat, cf.*Eucl.XI* def 1 – es duen a terme a partir de les línies i de les figures, quan una figura és allò contingut per

algun límit o límits (*Eucl.I* def 14). Coherentment les superfícies hi gaudeixen d'un paper rellevant («un extrem [πέρας] d'un sòlid és una superfície» *Eucl.XI* def 2), en especial les planes, mentre que fa engendrar la figura de l'esfera a partir de la rotació d'un semicercle al voltant del diàmetre com a eix (cf. *Eucl.XI* def 14).

Arreu es té en compte els sòlid des del fet que hi ha punts i línies, i que les superfícies n'estan limitades: els sòlids perllonguen per a les tres dimensions el que representaven punts i línies per a les dues dimensions.

Es tracta que, mentre es representa un cos, es prova d'aproximar-s'hi a partir de certes parts privilegiades com són els punts i les línies, i des d'aquí les superfícies, els extrems de les qual són línies (*Eucl.I* def 6), de manera que, mentre s'atén un cos, s'hi desplega una raó potent a partir d'una selecció molt estudiada, que a més a més s'ha definit idealment. Hi ha un programa interessant que es descabdella de manera exemplar al llarg de les diferents proposicions. Caldrà insistir-hi per a comprendre ben bé què fa la geometria euclidiana.

7. Llur paper en la geometria euclidiana.

És fàcil d'adonar-se que la geometria euclidiana sembla la resultant de l'activitat de l'home en múltiples accepcions: una aportació primera seria la de traçar línies i marcar punts (independentment de com s'anomenessin), per tant la d'una manipulació natural, en els camps i en les coses, i la d'un estudi de llurs relacions tot incloent-hi les superfícies, i els sòlids que hi estan limitats.

La reproducció de línies i de punts a escala dels dibuixos perllongaria aquella activitat, unes tals línies serien models en l'accepció que sembla haver-hi una equivalència amb les d'un camp de conreu, per exemple, i perquè s'estudien les relacions entre les parts del camp, tot considerant el seus equivalent en les reproduccions.

Una tal representació de línies i de punts lliura també l'oportunitat de circumscriure afers, i llavors s'estudien les relacions entre línies i punts i aquelles parts que cauen entre límits, de tal manera que s'impliquen parts que no són línies i punts en els traçats de línies i de punts – i a l'inrevés: es basteix també línies i punts a partir de consideracions de parts que no ho són.

La rellevància de les línies i dels punts en els gràfics s'encaminaria a trobar relacions d'igualtat i de correspondència entre aquelles mateixes línies, entre aquelles línies i les parts que delimiten, o entre aquestes parts. Sembla doncs un treball des d'una selecció amb uns propòsits, i per això seria un simplificació dels casos a trobar en la natura o en una reproducció.

Per això es podria tenir la geometria dels inicis com un exercici que es faria des d'una selecció, amb un important paper de la igualtat; com a geometria, no li interessaria una relació qualitativa (entre aquest blanc i el seu tacte o entre aquest blanc i aquest altre blanc), i aniria trobant-se com a conducta apresada: mentre totes les coses podrien rebre un estudi des de paràmetres geomètrics, o des dels models geomètrics, com sigui que arreu hi ha equivalència, no deixaria de ser cert que hi hauria aquesta racionalitat geomètrica que es pot comprendre equivalent a la que hi hauria en un qualsevol afer natural a estudiar.

Certament, i a mesura que augmenta el criticisme, no es consideraria que la línia pogués tenir un gruix considerable, i fins i tot se la definiria sense amplada ni gruix, però això hauria estat més un escrúpol crític que una qüestió de fet: no importaria la quantitat en amplada del traç fet en la superfície del paper.

Ahora aquest escrúpol menaria a bastir la geometria d'acord amb tres supòsits: (1) que els punts serien sense parts, les línies sense amplada i gruix, les superfícies sense gruix, i per tant les entitats geomètriques no serien naturals, sinó que esdevindrien ens ideals; (2) que es projectaria en l'estudi analític i detallat (trobat sovint imperfeccions i defectes) la valoració d'uns tals ens; (3) que la reiteració del decreixement d'una magnitud reblaria la necessitat de (1) i corroboraria al seu nivell l'anaturalitat de tots els ens geomètrics, mentre això seria sustentat també a través dels nombres.

Però la geometria euclidiana, fins i tot animada per l'anaturalitat i per idealitats, i àdhuc quan es fes ús de les sèries numèriques, no hauria pogut orientar-se i descabdellar-se més que seguint els casos possibles per a l'home. I sens dubte el treball reiterat de construcció de línies i de punts, i de demostració de relacions, hauria precedit a qualsevol assaig de presentació deductiva; llavors aquesta afegeix la nova marca que

l'allunya dels seus inicis en voler pautar les passes de la demostració i de la construcció.

8. Els ens geomètrics com a límits d'un decreixement.

Pot estimar-se que el punt, la línia, i la superfície, són límits no sols en l'accepció euclidiana que les línies i les superfícies limiten superfícies i sòlids, sinó també en aquella que són la resultant d'un decreixement constant en la dimensió o en les dimensions.

Perquè, de límits geomètrics, n'hi ha molts: el polígon inserit en la circumferència tendeix a coincidir-hi mentre creix indefinidament el nombre de costats, l'el·lipse tendeix a ser una línia mentre acreix constantment la seva excentricitat, tendint a un, o a fer-se una circumferència quan tendeix a zero. Els límits geomètrics, com tots els límits matemàtics, suposen el pas del limitat al límit, que esdevé sempre un salt impossible de resseguir, i de fet s'entoma el límit, no pas perquè es cregui que és allò on duu conclusivament el limitat, sinó perquè s'assumeix l'indiscerniment entre límit i limitat en l'accepció que es pot admetre una diferència tan petita com es vulgui.

El punt, la línia, i la superfície, podrien ser doncs uns límits més d'aquesta mena.

Ocorre que ho foren exactament com ho és zero: aquest ho és en l'accepció que entre el decreixement que es proposa i el no-res sembla haver-hi també un discerniment tan petit com convingui. El decreixement pot ser tan petit com es vulgui. I zero és «no-res». La utilitat màxima de zero no lleva que, si només es parlés de zero, no es podria comptar res.

En el cas del punt, de la línia, i de la superfície, però, a més a més de tot això hi ha el fet que marquen i circumscriuen; és a dir, són eficaços a l'hora de delimitar un gràfic.

Un cub de quatre unitats d'aresta permet raonar que un vèrtex és el límit numèric i geomètric considerat des de les tres arestes que hi convergeixen. Així com el zero numèric d'aresta té alguna utilitat perquè hi ha un nombre d'unitats (zero és «no-res»), així el vèrtex a tall de punt sols pot ser útil perquè hi ha arestes, les arestes ho són perquè hi ha cares, i les unes i les altres ho són perquè hi ha un cub (punt significa

«sense parts», línia «sols en llargada», superfície «sols en llargada i amplada»).

Des del zero no hi ha nombre, i des del punt, la línia i la superfície no hi podria haver políedre.

El punt, la línia i la superfície, tal i com han estat definits, fan com el zero: el nombre no surt de zero, la geometria no surt d'aquells ens geomètrics. Però el zero esdevé útil en tots sentits, i les definicions de punt, de línia, i de superfície, ho són perquè acompanyen la concreta representació geomètrica i el raonament corresponent.

¿Es defensarà doncs que el límit numèric no limita exactament el limitat? ¿No són aquells ens geomètrics exactament el límit on duu allò que limiten? La resposta ha de ser clara i concisa: no, no ho són *exactament*, perquè no hi poden dur. Ocorre que no hi ha possibilitat de discernir-hi una quantitat segons la qual diferirien límit i limitat, ja sigui discreta o contínua. Això no és res més que la conseqüència d'un procés que és la comanda d'una reiteració en el decreixement quantitatiu.

Es podria formular així: no hi ha *exactitud* per coincidència de límit i limitat, però sí que n'hi ha una de funcional; l'*exactitud funcional* pressuposa la indiscernibilitat quantitativa de límit i limitat en tots els casos (es parlaria potser d'una *exactitud procedimental*).

I el punt, la línia, i la superfície, com a límits, gaudirien al capdavant d'un paper delimitador en els gràfics¹²

9. Geometria i natura.

La geometria euclidiana que s'estudia en els gràfics i en les maquetes tindria en compte línies i punts, i ponderaria les seves relacions; després ponderaria les que hi ha en les superfícies que delimiten, i com a activitat reiterada tot això faria un cert embalum, amb l'afegit que les definicions de punt, de línia i de superfície, i la possibilitat de reiterar indefinidament l'anàlisi numèrica, afectarien d'anaturalitat un tal estudi, i faria prendre tota mena de precaucions tant

¹² Aquest afegit de què gaudeixen respecte de zero provindria, és clar, del fet que el decreixement es fa des d'un cos geomètric, des d'una superfície, des d'una línia; és a dir, es parteix d'una localització espacial: el seu límit és la resultant d'una tal localització.

en el mateix estudi com en les definicions dels ens geomètrics resultants, de tal manera que l'esperit d'estar treballant amb afers ideals romandria arreu gràcies precisament a les mateixes precaucions nocionals i al consegüent escrúpol en les consideracions que inspeccionen gràfics i maquetes.

Tanmateix, ¿hi hauria alguna manera de dir que la natura és geomètrica?

Una resposta faria: doncs sí i no, depenent de l'abast del mot «geomètric».

Car en una primera accepció una geometria de tres dimensions ortogonals se separaria de la natura sols pels equivalents reproductius; la natura es diria geomètrica perquè se l'entoma des de línies i des de punts que, directament o a través del model gràfic, possibilitarien relacions d'igualtat i d'equivalència.

És a dir: els gràfics i les maquetes facilitarien per les seves dimensions una raó que en principi podria resseguir-se en prou elements i cossos naturals mateixos, i que en d'altres casos fora molt difícil o impossible. La necessitat de models gràfics per a considerar afers naturals no implicaria doncs en principi una anaturalitat, i és en aquesta accepció que la natura podria estimar-se geomètrica.

Per dir-ho així: no seria un mateix qui superposaria una tal geometria, directament o a través d'un model, a la natura, sinó que fora la natura la que es deixaria pensar geomètricament, o que es deixaria modelar gràficament; sols es decidiria a partir de quina part s'estudia, directament o a través del model, la natura, i per això es podria defensar que aquesta geometria esdevindria un altre nom per a la natura en la mesura que se la pensés des d'unes parts definides, i que la *disciplina* geomètrica fora llavors la dels models i maquetes, equivalents amb la resta de la geometria. En qualsevol cas la geometria convidaria pels seus orígens a un genuí exercici que estudia mesures de la natura (sigui o no a través d'un equivalent reproductiu); un tal exercici no seria la de tota la natura perquè, per més que no la podria evitar, no li interessaria una característica qualitativa.

En una segona accepció una tal geometria (començant per la grega) és una raó habituada que treballa així des dels primers moments: per tant no és un estudi de la natura (sigui o no el d'un equivalent reproductiu) en

la mesura que hi ha una habituació. Però alhora és cert també que una mica d'esforç la confirmaria com a nexa natural de les coses, dels punt i de les línies, i que faria reintroduir els nombre, no pas com un fet primàriament geomètric i anatural, sinó com la resultants de l'activitat geomètrica i natural, que ha de menester per això dels nombres abans que l'estudi aritmètic sembli aliè a aquests afers gràcies a nous hàbits, a les reiteracions sobre si mateix, i a la necessitat (hi ha un abast finit) de parar atenció al mateix càlcul numèric i a les seves igualtats (deixant ara les dificultats inherents d'irracionals, de límits numèrics, etc).

I en una tercera accepció certament aquesta geometria no seria un fet natural en la mesura que no es creu que s'hi pugui trobar els punts, les línies i les superfícies, que les coses de la natura, inclosos els dibuixos i les maquetes, són incapaços de reflectir, no sols la perfecció d'una igualtat, sinó fins i tot allò que s'entén per ens geomètrics, encara que s'hagi d'admetre que no se la podria descabdellar com a disciplina sense el suport de dibuixos i de maquetes.

En aquesta accepció la geometria idealitzaria perquè persegueix quelcom perfecte que no hi és representativament, mentre ho fa consistir tot en sòlids, superfícies, línies i punts, que han d'avenir-se a una definició d'ens geomètrics i que no poden formar part de la natura.

D'altra banda – i per damunt d'aquesta tercera accepció – que l'objecte originari d'una tal geometria es trobés en l'estudi de línies i de punts, a partir dels quals s'estudien les coses, no llevaria, no sols la raó habituada que s'accepta (i perquè en qualsevol moment es podria comprovar), sinó tampoc les recreacions pròpies a partir d'allò après; així com l'aritmètica es recrea sobre si mateixa a partir dels aprenentatges que s'ha fet, res no força, sembla, que no hi hagi quelcom semblant en la geometria que estudiem: el domini de les relacions dels cossos en serien les condicions¹³.

¹³ Valgui el cas, el fet que hi hagi espais geomètrics no euclidians, cf., per exemple, el nostre escrit ja citat *Lògica, llenguatge i matemàtica*, pàgs. 327-348.

10. Espai geomètric, espai natural, i espai pur.

1. La geometria es dedica a estudiar cossos a partir de punts i de línies, independentment de llur concepció. ¿Hi ha un espai geomètric? La resposta torna a ser afirmativa o negativa tot depenent del que s'entengui per espai geomètric (euclidià, aquí).

Car l'home no abandona mai el seu espai natural, i la noció d'espai forma part del seu repertori diari. Fet i fet no cal estudiar geometria euclidiana per a trobar-se en l'espai natural o per a considerar l'espai d'una qualsevol manera.

Per tant una primera geometria acrítica no tindria inconvenient a resseguir espais, i a estudiar-los des de punts, línies i superfícies, de fer-ne reproduccions que servissin de models, d'afigurar-se relacions.

No hauria calgut fins aquí de fer renúncia d'estar meditant quelcom a propòsit de l'espai natural: les relacions pensades des d'un model o una reproducció no farien més que engreixar-se del que l'actuació va posant en relleu.

La circumstància de l'aparició d'una actitud crítica (el punt sense parts, etc.), l'adquisició d'hàbits, la troballa dels límits, la presentació deductiva dels teoremes i de les construccions, no semblen alterar substantivament aquest estat de les coses: l'espai geomètric, un afer a cavall de l'espai natural, entoma tota mena de precaucions, que no destorben la coherència d'aquell espai natural. Les cures intel·lectuals no esvaeixen l'espai natural, sinó que ponderen els afers, els defineixen, els relacionen, els compten, els dedueixen, amb un tal rerefons.

L'espai geomètric (euclidià) esdevindria des d'aquí l'espai natural en tant que hi ha una disciplina que vol reglar-ho des de punts, línies i superfícies, on es compta quan convé, i seguint comandes i recomanacions.

I no hi hauria d'altre espai geomètric que el que es derivaria del natural.

2. Repassem-ho des del punt de mira de la idealització que procura la geometria.

Perquè l'espai geomètric manté l'espai natural: per a entomar espai, li caldria l'espai natural si hi ha d'haver alguna representació.

La qual cosa duria de nou al fet que l'espai geomètric és el de l'espai natural, i n'hi ha un tractament específic. No es podria reduir còmodament, i maldestrament, l'espai geomètric a la noció d'un espai pur.

L'espai geomètric s'hi diferencia per consegüent pel tractament que s'hi fa. Car la geometria idealitzaria l'únic espai que es coneix, el natural, en l'accepció que el mantindria en una tensió idealitzadora a partir de les concepcions dels ens geomètrics.

En aquesta accepció es distingiria de l'espai natural, i li plauria de moure's procurant-li efectes desnaturalitzadors.

L'espai geomètric afegiria doncs una idealització a partir de l'espai natural. Versemblantment no manllevaria d'enlloc més la força significativa que té d'espai, però l'estralaria i el pretendria sublimar en una tasca impossible de dur estrictament a terme.

3. Així l'espai geomètric fora l'espai natural, i no el fora, segons on es posés l'accent.

Per això també l'espai geomètric podria contribuir a la seva manera a allò que s'entén per espai pur gràcies als seus trets idealitzadors.

Aquest espai pur és el d'un llenguatge verbal. En principi el seu descabdellament deu tenir com a suport el fet que es parla de l'espai independentment d'un qualsevol espai natural concret: des d'aquí es podria inaugurar un tractament d'acord amb el fet que tal com és no gaudeix de representació, la qual cosa fa convergir aquesta manera de parlar i els trets idealitzadors a propòsit de l'espai geomètric.

També és possible un camí invers: que les definicions de punt, de línia, i d'altres, reblessin la necessitat d'un espai al marge d'una qualsevol representació.

Finalment també es possible que l'un camí i l'altre formin part d'un únic programa amb parts complementàries, i que expressarien afers d'un espai de dalt a baix ideal.

En qualsevol cas l'espai geomètric no sembla poder-se reduir a un espai pur: llavors no es podria fer geometria.

IV

LA CERTESA GEOMÈTRICA

La geometria euclidiana palesa un grau considerable de certesa, que prové del mateix contingut tractat. Cal provar de dar-ne alguna aproximació tant des del punt de mira de les habituacions demostratives com des de la perspectiva del seu origen, consideracions que s'hauran de perllongar en d'altres llocs.

1. Demostració, construcció i deducció geomètriques.

1. El llibre I dels *Elements* conté un sistema de proposicions que remeten les unes a les altres, i als principis.

Tanmateix els *Elements* consten de tretze llibres (el desè, per exemple, és el de les magnituds incommensurables), alguns dels quals els encapçalen noves definicions. Es podria pensar que no voldrien oferir-se a tall d'una geometria axiomatitzada tal i com això es podria interpretar avui, sinó més aviat com un conjunt de llibres ordenats. Certament el supòsit entraria dins de les qüestions que desvetllaria una explicació dels principis, i dels diferents llibres, del treball euclidià.

Sigui com sigui les proposicions d'aquests llibres permeten provar de circumscriure, àdhuc des del punt de mira d'avui, per què parlem de «demostració geomètrica» («prova geomètrica»), de «construcció geomètrica», i «deducció geomètrica».

Per exemple, la demostració sembla una raó habituada que s'ocupa de punts, de línies, de triangles, etc., i que arriba a això o a allò, de manera que hi va havent un procés singular; s'afegiria que l'estudi que ho descabdella remet a allò ja tractat; per això s'afirmaria que les demostracions són també deduccions des de quelcom ja establert.

Respecte de les construccions caldria afegir alguna cosa de semblant: el que es construeix remet a afers més elementals o que ja s'han construït en algun problema.

En aquesta accepció, la «demostració geomètrica» o la «construcció geomètrica» durien a terme un *procés habitual* que es caracteritza per seguir passes acceptades o suficientment apreses.

D'on prové la certesa d'una prova o demostració, o d'una construcció? Sens dubte del procés habitual, és a dir, del fet de seguir passes acceptades o suficientment apreses. I la certesa d'aquestes passes poden remetre a d'altres en les mateixes circumstàncies.

Al final hi ha principis de tota mena, alguns formulats (els postulats, per exemple), d'altres implícits, d'altres assumits com a obvis, hi deu haver prescripcions que s'ha establert (què és línia i què segment), i més. Al cap i a la fi afers que han tingut la seva representació, o a cavall entre representació i el seu llenguatge, o només a tall de definició, tots els quals reben doncs la certesa inicial des del que és representatiu i des del llenguatge.

Així mateix la geometria pressuposa un exercici teoricopràctic pel fet que, per exemple, cal dibuixar, construir maquetes, l'ús de compassos.

2. Un dels trets més singular de les demostracions i de les construccions rau en la circumstància que, mentre sembla que s'estudiï un cas, de fet s'està pressuposant una consideració general: la demostració (la prova) i la construcció palesant amb el seu exercici el procés habitual, cada passa que contenen seria *el* cas des d'una validesa general, i per això cada passa constructiva i demostrativa s'estimaria vàlida d'acord amb l'esquema «si qualsevol és tal o tal, llavors aquest és tal o tal»: les passes de la construcció i de la demostració són la conclusió o la conseqüència d'un esquema implícit.

Per això la demostració i la construcció serien vàlides amb caràcter general, i és el que defensaria l'enunciat de la proposició. Es dedueix atenent el cas però formulant-lo, és a dir, s'expressa el general mentre es treballa en el cas particular. Aquest passa a ser la d'un qualsevol cas.

Hi hauria els trets d'un procés habitual tant per a les passes constructives com per a les demostratives: d'aquí que si s'haguessin establert mitjançant proposicions anteriors que ho exemplifiquessin en un cas, unes tals proposicions contindrien així mateix la generalització que es plasmaria en el seu enunciat, quan així convingués i fos possible – si s'haguessin establert mitjançant principis en conjunt, com es dirà més avall, el tret general o s'exemplificaria en un cas, o en els enunciats dels postulats, i d'altres. Sembla palesar-se que l'ordenació d'una

geometria des de principis s'encamina més aviat a una presentació dels afers geomètrics des d'allò que cal saber o que cal dominar.

3. Així la «deducció» geomètrica¹⁴ seria, en una primera accepció, un procés habitual, per exemple, de la mateixa demostració, en tant que les seves passes remetent a principis (en una accepció laxa del mot, és a dir, tot allò admès sense demostració o construcció, o ja provat o fet), i la «construcció geomètrica» i «demostració geomètrica» serien llavors processos racionals habituats que duen a una certa conclusió que se cercava, i amb els trets dalt indicats.

En una segona accepció s'accepta aquelles conclusions de la demostració i de la construcció com a deduïdes, mentre s'assumeix les construccions i les proves geomètriques perquè s'han après moltes coses, i de vegades (com en totes les proposicions elementals) és possible de seguir sense hàbit les veritats de la conclusió o de les passes.

Els motius pels quals s'accepten doncs les conclusions i les proposicions geomètriques són coses complexes, i remetent a la gènesi de l'aprenentatge propi i de la història de la geometria.

Sembla doncs que no hi ha cap inconvenient a l'hora d'admetre que les demostracions i les construccions *es dedueixen* – ho proven de fer si més no – a partir d'allò que s'ha aconseguit abans; i que les seves resultants *es dedueixen* a partir de les passes que van seguint al llarg de les proposicions.

També val la pena d'observar de bell nou que, per exemple, la igualtat entre els angles de la base d'un triangle isòsceles podria ser establerta a partir de la investigació d'aquest triangle, o d'estipular-ho. Però la geometria aspira a deduir les proposicions: per això hi hauria unes determinades construccions i demostracions. Per tant sembla tractar-se d'una exigència que es demana (la de seguir uns tals camins constructius i demostratius).

¹⁴ La deducció geomètrica no esgota els tipus de deducció, que en conjunt sembla, fora de l'àmbit geomètric, la passa des d'un general a un particular, per exemple, o bé la que duu a fer inferències immediates, o també allò on va a parar algun raonament i que s'estima que en depèn.

4. El deduït no és una part del que serveix per a deduir. No hi ha una relació de part i de tot, sinó que el cas deduït gaudeix dels trets ja comentats, amb la seva originalitat.

La nota no caldria esmentar-la si no fos que les interpretacions logicistes poden suggerir fàcilment la subsumpció d'un cas d'un determinat nivell dins d'un general o d'un de superior.

5. Tornant a la primera manera d'entomar la deducció, el que hem anat comentant faria comprendre per què prou geòmetres posteriors a Euclides haurien tendit a creure que la deducció es feia a partir de principis (les nocions comunes i els postulats) i de les proposicions anteriors, potser fins i tot a costa de les pròpies intencions d'Euclides o dels sistematitzadors d'una primera llista de fonaments.

Una construcció i una demostració geomètriques serien de primer activitats habituals; el fet de pautar-les d'acord amb proposicions ja treballades sembla de vegades més quelcom que es força, que un afer necessari per a la raó, i tots els principis admesos semblen recollir i exemplificar qüestions que cal saber, que cal fer, o que cal dominar, al marge de les relacions deductives entre proposicions i a més a més d'aquestes relacions.

Si més no les construccions i les demostracions valen per si mateixes, però no deixa de ser cert que una discussió de principis seria prou útil perquè cal saber i cal dominar allò que és elemental en les proposicions, o allò que hi és necessari, afers que mereixen sovint una discussió *ad hoc*.

Però les mateixes notes deixen ja entreveure que es podria allargar el nombre de principis de la geometria: no sols es podria considerar principis qualsevol passa apresa tipus «dues coses iguals a una tercera són iguals entre si», sinó coses a fer («assenyalar un punt en una recta»), qualsevol definició, assumptes que cal que dibuixos i maquetes satisfacin, o circumstàncies a trobar en la construcció de línies i de figures («dues línies rectes no tanquen un espai», «dues línies rectes que es tallen ho fan per un punt», la igualtat, etc.); les geometries en podrien recollir uns quants d'acord amb allò que es cregués més rellevant¹⁵.

¹⁵La simplificació de principis té un dels seus punts de suport en el supòsit que

6. Una sistematització deductiva perfecta sembla un impossible¹⁶, i cal tenir-la si més no com un mitjà d'ordenació – en qualsevol cas els principis incardinen aquesta necessitat: els *Elements* no sembla que hagin fet una altra cosa, malgrat que des d'avui es pugui exigir més postulats, que no s'admeti algunes proposicions per ser ja postulats, que s'hagi afegit que la reducció a l'absurd revesteix en expressió deductiva afers que no reben amb això cap prova (tot i les conviccions d'un grec euclidià o d'un contemporani), i que avui s'estimi així mateix l'axiomatització com un mitjà de recerca de variants, de formulacions generals. Però tot plegat s'és on s'era: que la construcció i la demostració serien processos habituals i que qualsevol ordenació assenyalaria casos ja admesos (o a admetre) i per això es podria forçar la marxa expositiva d'acord amb una ordenació deductiva, que aniria afegint resultants deduïdes de les noves proposicions.

Es pot entreveure que l'afany d'axiomatitzar correctament la geometria provindria del propi tarannà de la construcció i de la

uns principis són equivalents a uns altres: per exemple, que el cinquè postulat d'Euclides és equivalent al postulat que per un punt exterior a una recta sols hi ha una paral·lela, o a qualsevol dels múltiples postulats alternatius.

¹⁶Com els *Elements* exemplifiquen per al seu cas, la seva ordenació de proposicions no implica pas que tot el que es va treballant en cada demostració pugui ser deduït a partir d'altres proposicions (i si es vol: dels seus principis); és clar que es podria anar introduint postulats a mesura que anessin apareguent novetats, però l'afer seria un incessant estira-i-arronsa entre el progrés de la disciplina i la formulació de principis i del sistema deductiu; per això una accentuació excessiva de l'axiomatització pot deixar eixorca una disciplina, amb el ben entès que sempre s'aconsegueix *a posteriori* de qualsevol progrés. En d'altres paraules: qualsevol sistema deductiu és una presentació de la disciplina i no té necessitat d'excloure que allò que es va deduint no pugui contenir novetats respecte d'allò ja tractat; el fet que hi hagi sistemes deductius més perfectes té sens dubte el seu mèrit com en tindria el sistema que fos perfecte: però cal no oblidar que la demostració i la construcció valen el que són, i que l'avenç en el domini de les relacions és tan important com un bon sistema deductiu.

demostració en la mesura que parteixen de passes acceptades o apreses, perquè, en una accepció, la demostració (o la prova) i la construcció suposarien quelcom del que hi ha en una axiomatització.

2. Més sobre els principis.

No és aquí el lloc per a l'estudi dels principis de la geometria euclidiana. És prou sabut que la capçalera del llibre I dels *Elements* conté les definicions¹⁷, els postulats, i les nocions comunes, que es creuen oportuns, malgrat que s'hagi discutit molt sobre el seu sentit¹⁸.

Sigui com sigui l'axiomatització d'una geometria esdevé una tasca de la mateixa geometria.

No cal ara escatir doncs l'abast d'una qualsevol afirmació d'aquest principi o d'aquell altre, i bastarà de circumscriure's a unes notes a propòsit d'algun aspecte que pot merèixer l'atenció del lector.

Per exemple, el recordatori que els principis d'una geometria euclidiana neixen de la necessitat de garantir certes coses, d'assumir certs requisits, d'apuntar afers que no cal discutir més, amb el ben entès que no s'estima convenient que siguin molts; és a dir, els principis tenen en compte tot allò que no es demostra o construeix, sinó que serveix per a demostrar o construir.

En aquesta accepció, afegim nosaltres, podrien ser principis que hi hagi punts, línies, superfícies, sòlids, o fins i tot d'altres afers: per exemple, que hi hagi paral·leles.

Allò rellevant rau que el contingut de punts, línies, superfícies, i sòlids, s'ha après d'una pràctica sovintejada en els afers i en els gràfics, que el que tenen de contingut prové de les ocupacions perceptives amb els llenguatges que els són propis.

El nombre de principis sembla poder perllongar-se amb alguna nota per a la construcció de línies i punts: per exemple, que els extrems de les superfícies siguin línies (cf. *Eucl.*I Def.6); o que les línies rectes que uneixen punts d'un pla es trobin en aquest pla. Ultra això es deu poder trobar més estudis del pla, o de les seves propietats a partir de punts i

¹⁷ Sabem que també n'hi ha en d'altres llibres dels *Elements*.

¹⁸ Un apunt sobre això es troba a *Lògica, llenguatge i matemàtica*, pàgs. 271-279.

línies, o de llurs qualssevol relacions, que poguessin incloure's com a principis (per tant n'hi podrien haver de diferents, depenent de l'habilitat de l'estudiós).

Ahora la determinació de dos plans que es creuen en una recta (cf.*Eucl.*XI,3), de dues superfícies en una línia, de dues línies en un punt, o que un punt divideix una línia, que una línia divideix superfícies i plans (la circumstància que un pla o una superfície divideix l'espai, és a dir, els sòlids – cf.*Eucl.*XI.Def.2 –, té un particular punt d'interès a partir de les línies i dels punts que s'hi consideren, cf.*Eucl.*XI.Defs.3-7), el fet que una línia creua el pla per un punt (cf.*Eucl.*XI,1), que dues rectes que es tallen estan en un pla (cf.*Eucl.*XI,2), tots els postulats d'un qualsevol principi de continuïtat, i d'altres, adapten i estudien les línies i els punts en les consideracions de superfície i d'espai, i mostrarien per tant l'ús de línies i de punts.

També es podria considerar principis d'altres fets prou rellevants: per exemple, que entre dos punts sols hi ha una línia recta, que dues línies rectes no poden tenir un segment comú, etc.

En tots els casos no cal cercar l'origen de la seva admissió en un altre lloc que no sigui el de l'observació (que inclou la seva expressió i que permet la idealització en un procés transitiu). La certesa de les afirmacions no rau sols, o fonamentalment, en la reiteració i en la circumstància que n'hi ha tractes des de petits, sinó que es deu a la informació que lliuren les relacions espacials, les inspeccions espacials, els recorreguts espacials, i als llenguatges que provoquen.

La certesa, és clar, no podria provenir de cap espai ideal en tant que aquest no té representació tal com és. Per tant no hi ha una expressió sols a nivell ideal, sinó també concret (suposant el que s'expressaria amb una significació general, si es vol, en tant que el cas està en representació d'un qualsevol cas). Amb totes les precaucions que es vulgui, sols es fa geometria a partir de les consideracions d'un espai representatiu amb les preferències, les pautes, les idealitats, i les conveniències, que es vulgui, i a partir d'això o d'allò.

D'altra banda en el fet que hi ha postulats equivalents, i en el de tenir un postulat o els seus equivalents com a indemostrables, hi hauria una certa ambigüïtat que es mouria a diferents nivells: (1) potser perquè s'estaria parlant d'acord amb un *hàbit* racional, en perjudici d'una raó

menys habituada (l'un serà indemostrable, un altre equivalent demostrable a partir de l'anterior); (2) també perquè el propi tarannà de racionalitat habitual faria que no es tingués cura que deu més a allò que li provoca la representació del que voldria admetre (per exemple en les reduccions a l'absurd) – en aquesta accepció els enunciats que es volia demostrar valdrien com a postulats; (3) i perquè una axiomatització sembla un assaig per circumscriure el que s'assumeix, i el que es repeteix no lleva que el repetit és *un altre* (és a dir, no s'hauria de lliurar tanta força als aspectes habituals de la prova, que esvaeís el que conté en si mateixa): l'axiomatització tindria un caràcter d'*utilitat* (s'ha après coses que es repeteixen).

No sembla haver-hi, estrictament parlant, postulats equivalents, i la indemostrabilitat d'un principi tindria un avalador en l'expressió demostrativa pels varis nivells d'ambigüitat dels punts anteriors, altrament s'admetria que tant els principis com la mateixa racionalitat demostrativa tenen una originalitat pròpia, és a dir, que caldria no exagerar el valor de la demostrabilitat ni, de retruc, el de la indemostrabilitat.

3. ¿En quina accepció es diria que els principis de la geometria euclidiana són inductius?

No cal que hi hagi un trencament entre els afers perceptius i el llenguatge. Si la percepció de quelcom és permet tenir-ne una garantia (se sap que una oca és blanca si se la percep així), el que conté el llenguatge sembla sensat de remetre-ho de vegades a la percepció en persona. Es pot parlar de l'oca d'una qualsevol manera i estar convençut que és blanca per cap altra virtut que no sigui la seva percepció.

L'enunciat «les oques són blanques» és doncs inductiu en l'accepció que s'avé amb el coneixement perceptiu que s'ha tingut de les oques. Però l'individu-oca perceptiu permet expressar-lo, i hi ha també un saber general, de tal manera que en tot plegat no deu haver-hi solució de continuïtat sinó domini.

Els principis de la geometria serien de primer de caire inductiu en una accepció. Alhora la idealització deguda a les definicions dels ens geomètrics bàsics accentua un vessant ideal, no per a fer els principis no inductius, sinó per a mantenir-los una mica al marge del percebut.

Els principis foren en part inductius i en part una recreació a partir de les resultants inductives.

4. La transitivitat de la igualtat.

1. Hempel va escriure:

«Il·lustrem aquesta manera de veure la natura de les proposicions matemàtiques prenent un altre exemple de veritat matemàtica – o millor lògica –, citat freqüentment, o sigui la proposició que sempre que $a=b$ i $b=c$, llavors $a=c$. Amb quins fonaments s'afirma aquesta, així anomenada, "transitivitat de la identitat"? És de natura empírica i per tant si més no desconfirmable per l'evidència empírica? Suposem, per exemple, que a , b , c , són tons de verd, i que tot el que podem veure és $a=b$ i $b=c$, però clarament $a \neq c$. Un tal fenomen passa de fet en certes condicions: ¿el considerem una evidència que desconfirma la proposició en consideració? És indubtable que no; argüïríem que si $a \neq c$, és impossible que $a=b$ i $b=c$; entre els termes d'una d'aquestes últimes parelles, si més no, hem d'obtenir una diferència, malgrat que pugui ser sols subliminar. I rebutjaríem la possibilitat d'una desconfirmació empírica, i la idea que una prova empírica fos aquí rellevant, sobre la base que la identitat és una relació transitiva en virtut de la seva definició o en virtut dels postulats fonamentals que la governen. D'aquí que el principi en qüestió sigui vertader *a priori*.»¹⁹.

El text conté una versemblança perquè hi ha una part que es manté ferma, després de la crítica, i una altra que no ho sembla poder fer.

La defensa de proposicions vertaderes *a priori* es basa en la circumstància de no haver-n'hi confirmació o rebuig experimental. Una mirada distant ha d'estranyar-se, sembla, que hi pugui haver quelcom així com un saber *a priori*, que introdueix predissenys

¹⁹ C.G.Hempel, *On the nature of mathematical truth*, publicat a *The American Mathematical Monthly*, vol.52 (1945), pàgs.543-556. Recollit a *Phylosophy of mathematics*, Cambridge University Press, 1964 (2ª 1983), a càrrec de P.Benacerraf i H.Putnam; la cita es troba a pàg.380.

biològics o alguna mena d'enginy mental singular, o allò que es pensi més convenient de pressuposar-hi.

Ocorre que caldria decidir el més de pressa possible si el llenguatge formal és primer o és derivat. En d'altres paraules: si és primer dues coses (dues taronges, dues ratlles, dos homes), o la relació d'igualtat (si es vol, a través de $a=b$).

2. Si la gent no formada té més aviat dificultat de comprendre un qualsevol formalisme, si àdhuc en $a=b$ hi ha una incomprensió bàsica del que es diu, *si s'hi lleva la connivència*, sembla clar que l'origen d'una igualtat formal es troba en les relacions concretes entre coses.

Però l'originalitat de llenguatges, i de casos concrets, fa que els uns no puguin ser substituïts pels altres: allò de què informa $a=b$ no ho pot lliurar cap altra igualtat entre fruites o entre homes. La proposició $a=b$ gaudeix d'un valor, i tal com és no remet a res.

La pretensió que dos homes iguals, dues monedes iguals, pugui substituir $a=b$ equival a no comprendre cada afer.

Això inaugura la possibilitat de *dos* discursos: l'un que es mou a nivell perceptiu, l'altre a nivell formal.

3. No hi ha cap dificultat a dir que dos bens són iguals, a observar que un d'aquests sembla igual a un tercer, i que se sigui capaç de notar algun detall que fa desigual el tercer i l'altre que quedava. Perquè aquí «iguals» vol dir que se'ls percep iguals, on «iguals» passa a ser un adjectiu per a una relació entre éssers naturals que s'ofereixen a la mirada, i no és res més: els dos bens són iguals, com són blancs o tacats, grans o joves. Fet i fet algú sense prejudicis formals valida que troba afers iguals, i d'altres iguals a uns i no iguals als altres, *i no passa res*; aquesta és l'experiència perceptiva que valora els casos d'acord amb el seu saber, i que no hi troba cap incoherència com sigui que és més aviat coherent ara estimar igualtats, ara desigualtats. Qui percep no mana com s'ha de percebre les relacions.

4. D'altra banda que de $a=b$ i $b=c$ es conclouï necessàriament que $a=c$ no prové d'enlloc més que de la consideració formal.

Com sigui que $a=b$ sols diu que hi ha dues coses iguals, ho diu a nivell formal, talment com en l'ús de 'coses iguals', de tal manera que aquella transitivitat se circumscriu a dir que allò que és igual ($a=b$) i que segueix igual ($b=c$), ha de ser igual ($a=c$); o que si la igualtat segueix la igualtat resta la igualtat; o potser alguna altra fórmula més encertada. No es pot rebutjar la transitivitat de la noció d'igualtat perquè sempre es mou a nivell d'una igualtat formal.

Aquest principi és general. Tanmateix, què vol aportar aquí que sigui general? Perquè no pot pas assumir de cap de les maneres la plasticitat de les coses perceptives. El principi general bandeja tal qual una qualsevol concreció perceptiva, ignora un fet essencial de la natura com és la diversitat en tots els ordres. És formal, per tant parla sols de «coses en general», i de cap en particular. Però, què poden tenir igual les coses en general? Doncs no-res: «dues coses iguals» no tenen res d'igual, sinó que l'expressió significa que es parla de la igualtat entre coses a nivell formal. La formalització fa impossible una distinció. Aquí, de les coses, a banda de ser iguals, no se'n diu res més.

Per això dues coses iguals a una tercera són iguals entre si: allò que és igual i que és igual duu a un tercer «que és igual».

El principi de la transitivitat de la igualtat no ha de menester doncs de més certesa. La que proporciona a les ciències formals es lliura al mateix nivell que la que lliuren els objectes de què tracta (les igualtats numèriques) – a les que no són formals com la geometria lliura el que la igualtat significa (dues línies iguals). L'estudiós es mou a nivell d'una certesa prou sòlida, amb les seves habituacions, i això basta per a assumir el rigor i la consistència de les expressions matemàtiques.

5. Es rebutja que l'experiència pugui invalidar la transitivitat formal perquè es mouen a nivells diferents. Però el principi de la transitivitat no regula l'experiència, no pot substituir les avaluacions perceptives.

Caldria superar qualsevol saber *a priori*. La necessitat del principi no prové d'algun privilegi determinat, sinó de ser un final de camí que té un significat original, i que llavors ja no permet, per

exemple, algunes de les experiències perceptives de què es parlava, tanca la porta a qualsevol significat que no sigui la d'allò igual.

Llavors, el caràcter transitiu de la igualtat, ¿és un principi inductiu o no? Sí, ho és, en l'accepció d'originar-se des de l'experiència perceptiva. I alhora està de cap a cap idealitzat, de manera que es manté, quan se'l formula, en aquest nivell irreductible a quelcom perceptiu.

D'altra banda a no podria ser igual a b sense *connivència*, perquè una tal representació és clarament desigual; s'ha après què pot significar que a és igual a b .

I a és igual a a tant per la representació com perquè s'ha après què poden significar (per exemple, dos plats iguals). La identitat no es podria desplegar en una igualtat sense dissoldre's i fer aparèixer una igualtat.

D'aquí que en $a=b$, $b=c$, llavors $a=c$ no hi ha una tautologia, sinó una repetició.

6. La transitivitat de la igualtat contribueix a la seva manera a la idealització de la geometria. Car *s'expressa* en igualtats de tot tipus (segments, costats, etc.) mentre es descabdella un qualsevol aspecte de la disciplina. És a dir: es mana que siguin iguals malgrat qualsevol representació, però aquesta comanda es comporta d'una manera paral·lela a la de la definició del punt, que no té dimensions. El mateix geòmetra no fa cabal que dues representacions siguin iguals, mentre vol pensar que ho siguin: certament no les fa efectivament iguals pel fet de pensar-ho, però n'hi ha prou, amb l'afegit que el llenguatge formal és incapaç de fer geometria euclidiana perquè li cal alguna representació. Tot això hi introdueix un nou procés idealitzador i insuperable.

5. Els principis de la geometria i John Stuart Mill.

L'autor britànic va defensar, és cosa coneguda, el caràcter inductiu dels principis de la geometria. Ens circumscriurem a fer-ne una breu indicació a partir d'una tria aleatòria per a copsar una mica el seu tremp.

Si més no el tractament que *A system of logic*²⁰ fa de la inducció en matemàtiques segueix una accepció quotidiana dels mots «experiència» i «inducció», al marge doncs de la seva epistemologia.

De les definicions dels *Elements* diu, per exemple, que no es pot concebre un punt sense dimensions, una línia sense amplada, etc. S'afegeix que, en les definicions, s'hi reté dels objectes allò que s'hi vol ressaltar ara, però que no es pot pressuposar que no tenen els altres caràcters. Aquí tampoc no s'hi para compte de les irregularitats, de les deformacions, dels petits errors. Certament no corresponen als fets, però se suposa que ho fan per a treure'n les conseqüències²¹.

Unes tals suposicions són hipòtesis, és a dir, veritats retocades, i en aquesta proporció allunyades del que és vertader; i llavors sols hi ha necessitat en l'accepció del que s'extreu des d'aquí, és a dir, d'allò que es dedueix. Fet i fet aquestes hipòtesis són fets reals amb alguna de les seves circumstàncies exagerada (s'assumeix de ser del tot allò a la qual cosa realment s'acosta molt) o omesa (a restaurar quan convingui)²².

Si es passa als axiomes, llavors encara accentua més, si pot ser, el seu caràcter inductiu i defensa que aquests primers principis no són hipotètics, sinó vertaders²³. Són veritats d'experiència, generalitzacions a partir de l'observació, induccions a partir dels fets.

Els ha suggerit si més no l'experiència. La verificació permanent lliura una forta predisposició a assumir-los, i llur coneixement irreflexiu es va aprenent des de la infantesa més tendra.

L'argument que no hi ha en l'experiència línies sense amplada, etc., i per tant que no poden ser induccions falla perquè desconeix la prova per aproximació, que té un cas extrem en la doctrina matemàtica dels límits²⁴.

D'altra banda cal admetre que les propietats de la realitat estan representades fidelment en els diagrames imaginats, com una línia real, per exemple, pot està representada per una altra: per tant no se surt de l'àmbit de la inducció.

Ultra això Bain diu que l'aprenentatge per experiència d'alguns fets inclou que les seves nocions excloguin d'altres possibilitats. Après el que és

²⁰ *A system of logic ratiocinative and inductive*, Collected works of John Stuart Mill (vol.VII i VIII), University of Toronto Press, 1973-1974.

²¹ Cf. tot a ídem, pàgs.225-226.

²² Cf. ídem, pàgs.227-229.

²³ Cf. ídem, pàgs.229-230.

²⁴ Cf. ídem, pàgs.231-233.

un tot i una part, el tot és més gran. Après què és una línia recta, per oposició a una de corba o trencada, no cal més experiència per a saber que dues línies rectes no tanquen un espai, etc. El mateix coneixement que fa comprendre un primer principi basta per a verificar-lo²⁵.

Mill insisteix: cal convèncer-se que sols calen les lleis d'associació per a esvair la il·lusió que adscriu una peculiar necessitat a les induccions més primerenques des de l'experiència²⁶.

No costa d'admetre la rellevància de la posició de l'autor en tot això com en d'altres detalls (per exemple, la necessitat i la certesa atribuïda a les matemàtiques seria una il·lusió²⁷). Manté la geometria com una ciència deductiva perquè s'apliquen els axiomes i algunes definicions, que són generalitzacions inductives, a casos als quals no poden aplicar-se a primera vista, i per tant es fa successivament (i genialment)²⁸.

²⁵ Cf. ídem, pàgs.232-236.

²⁶ Cf. ídem, pàgs.236-251.

²⁷ Cf. ídem, pàg.224.

²⁸ Cf. ídem, pàgs.214-218.