

F. GRAELL I DENIEL

TRES EXEMPLES D'ESTÀTICA
ESTUDIS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

QUADERNS DE FILOSOFIA

F. GRAELL I DENIEL

TRES EXEMPLES D'ESTÀTICA
ESTUDIS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

40

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2024

2ª edició octubre 2024

[1ª edició gener de 2015]

© F.Graell i Deniel

ISBN: 978-84-938454-8-3

www.dossier.graell

www.qiadernsdefilosofia.cat

www.xtec.cat/~fgraell

E-mail : fgraell@xtec.cat

El web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.

Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

CONTINGUT

Pròleg, 6.

I. UNA PROPOSICIÓ D'ARQUÍMEDES.

- §1. Un text bàsic de la història de l'estàtica, 8.
- §2. La interpretació del postulat VI, 10.
- §3. La mirada inductiva, 11.
- §4. Hi ha un model per a la teoria, 13.
- §5. L'abast de la crítica a *Sobre l'equilibri* I, 6, 14.

II. UN PES AGUANTAT AMB CORDES.

- §1. La composició de potències i la descomposició d'un pes segons Roberval, 18.
 - A. La descomposició d'un pes en l'equilibri d'un cos en un pla inclinat, 18.
 - B. Compliquem l'equilibri d'un cos en un pla inclinat, 21.
 - C. La descomposició d'un pes que penja de dues cordes, 22.
- §2. Concurrència de resultats amb divergència de camins, 24.
- §3. L'exemplarització de la composició de potències i de la descomposició de pesos en Roberval, 26.
- §4. Nota al principi de la composició de forces com a bàsic en l'estàtica, 28.

III. EL TEOREMA DELS TREBALLS VIRTUALS.

- §1. Una estàtica analítica autònoma, 32.
- §2. Esmentem algun precedent, 34.
- §3. Una consideració d'Ernst Mach, 35.
- §4. Nota sobre la rellevància dels infinitesimals, 37.
- §5. Sobre la preeminència del principi del treball virtual, 40.

Pròleg

Històricament s'ha pogut defensar el caràcter bàsic de la palanca a l'hora d'avaluar les altres màquines simples i àdhuc per a les consideracions d'equilibri amb cordes. També els estudiosos han abraçat, sobretot des del *Principia*, la composició i la descomposició de forces com el mitjà heurístic per excel·lència. I Lagrange deu ser el primer que descabdella analíticament l'estàtica a partir del principi dels treballs virtuals.

¿Ha de sorprendre doncs que es desvetlli l'interès per uns afers que remunten, en llur elaboració, fins a Aristòtil i que han format part de la vida quotidiana dels homes si més no en les seves manifestacions més útils tant abans com després de llur estudi?

Ocorre que no sembla possible la filosofia de la ciència sense dos supòsits. El primer fa referència a la necessitat d'una certa exemplarització; és a dir, a mirar una resultant, un cas, una explicació específica, d'un text o d'una aportació. El segon demana de pressuposar que l'ús d'un determinat adquirent no ajuda pas a ponderar allò que es troba particularitzat. La certesa d'on es parteix no hauria d'implicar l'ençegament per a un qualsevol aspecte per manca d'una aproximació escaient, si fos el cas de caler tenir-la en compte.

El lector trobarà en l'escrit un exercici d'aquesta mena. S'espigola aquí i allà per tal d'intentar trobar-se en la cosa mateixa malgrat que, sobretot en el tema del treball virtual, sols n'hi ha una presentació.

Si més no s'ofereix ara unes aportacions que semblen escaients per a afavorir una avaluació de l'estudiós, i que deuen ser necessàries per a poder saber quelcom més de les forces i dels moments, i com a exemple, en el cas de voler ponderar com cal una tasca posterior.

Precisament es pretén de mostrar que una disciplina com l'estàtica permet un munt de suggerències en el camí de comprendre la filosofia de la ciència.

I

UNA PROPOSICIÓ D'ARQUÍMEDES

No sembla difícil que l'estudi del savi de Siracusa sigui l'excusa escaient per a fer reblar dues fites importants: la que permet relligar-nos a la concreció dels afers, i la que situa l'eficàcia del que és una demostració en el seu lloc¹.

§1. Un text bàsic de la història de l'estàtica.

El treball d'Arquímedes *Sobre l'equilibri dels plans* tracta afers d'estàtica, i es compon de dos llibres. El primer introdueix set postulats, i després una colla de proposicions molt rellevants, entre les quals les molt famoses sobre l'equilibri d'una palanca de braços desiguals entre pesos commensurables (I,6) i entre pesos incommensurables (I,7). Els dos llibres són d'un interès extraordinari. Basti ara de transcriure la primera de les proposicions citades, cosa que permet algunes consideracions vàlides per a una munió de casos. Heus-la aquí²:

«Magnituds commensurables s'equilibren des d'unes longituds que tenen la mateixa raó inversa que els pesos.

Heus aquí unes magnituds commensurables, A, B, els centres de les quals <són> A, B; i heus aquí una certa longitud, EA. Com A respecte de B, així sigui una longitud $\Delta\Gamma$ respecte d'una longitud ΓE .

¹ Cf. *Introducció a la geometria euclidiana* i *A propòsit de la cinemàtica* QF 36 i 38.

² La traducció que segueix ha estat feta expressament pel professor Ramon Masià Fornós que, entre d'altres mèrits, és traductor d'Arquímedes (*Sobre l'esfera i el cilindre*, Col·lecció Bernat Metge N°.Vol. 381). Es vol fer constar el present agraïment.

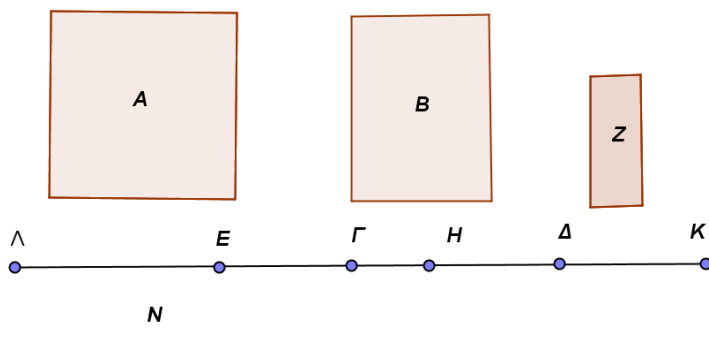
Cal provar que Γ és centre de pes de la magnitud composta d'ambdues, A , B .

En efecte, atès que com A respecte de B , així és $\Delta\Gamma$ respecte de ΓE ; però A és commensurable amb B i, per tant, $\Delta\Gamma$ commensurable amb ΓE ; és a dir, una recta amb una la recta, de manera que hi ha una mesura comuna d' EF , $\Delta\Gamma$. Heus-la aquí doncs: N ; i estiguin posades cadascuna de ΔH , ΔK igual a ΓE , mentre que EA igual a $\Delta\Gamma$. I atès que ΔH és igual a ΓE , també $\Delta\Gamma$ igual a EH , de manera que també EA igual a EH . Per tant ΔH és el doble de $\Delta\Gamma$, mentre que HK de ΓE , de manera que N també mesura cadascuna de <les rectes> ΔH , HK , perquè precisament també <mesura> la meitat.

I atès que com A respecte de B , així és $\Delta\Gamma$ respecte de ΓE , però com $\Delta\Gamma$ respecte de ΓE , així ΔH respecte d' HK , car <és> doble cadascuna de cadascuna, per tant també com A respecte de B , així ΔH respecte de HK . Però quantes vegades és ΔH de N , tantes vegades sigui també A de Z ; per tant, com ΔH respecte de N , així és A respecte de Z . Però com HK respecte de ΔH , així és també B respecte d' A , per igualtat; per tant HK respecte de N , així és B respecte de Z . Per tant HK de N i B de Z són múltiples un mateix nombre de vegades. Però es va provar que A ho és també de Z , de tal manera que Z és mesura comuna d' A , B . Així doncs dividida ΔH en <parts> iguals a N , i A en <parts> iguals a Z , els segments en ΔH de magnitud igual a N seran iguals en nombre als segments en A que són iguals a Z . De manera que sobre cadascun dels segments en ΔH se sobreposa una magnitud igual a Z , que té el centre del pes sobre la meitat del segment, <la suma de> totes les magnituds és igual a A i el centre del pes de la composició de tots serà E , ja que el total és parell en nombre i les <magnituds> sobre cadascun <dels costats> de E són iguals en nombre, són, per igualtat, com EA a EH .

De la mateixa manera provarem també que si sobre cadascun dels segments en HK se sobreposa una magnitud igual a Z que té centre de pes sobre la meitat del segment, <la suma de> totes les magnituds serà igual a B , i el centre de pes de la composició de totes serà Δ . Així

doncs A serà sobreposat sobre E , i mentre que B sobre Δ . Magnituds iguals unes a les altres seran posades doncs sobre una recta, els centres de pes de les quals disten el mateix els uns dels altres, <compostes> en nombre parell.



Així doncs és evident que el centre de pes de la magnitud composta de totes és la dicotomia de les rectes que tenen els centres <de pes> dels punts mitjos de les magnituds. Però atès que són iguals EA a $\Delta\Gamma$, mentre que ΓE a ΔK , per tant també la totalitat <de> $\Delta\Gamma$ a ΓK , de manera que el centre de pes de la magnitud <composta> de totes <és> el punt Γ . Per tant, posada A sobre E , mentre que B sobre Δ , s'equilibrin sobre Γ .

§2. La interpretació del postulat VI.

La proposició d'Arquímedes pressuposa la sedimentació d'experiències perceptives compreses.

Una palanca de braços iguals està en equilibri quan hi ha iguals pesos a igual distàncies contràries del fulcre. Una tal generalització troba el seu contrast efectiu quan s'agafa dos cossos d'igual pes i se'ls balanceja en la màquina del cas.

Algú podria fins i tot provar d'agafar un nombre de cossos, distribuir-los en una palanca de braços iguals, tal i com se suggereix al final de la proposició (els de A i els de B) i assumir que hi ha equilibri.

Tanmateix una interpretació possible³ del postulat VI d'aquest llibre d'Arquímedes («*si unes magnituds s'equilibren a certes longituds [o distàncies, μακός], també <magnituds> iguals a aquestes s'equilibraran a les mateixes longituds*») rau a admetre que els efectes del pes d'un cos són els mateixos si es considera que tot el pes s'aplica en el seu centre de gravetat (centre de pes, en la concepció antiga). Fet i fet no costaria molt de penjar tot el pes de *A* des del punt *E*, i tot el pes de *B* des del punt Δ . En d'altres paraules: l'observació permetria de constatar que hi ha un equilibri, i el postulat – que serveix per a axiomatitzar – ho palesaria sense més.

Al cap i a la fi es resseguiria sempre l'activitat de tota mena d'operaris. En conclusió es demostraria la proposició pel fet que n'hi ha una presentació des d'allò que és més fàcil o admès, i que no s'admetria cap passa rellevant que no fos postulada.

§3. La mirada inductiva.

1. La proposició es descabdella fent ús de la proporció. Certament ho fa a nivell general: la teoria matemàtica s'hi mou sempre, ultra que aquí es pressuposa problemàtiques específiques gregues (els incommensurables) i llurs solucions.

Deixem de banda una qualsevol referència de la irracionalitat⁴. Centrem-nos a considerar ben bé què és una proporció i fem això de manera que es trobi tan arran com sigui possible de les concrecions.

³ Si més no sembla la més encertada des de les indicacions d'O.Toeplitz, recollides i reelaborades per W.Steiner (*Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie. Abt. B: Quellen. I, pàgines 221–244, 1930), la qual han seguit prou estudiosos d'Arquímedes.

⁴ Es remet el lector interessant a la present col·lecció QF4, 7, i 11.

Llavors s'assumeix, per exemple, que A pesa nou vegades Z , i B cinc vegades Z . S'agafa AH i es divideix en nou parts, HK en cinc.

A es penja de E i B de Δ . I, és clar, hi ha les quantitats nou i cinc de pes, i tenim HK de cinc parts i AH de nou parts de longitud. S'ha acabat. Vista així la proporció remetria a una tal concreció última, a gairebé la mateixa operació de balanceig. Aquesta concreció darrera s'hauria de prendre a tall d'una fotografia. La proporció remetria a quelcom que seria posar costat per costat una colla d'enumeracions. Es podria dir que es tractaria d'una mera descripció d'un procés a través de l'ús dels noms que es lliuren a les parts. Hi hauria una mútua imbricació insoluble entre els trets qualitatius i quantitius.

La proporció entre les magnituds s'avaluaria com els noms que es lliurarien al mateix a partir de prendre mides diverses de les magnituds.

La generalització numèrica permetria anar pujant esgraons en la consideració del quantitatiu, etc.

Es podria agafar uns altres pesos, una altra palanca, i repetir el procés. Hi hauria uns nombres concrets, una nova fotografia doncs, etc.

Certament es trobaria una generalització des del cantó dels nombres, que al cap i a la fi és el que anuncia la proposició I,6.

Llavors la segona palanca no es veuria sols a tall d'un reforç de la primera, d'un comprovant seu, d'una confirmació que en demanaria potser d'altres.

Car la qüestió seria que, quan es reiterés el procés amb una nova palanca, l'observador repetiria quelcom que fora el comportament físic paral·lel, un afer que ocorre, que es podria fotografiar de moltes maneres (materials diversos, de dimensions diverses).

2. Hi hauria, sí, inducció. Tanmateix n'hi hauria en l'accepció que hi hauria universal, general, comú, etc. Per la inducció es passaria d'aquest cas al cas general (des d'aquest home als homes), i no pressuposaria que no hi pogués haver excepcions ni cap garantia més enllà d'una significació que no tindria necessitat d'estar pensant un objecte concret.

La clau del coneixement físic rauria en l'observació.

Per tant la percepció de quelcom esdevindria allò més segur, les aigües que nodreixen totes les savieses. Les regles de la inducció hi tindrien el fonament.

§4. Hi ha un model per a la teoria.

1. Tanmateix la demostració arquimediana no seria pas inductiva sinó un paradigma de l'aproximació teòrica. Les magnituds A i B , se les comprèn a tall de meres magnituds, i la prova rau que aquí no hi ha cap esment a alguna irregularitat seva, diferència de densitat, presència de mesures inexactes, errors, etc., i naturalment no s'hi palesa cap exemple particular. Les magnituds treballen com a conceptes ideals.

Al costat seu la proporcionalitat geomètrica, sobretot entre els grecs, es mou a dos nivells, el de representació i el numèric. El desig d'evitar nombres irracionals feu resseguir més estretament les raons i les proporcions a nivell representatiu, tot i que al capdavant això no pot sinó exemplaritzar relacions numèriques.

Els nombres, exemplaritzats per lligams representatius, no deixen d'estar suposats. Quan es diu, per exemple, «atès que com A respecte de B , així és AI respecte de IE », s'hi palesa ja un domini numèric que no sols no es refereix a cap representació particular, sinó que àdhuc ha desaparegut l'explicitació numèrica genèrica corresponent. Tot això, però, no és sols un afer d'inducció numèrica, que ho és en l'accepció que s'ha après

per reiteració, sinó que pressuposa una idealitat numèrica perquè hi ha una *significació* numèric genèrica que no fa referència a cap cas concret ni s'explicita del tot per si mateixa. Certament la representació de la proporció lliura una plasticitat a l'esmentada proporció, però no pot superar que s'hi ofereix una idealitat numèrica.

Magnituds i raons-proporcions geomètriques en la proposició I,6 es mouen a un nivell impossible d'abastar perceptivament, i és així com hi ha *teoria*. És que, el que ara apareix en aquest proposició, es podria anar resseguint en les que van contenint els dos llibres de *Sobre l'equilibri dels plans*.

No és estrany que s'hagi enllaçat el treball de Galileu en la cinemàtic amb el d'Arquímedes en l'estàtica.

2. La teoria movent-se a nivell ideal, no avançaria sense el coneixement del que porta a les mans: el concepte de magnitud, com la noció dels nombre, no orienten un raonament, no avançarien cap a alguna conclusió. La suggerència, en aquest estadi de la proposició, la lliuren els fet experiencials: allò que ocorre en balances particulars amb pesos particulars, no perquè el discurs teòric rebi tot el que ofereix d'això, sinó perquè permeten orientar-lo quan està capficat a fer el seguiment del particular des del que sols és pensant o expressat.

§5. L'abast de la crítica a *Sobre l'equilibri* I,6.

S'hi palesa doncs quelcom vàlid per al conjunt de la ciència, àdhuc del coneixement, a diferents nivells. El geni de Siracusa ja pensa en quantitats generalitzades, ja domina el càlcul de proporcions, no té cap inconvenient a pensar afers des d'aquest aspecte seu que ja s'ha autonomitzat. Tampoc no es tracta aquí de copsar com ell podria haver interpretat l'ús de les proporcions en els afers estàtics, sinó de palesar, al nivell de la seva

exposició, que hi ha un seguiment que està rumiant quelcom ideal mentre hi troba una coherència.

La proposició ha rebut objeccions. Malgrat que caldria discutir objecció per objecció què ha implicat el fet de superar-la, per tant de perfeccionar la coherència de l'escrit, i la circumstància d'haver fet possible d'anar mantenint l'enunciat com a correcte. Car molt possiblement tot allò que envolta l'aportació arquimediana valdria també per a no importa quina complementació es faci, i sembla que sols s'admet la validesa conclusiva d'un raonament com a inapel·lable quan no se'l qüestiona més.

Hi ha nivells i nivells de crítica. I que el progrés del que se sap depèn sempre dels altres tant per allò que defensaven malgrat que ara es rebutja, com per allò que explicaven i que menava pel camí que ara es continua en l'accepció de seguir-ho, amb els perfeccionaments que es vulgui.

L'afirmació de l'equilibri d'uns cossos en una palanca quan són inversament proporcionals a la distància des de la qual es troben suspesos deu gaudir d'una base experimental com deu fer-ho l'equilibri en unes balances elementals.

¿S'assumeix sense crítica que la càrrega que aguanta el fulcre de la palanca és igual a la suma del pes dels dos cossos?

¿Fa ús d'un principi de superposició d'estats d'equilibri sense fer èmfasi que això esdevé un postulat experimental?

El postulat primer (pesos iguals suspesos a igual distància del fulcre estan en equilibri) no diu pas que els efectes d'un pes siguin proporcionals al braç L de la palanca, i es podria assumir, sembla, qualsevol llei de la forma $Pf(L)$. ¿No s'hi pressuposa doncs, a prop.I.6, que els efectes d'un pes són proporcionals a la distància L on és suspès des del punt de suport?

Tot plegat depèn també de la manera de concebre el paper de la teoria. Quan s'assumeix una qualsevol axiomatització és sols una manera de presentar els afers, que no deuen pas llur validesa

als axiomes, sinó que aquests la manllevem al descabdellament de la ciència; quan es demostra d'acord amb un criteri selectiu d'aportar el que convé, el que es troba més a la mà en un qualsevol sentit, el que s'acorda amb d'altres casos, etc., llavors s'és capaç de veure-hi més enllà, i l'estudiós és capaç d'adonar-se que l'admissió d'una millora pot pressuposar que no calgui insistir en el rebuig d'una qualsevol aportació pel fet que inclou un contingent imprevisible d'afers polèmics. Un tal investigador és capaç de defensar l'estricta diferència entre revisar els resultats, i si cal superar-los, modificar-los, etc., i el fet que el nivell d'assumpcions de l'escrit que estudia no sigui el seu, que no segueixi els seus supòsits o prejudicis. Aquell home de ciència és capaç de mantenir que la perfectibilitat reiterada d'un discurs en prou direccions – sense que això no impliqui necessàriament la pretensió d'abandonar la provisionalitat – no impedeix de considerar la validesa d'una demostració.

II

UN PES AGUANTAT AMB CORDES

La noció de força i la llei de la composició de forces deuen ser dels afers més rellevants de la mecànica i de la història de la ciència i tot.

L'èxit de Newton, que es palesà en les lleis del moviment, feu abandonar certament d'altres concepcions. Per exemple, en Aristòtil l'efecte d'una δύναμις o ἰσχύς es mesura pel producte del cos i de la velocitat que adquireix; una mateixa potència en un cos que sigui la meitat d'un altre farà que recorri una distància doble en el mateix temps, o el mateix recorregut en la meitat del temps, tal i com es diu en la *Física* i en el *Tractat dels Cels*. Fet i fet la proporcionalitat entre forces i velocitats apareix sovint al llarg de la història de la mecànica⁵.

Sigui com sigui la composició de moviments, i potser algun tipus de composició de potències, ja es troba en Aristòtil, que no concebé una estàtica independent del conjunt dels seus treballs físics.

Deixant ara l'abast de les lleis de la mecànica clàssica tal i com es troben en els *Principia*⁶, val la pena de circumscriure's a un exemple rellevant, que és anterior, de consideracions d'equilibri, que pot estimar-se com la justificació reeixida de la llei del paral·lelogram (o de la composició) de forces.

⁵El tractat apòcrif aristotelitzant *Problemes de mecànica* resol d'això l'equilibri en una palanca recta de braços desiguals. Car el cos que cau per un braç recorreria un arc més gran o més petit simultani al del recorregut per l'altre cos sobre el segon braç. Les velocitats essent com els braços, hi ha equilibri quan els productes dels cossos per la velocitats (o pels braços) és igual; altrament la palanca s'inclina pel braç on el producte es major.

⁶Cf. *Anotacions marginals als Principia Mathematica de Newton* QF14, *Una aproximació a la força* QF41, *Dos assaigs de mecànica newtoniana* QF52.

§1. La composició de potències i la descomposició d'un pes segons Roberval.

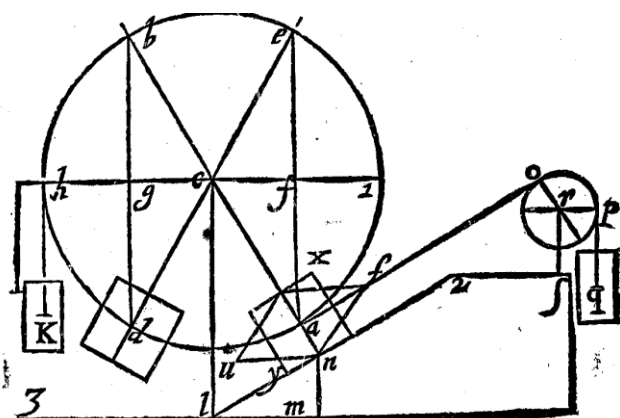
Gilles Personne de Roberval (1602-1675) ho feu en el seu opuscle *Traité de Méchanique*, que Marin Mersenne incorporà en la seva obra *Harmonie universelle* (1636 i 1637). L'autor, familiaritzat amb l'estàtica de Simon Stevin, coneixedor dels mètodes de Galileu en la seva *Mecànica*, i amb una introducció del concepte de moment que l'apropa a Giovanni Battista Benedetti, parteix com a bon geòmetra de cinc axiomes, entre els continguts dels quals s'hi parla de com es comporten els pesos i les potències segons el lloc on són; per exemple, el tercer axioma explicita que una mateixa potència o pes col·locada en un qualsevol punt d'una línia de direcció, tirarà o empenyerà igual; el quart estableix que dos pesos iguals, o dues potències iguals, estirant o impulsant a iguals distàncies, tiraran o empenyeran igual, sempre que les línies de direcció dels pesos i de les potències es trobin inclinades d'una manera semblant (això és, que facin angles iguals) amb les distàncies per les quals tiren o empenyen.

En acabant els axiomes tenim la primera proposició:

[A. LA DESCOMPOSICIÓ D'UN PES EN L'EQUILIBRI D'UN COS EN UN PLA INCLINAT].

«PROPOSICIÓ 1.

Estant donat un pla inclinat a l'horitzó, i l'angle de la inclinació estant conegut, trobar una potència [això és, una força] que tirant, o empenyent, per una línia de direcció paral·lela al pla inclinat sostingui un pes donat sobre el mateix pla».



(reproduït de l'edició de Merenne)

Hi ha un pla inclinat LN [en el gràfic, no en el seu escrit, de Roberval totes les lletres són en minúscula] on es col·loca el pes A, i una corda AO, que passa per una corriola que aguanta un pes Q. Les dades són l'angle NLM i el pes Q: se' l pren de manera que LN és a NM com tot el pes A és al pes Q [notem equivalència: la força-pes A es descompon – en la direcció de la inclinació – d'acord amb $A \sin \alpha$, essent α l'angle de la inclinació del pla]. Es diu que serà aquest pes Q que impedirà que el pes llisqui pel pla.

No fem ara cas, afegeix, si el pes Q equilibra A sobre el pla inclinat o no, i fins i tot oblidem ara Q i la corda AO.

Imaginem que BCA és una balança inclinada de braços iguals. Llavors hi ha un pes D igual a A, que impedeix que el cos baixi pel pla inclinat LN si no hi hagués la balança BCA [l'efecte útil de D és $D \times GC$, cosa admesa per un escoli del tercer axioma de Roberval]. Així el pes D, pengi de B o de G, tira tant com el pes Q⁷.

⁷ La introducció d'un pes D igual al pes A implica que es col·loqui de tal manera el pla inclinat que faci possible que A no llisqui pel pla (tal com no lliscava amb Q). És a dir, que s'hagi aconseguit això: d'aquí que després hi porti a col·lació el nou pes K igual a Q, i que s'encamini cap a la resultant final.

Els triangles LMN i CFA són semblants. Per tant LN és a NM com CA és a CF, o bé com CH és a CG. Llavors, sabent que el pes total A és a Q, com LN és a NM, A és a Q com CH és a CG.

Col·loquem a H un pes K igual a Q, i se sap que el pes D (que penja de B) té el mateix efecte que si pengés de G [*escoli del tercer axioma*]. Aleshores, i continuant imaginant, per Arquímedes (prop. I,6 i I,7) una balança amb K i D amb braços CH i CG es trobaria en equilibri.

Ara bé: la potència D és igual a la A i fa que no llisqui pel pla inclinat ja es consideri que D actua en B com si actua en G; i ara D [*imaginàriament*] s'equilibra amb K, igual a Q.

Però la potència D penjada a G faria també que A no llisqui pel pla i, penjada en B [*en una balança recta inclinada*], es contrapesa igualment al pes A sobre el braç CA [*en una balança inclinada BCA*]. Per aquesta raó la potència K sobre la distància CH contrapesa el pes A sobre el braç CA [*en una imaginària balança trencada HCA, per tant $K \times HC = A \times CF$*]. I la mateixa potència K sobre la distància CH substitueix la potència D penjada sobre la distància CB o CG, mentre les balances [*respectives imaginades*] romanen en equilibri.

Es comprèn que la potència Q, igual a la K, tirant per la corda AO sobre CA faria de potència d'un braç de balança [*imaginària i en equilibri*] que tindria K tirant des del braç HC igual a CA [*en una barra trencada imaginada HCA*]. Per tant hom pot substituir un braç per l'altre.

En el raonament el pes Q en lloc de K faria de contrapès de A perquè no llisqués. I contrapesa sobre AO el pes K sobre HC.

La potència Q impediria doncs que el pes A llisqués pel pla NL.

Per tant el cos A en equilibri reposa en part sobre el pla LN, i en part la potència Q en sosté el mateix pes sobre el pla LN d'acord amb una proporció (LN és a NM el que A és a Q).

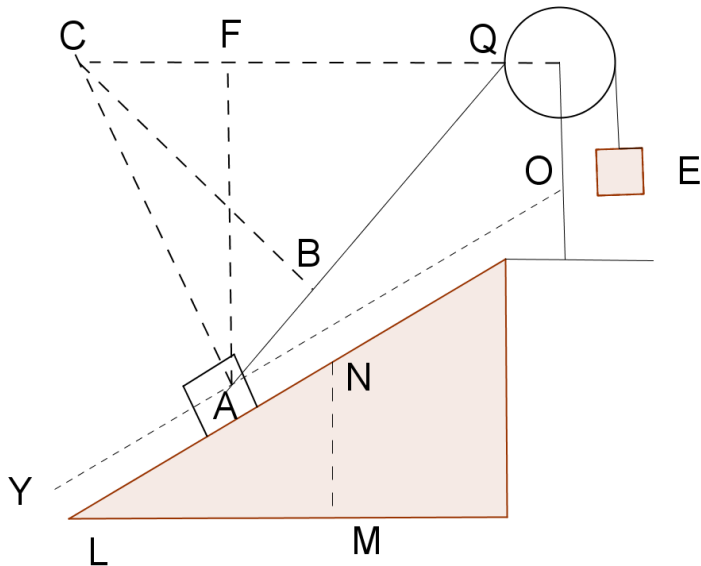
[B. COMPLIQUEM L'EQUILIBRI D'UN COS EN UN PLA INCLINAT].

La proposició II presenta el mateix problema que l'anterior però en el cas que la potència que aguanta el cos no té la seva línia d'acció paral·lela a la inclinació del pla.

Com abans es tracta d'un pes A damunt del pla inclinat LN, ara amb una corda AQ que el manté en equilibri, i es demana la potència Q necessària (o el pes E).

Es lliura l'angle d'inclinació NLM, l'angle OAQ (OAY essent una línia paral·lela a LN que passa pel «centre de pesantor» del pes A). Es fa CB perpendicular a AQ, CA perpendicular a YAO (i a LN), FA vertical pel punt esmentat de A.

Es vol defensar que, si se suposa una potència Q (o un pes E) tal que CB és a CF, el que el pes A és a la potència Q ($A \times CF = Q \times CB$), llavors aquest valor de Q és el buscat.



[En efecte la primera proposició permetia de suposar una potència O que tira, des de la corda AO, del braç CA; i llavors se sabia que $O \times CA = K \times HC = D \times CG = A \times CF$ (cf. Prop.I). Per tant CF és a CA el que la potència O és a A ($A \times CF = O \times CA$)].

Trobem doncs una potència Q tal que com CB sigui respecte a CF així sigui A ho sigui respecte de Q.

Llavors la potència Q, tirant per la línia QA, oblíqua al braç de la balança CA, tira el mateix que per la distància CB representant el braç de la nova balança [per l'axioma III].

Si $A \times CF = Q \times CB$ ⁸ i $A \times CF = O \times CA$, llavors $Q \times CB = O \times CA$, i per tant, per Arquímedes (prop. I,6 i 7), les dues potències tirarien igual en una balança imaginària ($O \times CA = Q \times CB$), la qual cosa implica que les dues impedeixen igualment que el cos llisqui pel pla inclinat, i per tant Q és la potència (o E el pes) que se cercava.

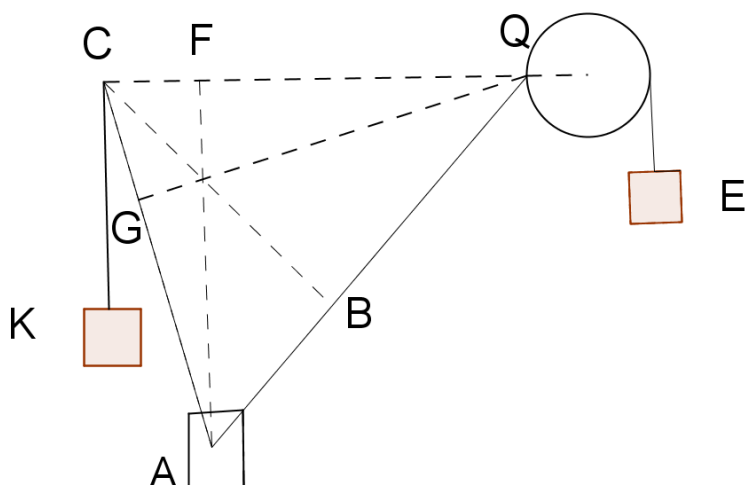
Aquesta primera demostració val quan la corda es troba en l'angle que fan AF i AO. Una segona prova, que segueix les mateixes passes, ho mostra quan la corda està en l'angle entre AO i la continuació de la línia CA cap a LM.

[C. LA DESCOMPOSICIÓ DEL PES QUE PENJA DE DUES CORDES].

Basti finalment fer un cop d'ull a la tercera proposició per a avaluar la destresa de l'autor:

«Estant donats un pes sostingut per dues cordes, o per uns suports, la posició dels quals sigui donada: trobar quina potència cal per a cada corda, o per a cada suport».

⁸ La igualtat implica que A ja està en equilibri amb Q, és a dir, que aquesta dada és donada.



La proposició aplica a una corda i a l'altra el que s'acaba de demostrar en la segona proposició. És a dir, s'ha vist que, si CA és el braç d'una palanca en el qual el pes A, retintut per la corda AQ, [altrament, cf. Prop.II, lliscaria pel pla inclinat LN perpendicular a CA], llavors $A \times CF = Q \times CB$, tal i com s'ha dit dalt. El pes A és sostingut en part pel pla inclinat i en part per la corda QA amb la potència Q (o el pes E).

Però si ara es considera el pes A damunt d'un pla inclinat, al costat oposat del primer pla inclinat, que li és enfrontat, i equilibrat gràcies al braç de balança AQ, s'admetrà llavors que $A \times QF = C \times GQ$. El pes A és sostingut ara per un pla inclinat i en part per la corda CA amb la potència C (o el pes K).

Com estan donats el pes A, la posició de cada corda, és a dir, l'angle CAQ, les cordes AQ i AC, amb els angles CAF, QAF, llavors les perpendiculars CB, QG, CF i QF són donades, i les seves raons. Per tant les raons de A amb les potències Q i C (o els pesos E i K).

La proposició es prova primer per a l'angle CAQ agut, i després quan és recte i quan és obtús. En tots els casos hi ha el mateix mitjà constructiu. Per tant es pot generalitzar (com diu el Corol·lari de la proposició).

§2. Concurrencia de resultats amb divergència de camins.

1. La prova de la composició i descomposició del pes d'un cos mantingut en equilibri per dues cordes usa el pla inclinat com un mitjà, i per a aquest ha calgut les diferents balances. Aquesta remissió a la balança, que és el darrer terme de remissió, es troba ja als aristotilitzants *Problemes mecànics*.

El treball de Roberval esdevé prou il·luminador en tot això. Plau una comprensió del fenomen en clau de veure-hi la possibilitat de pensar-hi balances. Les màquines s'han convertit en llocs on s'hi pot veure possibilitats balancístiques: hi ha una balancització de la pluralitat dels esdeveniments, per tant arreu hi ha potències i braços.

Certament això pressuposa si més no que els afers on hi ha pesos, potències, etc., en plans inclinats i en cordes es comprenen des de les balances: és a dir, que tot plegat són manifestacions varies que es deriven del mateix capteniment, quelcom prou bell i que fa obrir els ulls a comprendre-ho.

Retrobem de bell nou aquí un exercici teòric, que es vol axiomàtic, i que recull la *teoria* de la balança, per exemple, comparable de com la presentà Arquímedes (Roberval suposa el lector coneixedor de l'obra d'Arquímedes i d'altres). S'usa doncs allò que ja ha esta ordenat idealment per a prosseguir el comportament de les potències i dels pesos en plans inclinats i en cordes. En aquesta accepció el treball de l'autor és un model d'exercici intel·lectual amb les idealitats del cas (pesos conclosos, absència de fregments, proporcionalitat, etc.).

2. Notem així mateix com la descomposició de potències de Roberval convergeix amb la de forces de Newton.

En l'esquema del primer s'arriba a:

$$\frac{CB}{CF} = \frac{A}{Q} \quad \frac{GQ}{QF} = \frac{A}{C}.$$

Llavors: $A \times (CF + QF) = Q \times CB + C \times GQ,$

$$A = Q \times \frac{CB}{CF} + C \times \frac{GQ}{CF}.$$

Suma que es podria expressar així:

$$A = Q \times \sin \widehat{CQB} + C \times \sin \widehat{GCQ}.$$

Tanmateix això equival exactament a:

$$= Q \times \cos \widehat{FAQ} + C \times \cos \widehat{CAF},$$

dues forces C i Q que tiren de les cordes cap amunt, amb una resultant que segueix la diagonal del paral·lelogram de forces de Newton [tenint en compte que $Q \times \cos(90 - \widehat{FAQ})$ i $C \times \cos(90 - \widehat{FAC})$ són iguals en valors absoluts, però oposats en sentit] – llavors, per exemple, donat un pes que penja A , i els angles de les cordes respecte de la vertical, es pot arribar a les forces que el descomponen tot resolent el sistema de dues equacions amb dues incògnites.

3. Hi ha una aportació des del pla inclinat i, més enllà, des de les balances, al costat de treballar amb proporcions geomètriques, etc.

Així mateix, i com a *suggerència* per a un treball *teòric*, s'hi troba consideracions experimentals pel fet, per exemple, que es compta que se sap el que passa quan les cordes no aconsegueixen el fet de trobar-se tibant del cos en posicions convenients. S'hi suposa l'observació dels vaivens d'un cos, no sols en balances, sinó en plans inclinats i en dispositius de cordes col·locades de totes les maneres possibles.

Roberval fa certament molt més: basti fer esment que l'escoli VIII sembla el resum d'una segona demostració de la

descomposició a partir de consideracions que, usant un llenguatge més actual, es deriven de comparar el treball de les potències i el treball de les resistències (un afer la pista del qual duria al segle XII, i a Jordanus de Nemore [1225-1260], passant pel Precursor de Leonardo da Vinci, i d'altres). S'és a prop de l'univers de les forces i dels desplaçaments virtuals, etc.

§3. L'exemplarització de la composició de potències i de la descomposició de pesos en Roberval.

El breu esment de l'obra de Roberval permet descobrir amb sorpresa la descomposició dels pesos i la composició de potències des d'una concepció prenewtoniana. Si hi ha un seguiment molt més directe del comportament de les màquines simples (palanques i balances, politges, plans inclinats, cordes de tot tipus), això no es fa en detriment de la *teoria*, és a dir, d'una concepció ideal de materials i de proporcions a partir d'un model primer, el de la balança.

Car conté prou dels trets que caracteritzen el coneixement científic: hi ha una idealització física, per tant no hi ha ròssecs; una idealització geomètrica, s'exposa una llei general per a la composició i descomposició de potències, s'hi usen resultats acceptats d'altres, es presenta axiomàticament l'afer, etc. Per tant segueix un llegat rebut i l'engreixa.

Tanmateix val la pena de notar la diferent manera de copsar una potència i el pes d'un prenewtonià respecte del seguidor de la força a partir del cos i de l'acceleració.

Ocorre que en aquest darrer hi ha molta elaboració de nocions bàsiques: no tant perquè l'equilibri d'un cos, per exemple, sembli impossible de ser comprès des d'acceleracions, quan fet i fet les dinàmiques aristotelitzants ho feien a partir de les respectives velocitats, com pel fet que en Newton es tracta més aviat que cal dissoldre el fet holístic i presencial del pes i de

les potències respectives a partir de prendre'n distància: car la força se sap pels efectes de canvi en la magnitud d'un desplaçament, i tota la proporció que hi ha no en lleva la característica quan es fa també proporcional a una nova magnitud, la massa.

¿Per ventura cal concloure'n que la nova aproximació a partir d'una nova dinàmica deixa sense valor allò que feu Roberval? Qui ho defensés podria ser titllat segurament d'unilateral. El pas que duu a tenir en compte balances imaginàries per a fer venir bé raons oportunes, i així ser capaç de trobar la potència aplicada a un corda, o a dues, tot això fent el seu camí, no pot ser simplement anul·lat i fet esvair per la nova mecànica quan aquesta analitza els esdeveniments d'acord amb d'altres paràmetres resultants d'un procés diferent. Les maneres d'apropar-se a la llei de la composició de forces, caldria més aviat avaluar-les com l'expressió d'una congruència en el desplegament de les habilitats a l'hora de repensar des de perspectives varies els afers, malgrat haver d'admetre de seguida l'abast més i més ampli que permeten les noves concepcions i de denunciar, des de les noves adquisicions, la manca de discerniment. No falseja pròpiament res, sinó que se supera, i arreu hi va havent una congruència pel fet de repensar-ho tot amb nova destresa intel·lectual.

Torna a ser vàlid el que es defensà dalt amb la demostració d'Arquímedes i el que es comentarà més avall a propòsit del treball virtual. És a dir: que hi ha diferents nivells de prova o demostració: que es troba una congruència entre tots els afers que han resultat vàlids o eficaços per al coneixement que pretén lliurar una teoria dels esdeveniments naturals (i això fora aplicable si mes no en part a l'explicació aristotèlica i tot); que cal no sols contraposar les resultant dels varis treballs, sinó també assumir allò que hi ha que els conjunta. Una ona sola seria inútil sense les altres per a fer un mar. La tradició

occidental ha anat avançant cap a la seva platja des de l'aportació dels altres. La seva congruència també és una resultant de la història de moltes altres congruències⁹.

§4. Nota al principi de la composició de forces com a bàsic en l'estàtica.

Certament sempre es deu poder defensar una estàtica basada en la llei de la composició de forces. Històricament – per exemple – Pierre Varignon (1654-1722) ho feu tot acceptant els principis de la dinàmica aristotèlica, des de la qual la llei de la composició de forces no li sembla oferir molts problemes. Car pot ser reduïda a la llei de composició de velocitats i pot ser obtinguda per un mètode comparable a l'usat per Roberval. Una vegada establert així el principi de la composició de forces, Varignon s'esforça a reduir tots els possibles casos d'equilibri en màquines simples a aquell principi¹⁰.

L'obra de Varignon té doncs un interès per diferents motius. Basti ara l'esment que fa de la potència i de la força en

⁹ No gaudint d'antecedents tan rellevants com els proposats per Roberval, ¿s'assumiria sense dificultats la composició i la descomposició de forces d'arrel newtoniana? L'explicació que fa de la composició per la superposició d'acceleracions faria comprendre quelcom que ja s'ha copsat teòricament – i la descomposició d'un pes per la distribució d'acceleracions ho faria en unes circumstàncies semblants.

En d'altres paraules: Newton articularia una teoria, totes les peces del qual tindrien també un suport en afers admesos, que permetria explicar els esdeveniments a partir de la llei del paral·lelogram.

Per tant hi hauria una manifestació de ciència, és a dir, d'una elaboració d'uns pensaments imbricats eficaços per a comprendre un afer. D'aquí que no calgués esbrinar si la llei del paral·lelogram newtoniana és experimental o no: mai no ho hauria estat.

¹⁰ Cf. Pierre Duhem, *Les origenes de la statique*, A.Hermann, Paris, 1905/6, tom II, pàg.254-276.

començar a partir de les definicions, els axiomes, els postulats i els lemes. Diu: «*On appelle Machine tout instrument dont on peut se servir à mouvoir un corps; et Puissance, tout ce qui l'y peut faire servir, ou en general tout ce qui est capable de mouvoir un corps, soit à l'aide d'une Machine, ou non. Tout ce que cette puissance exerce de force pour cela s'appelle sa force absolue, laquelle se prend aussi pour cette Puissance, lorsque cette force est tout ce que celle même Puissance est capable d'en exercer*»¹¹.

La importància de la llei de la composició de forces concurrents es palesa en el fet que una part important de contemporanis la prenen com el principi de l'estàtica, mentre que el 1687 aparegueren els *Principia* amb la nova concepció de la força i de la llei de la composició.

¿Es pot assumir a partir de Newton que la llei de la composició de forces fa de principi de tota l'estàtica?

La resposta dependria en qualsevol cas del pes que es volgués donar a allò que s'anomena «demostració» i a allò que es volgués assumir explícitament o implícitament. Si més no sembla que l'assumpció d'una suma de forces total nul·la, i d'una altra de moments nul·la, basti per a l'equilibri intern d'un sistema de forces aplicades en un cos. I a nivell pràctic hi ha una clara preferència a l'hora de l'estudi de l'estàtica a favor de forces i de moments.

D'altra banda es pot arribar a demostrar l'equilibri d'un tot a través dels treballs virtuals. Ocorre que llavors apareix la qüestió de la necessitat de fer seu el teorema (o principi) dels treballs virtuals. ¿Cal demostrar-lo? Hi ha criteris diferents de resposta. Si més no totes les demostracions no ocasionals¹² posteriors a

¹¹ Pierre Varignon, *Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en 1687*, Paris, Jombert, 1725, pàg.3.

¹² Fàcilment s'admet que el teorema del treball virtual prova la llei de la balança i a l'inrevés, i això valdria per a d'altres màquines. Cf., per exemple,

l'autor anglès d'aquest teorema s'han basat en la composició de forces de Newton, la qual cosa faria pel cap baix que s'avalués la llei del paral·lelogram com a bàsica per a tota l'estàtica.

Passem a examinar una mica tot això dels treballs virtuals.

M.Duhamel, *Cours de mécanique*, Mallet-Bachelier, París, 1862 (3^a), tom I (hi ha l'estàtica i la dinàmica), pàgs.198-200.

III

EL TEOREMA DELS TREBALLS VIRTUALS

La *Mecànica analítica* de Lagrange (1^a edició 1788-89) conté una obra sistemàtica de l'estàtica, recull el bo i millor de les aportacions anteriors, i s'ofereix com un treball analític que arrenca del principi de les velocitats virtuals. Hi llegim el següent:

«El principi de les velocitats virtuals pot lliurar-se de manera molt general de la següent manera:

Si un sistema qualsevol de tants cossos o punts com es vulgui, cadascun tirat per potències qualssevol, és en equilibri, i que hom doni a aquest sistema un petit moviment qualsevol, en virtut del qual cada punt recorre un espai infinitament petit que expressarà la seva velocitat virtual, la suma de les potències multiplicada cadascuna per l'espai que el punt, on és aplicada, recorre seguint la direcció d'aquesta mateixa potència serà sempre igual a zero, tot comptant com a positiu els petits espais recorreguts en el sentit de les potències, i com a negatiu els espais recorreguts en un sentit oposat.

Jean Bernoulli és el primer, que sàpiga, que ha apercebut aquesta gran generalitat del principi de les velocitats virtuals, i la seva utilitat per a resoldre els problemes de l'estàtica. És això que hom veu en una de les seves cartes a Varignon, datada el 1717, que aquest darrer ha col·locat al començament de la secció novena de la seva nova mecànica, secció dedicada tota entera a mostrar per diferents aplicacions la veritat i l'ús del principi del qual es tracta.

Aquest mateix principi ha donat lloc després a aquell que Maupertuis ha proposat en les Memòries de l'Acadèmia de les Ciències de París per a l'any 1740, amb el nom de Llei de repòs, i que Euler ha descabdellat més i fet més general en les Memòries de l'Acadèmia de Berlín per a l'any 1751. Per fi encara és el mateix principi que serveix de base a allò que Courtivron ha lliurat en les Memòries de l'Acadèmia de Ciències de París per a 1748 i 1749.

I en general crec poder avançar que tots els principis generals que es podran potser encara descobrir en la ciència de l'equilibri no seran sinó el mateix principi de les velocitats virtuals, vistos diferentment, i del qual no diferiran més que en l'expressió.

Però aquest principi és no sols molt simple en ell mateix i molt general: a més té l'avantatge preciós i únic de poder traduir-se en una fórmula general que recull tots els problemes que es poden proposar sobre l'equilibri dels cossos. Exposarem aquesta fórmula en tota la seva extensió: procurarem fins i tot de presentar-la d'una manera encara més general de com hom ho ha fet fins al dia present, i de donar-ne unes noves aplicacions»¹³.

§1. Una estàtica analítica autònoma.

Des d'algun punt de vist el principi¹⁴ apuntaria dos fets que sols aparentment semblen fàcils d'assumir quan es parla de punts (o dels centres de massa d'uns cossos): el primer, que la resultant del conjunt de forces que actuen en un sistema ha de ser nul·la per a estar en equilibri; el segon, que el sistema que està en equilibri permet una expressió analítica que inclogui la suma, que és zero, del producte de cadascuna de les forces implicades per un espai infinitesimal, i seguint la direcció de la respectiva força.

Hi ha un equilibri pel cantó de les forces i una estratagema lúcida pel cantó dels infinitesimals.

La noció de força, tal i com s'admet des de llavors, fou una troballa de Newton que permet moltes digressions.

¹³ J.L.Lagrange, *Mécanique analytique. Nouvelle édition revue i augmentée par l'auteur*, Tome Premier, Courcier, París, 1811, pàgs.22-23.

¹⁴ En parlem com a principi pel fet que Lagrange ho feu. Certament s'ha provat de demostrar a partir d'altres supòsits i llavors no seria pas un principi sinó un teorema. Més avall se'n dirà quelcom.

Per la seva banda aquell infinitesimal, que s'anomena «desplaçament virtual» («velocitat virtual» en Lagrange)¹⁵, és independent del temps, s'expressa a través d'una específica delta minúscula enlloc de la minúscula del diferencial precisament per a reblar-hi que es fa al marge del temps, i segueix un càlcul analític paral·lel que no es fa funció del temps.

La gràcia del principi dels treballs virtuals rau a ser, en un sentit, una resultant, a més a més de ser un principi en un sentit diferent. Car és la conseqüència del progressiu domini de l'àlgebra i de l'anàlisi, en especial les dels segles XVII, XVIII, i sobretot del fet de dur a terme la tasca analítica d'ajuntar en un sistema, que sempre és obert, un reguitzell de fórmules coherentment travades capaces de lliurar expressions generals als plurals afers de l'estàtica des de quelcom que sembla prou simple.

L'estàtica esdevindria, també aquí, amb el principi dels treballs virtuals, i des d'aquests, una disciplina regida rígidament per l'anàlisi de tal manera que convertiria el que fa en un ideari.

No es miraria immediatament de ser útil en les tasques pràctiques perquè s'atalaiaria de seguir els lligams entre supòsits d'ordre ideal.

Malgrat això aquest principi de l'estàtica i les seqüències analítiques que proposa s'haurien assumit per llur caràcter fructífer i perquè generalitzen en moltes accepcions i per tant també unifiquen allò que semblava difícil d'aplegar. El seu èxit com a estàtica analítica rauria en el seu mateix exercici.

¹⁵ En haver-hi un desplaçament virtual, la força que té aplicada fa, com va dir Coriolis, un treball, el treball virtual. Avui el principi es diu dels treballs virtuals.

§3. Esmentem algun precedent rellevant.

L'aparició del principi del treball virtual, i dels desplaçaments corresponents, en la història del pensament remetria molt enllà. Versemblantment amb el rerefons de remetre a trajectes (anomenem-ho, amb el llenguatge actual, mètode dels desplaçaments virtual), com fora el cas de Jordanus, de Descartes, de Wallis, o a velocitats (amb el llenguatge de principis del XVIII, mètode de les velocitats virtuals), que llavors se seguiria més aviat un aspecte peripatètic, i que inclouria Charistion (segle II aC), Galileu i el mateix Johann (o Jean) Bernoulli (avui ja s'ha abandonat la referència aristotèlica de la velocitat), s'hi palesa un solatge d'aportacions¹⁶.

Alguna referència anterior a Bernoulli permet copsar-hi un rerefons d'innovació. John Wallis (1616-1703), en la seva obra *Mechanica, sive de motu. Tractatus geometricus* (1670-1671), defensa (*Pars prima*, cap.II) per als cossos que cauen o que pugen una mesura de la seva caiguda o pujada: el producte del seu pes pel recorregut que fan quan cauen o pugen. Quan hi ha diferents cossos es calcula la suma de totes les caigudes i de totes les pujades. Si la primera és més gran el seu excés representa la magnitud total de caiguda, si la segona, la magnitud total de pujada. Si són iguals els sistema roman en equilibri.

Wallis fa quelcom més: estén això referit a la gravetat a una qualsevol altra força motor¹⁷, que llavors es mesura pel

¹⁶ El lector pot consultar amb profit el llibre de Pierre Duhem citat, especialment tot el capítol XVII dedicat a la sistematització de les lleis de l'estàtica.

¹⁷ En la terminologia de John Wallis: «*Gravitas, est vis motrix, deorsum: sive, ad centrum Terrae*», «*Vim motricem, vel etiam Vim simpliciter, appello Potentiam efficiendi motum*», «*Momentum, appello, id quod motui efficiendo conducit*» (definicions XII, V i III, respectivament), *Mechanica, sive de motu*.

desplaçament efectuat en la direcció d'aquesta força (i la força contrària pel desplaçament en una direcció oposada). Per tant el conjunt del moviment de cadascuna de les forces s'obté pel càlcul del producte de la força respectiva pel seu desplaçament.

Ha establert doncs el principi que li serveix de base per a la seva estàtica, idees que caldria esperar més de quaranta anys perquè tornin a aparèixer amb la carta de Bernoulli.

Certament Wallis ha de pressuposar que les forces són constants i els desplaçament en línia recta (també és veritat que no li són estranyes les consideracions infinitesimals).

L'univers que fa present l'anglès és doncs aquell que amb terminologia molt posterior s'anomenarà treball. Versemblantment no sembla desencertat de veure-hi l'esforç de comprendre l'esdeveniment que ocorre amb les forces com a treball, i el fet que la igualtat de treballs en sentit oposats fan l'equilibri. L'equilibri pressuposaria la igualtat entre treballs virtuals.

3§. Una consideració d'Ernst Mach.

L'autor, en l'apartat dedicat al principi dels desplaçaments virtuals, s'esforça a cercar tot allò que en podia ser un reclam (les politges de dos, sis i vuit cordes, l'estudi de Galileu dels plans inclinats i la troballa de la igualtat de treballs, la continuació que en féu Torricelli, hi porta a col·lació Johann Bernoulli), apuntà com es generalitza el principi, com s'hi introdueixen les consideracions infinitesimals, l'exemplaritzà des de les màquines simples (i des de la concepció newtoniana de la força), sostingué que la prova del principi feta per Lagrange ja el pressuposa i hi va introduir alguna elaboració de Maupertuis i d'Euler. I en acabant conclugué:

Tractatus geometricus, Pars Prima, Londres, Typis Gulielmi Godbid: impensis Mosis Pitt, Londres, 1670, pàgs.2-3.

«És important de tenir clar que en el principi es tracta solament de constatar un fet. Quan es bandeja això, llavors se sent sempre una manca i s'hi cerca un fonament, que no cal trobar. Jacobi cita en les seves “*Vorlesungen über Dynamik*” que Gauss havia dit (verbalment) que les equacions del moviment de Lagrange no s'havien provat sinó que sols estaven expressades històricament. En efecte ens sembla que aquesta comprensió és la correcta també en referència al principi dels desplaçaments virtuals.

«La tasca dels investigadors anteriors que han estat bàsics en un camp és molt diferent de la dels que vénen després. Els primers han de cercar i constatar sols els fets més importants, i per això cal, com ensenya la història, més esperit del que es creu comunament. Estan lliurats els fets més importants, llavors hom els pot fer servir deductivament i lògicament en la física matemàtica, pot ordenar els camps, pot indicar que, en l'acceptació del fet, s'hi inclou tota una sèrie d'altres fets que hom no veu simplement igual en el primer. Una tasca és tan important com l'altra. Però cal no barrejar l'una amb l'altra. No es pot provar matemàticament que la natura ha de ser així com és. Però es pot provar que les qualitats observades codeterminen, sovint no visible directament, una altra sèrie.

«Finalment cal remarcar que el principi dels desplaçament virtuals, com qualsevol altre principi general, a través del poder que se li atorga té un efecte alhora decebedor i esclaridor. És decebedor en la mesura que hi reconeixem sols fets llargament coneguts i instintivament discernits, si bé més penetrantment i més determinadament. És esclaridor mentre ens permet de veure, per damunt dels mateixos fets simples, relacions de la màxima complexitat»¹⁸

S'avalua amb dificultat les paraules de Mach perquè depenen d'una interpretació del que és una teoria estàtica o mecànica, les condicions de la qual s'acomplirien prou bé en l'obra de Lagrange. Certament cal un cert àmbit d'experiències, àdhuc

¹⁸ Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1991 [reproduceix la novena edició feta a Leipzig el 1933, 1^a 1883], pàgs. 68-69.

d'experiments, i tanmateix es podria suggerir que, amb Arquímedes, la teoria ha volgut descabdellar un discurs autònom.

§4. Nota sobre la rellevància dels infinitesimals.

L'obra de Pierre Varignon *La nova mecànica o estàtica* seguida pel *Projecte per a una nova mecànica* fou publicada pòstumament el 1725. Ja s'ha dit que conté la carta que li envià Johann Bernoulli des de Basilea el 26 de febrer de 1717. S'hi estableix el principi de les velocitats virtuals per a tota mena de sistemes (ja no cal que les forces s'apliquin en línia recta) amb magnituds virtuals infinitament petites.

Des dels càlculs analítics actuals cap enrere fins a arribar al mètode de les exhaustions s'hi va trobant consideracions infinitesimals. El seu enorme avantatge rau si més no en algunes característiques cabdals: la primera la circumstància d'avaluar l'infinitesimal com a alguna cosa o com a no-res, depenent del plantejament de l'afer. El polígon inscrit mai no arriba a ser la circumferència quan el nombre dels seus costats creix, però sí que la té com a límit (hi ha infinitesimal amb una doble avaluació). La divisió entre dues quantitats infinitesimals pot considerar-se com entre dos no-res o no, etc. Bertrand Russell es va equivocar quan es va convèncer que, amb Weierstrass, es resolien les ambivalències en els infinitesimals. Precisament llur utilitat rau en la doble cara que permeten.

La possibilitat de l'estudi de línies i superfícies corbes i, en conjunt, de trajectes complicats en un qualsevol aspecte, fora una segona característica rellevant, al costat de permetre una dimensió quantitativa a un qualsevol esdeveniment que no es manté regular en algun sentit (per exemple, una força). En principi l'infinitesimal minimitza fins on convingui la desviació

i la irregularitat, i permet de comprendre i de mantenir com a magnitud un límit geomètric o una relació en un càlcul.

Un tercera característica cabdal es recolza en el fet que la quantitat infinitesimal es troba implicada amb quantitats que no ho són, i que llavors pot adquirir una rellevància singular. Seguint els exemples de dalt: hi ha la circumferència, hi ha la funció derivada, etc.

Mutatis mutandis caldria estendre els trets a no importa quin càlcul amb infinitesimals. Agafem, però, els desplaçaments infinitesimals.

Si més no se suposa que s'és capaç en l'estàtica de lliurar funcions dels moviments que depenguin de variables independents i de ser capaç d'extreure'n les quantitats infinitesimals que fan de desplaçament virtual precisament a partir de la derivació que permet aquella funció.

Prenguem com a expressió del principi del treball virtual¹⁹:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

que, en coordenades cartesianes, s'escriu així:

$$\sum_i^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0$$

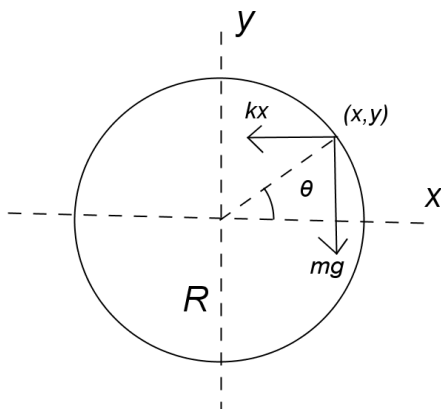
Un exemple²⁰ exemplaritzarà el poder dels desplaçaments virtuals: es demana de trobar les posicions d'equilibri d'una partícula a moure's sobre la següent circumferència vertical:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

¹⁹ Dalt s'ha esmentat que la presència del símbol δ (i no de d) es deu que aquest desplaçament virtual es fa independentment del temps; és a dir, no hi té una connexió mitjançant les lleis de la dinàmica. No hi ha en principi un temps infinitesimal definit dt .

²⁰ Cf. El treball de Vicent Martínez Sancho, *Fonaments de física* (dos volums), Enciclopèdia Catalana, Barcelona, 1991, I, pàgs.118-121.

i sotmesa a una força atractiva directament proporcional a l'abscissa:



El camp de força aplicat sobre la partícula serà:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{i} - mg\mathbf{j}.$$

[El primer terme sempre va dirigit cap al centre, el segon cap avall]. Admetent-se que:

$$x = R\cos\theta$$

$$y = R\sin\theta.$$

Llavors:

$$\mathbf{F} = -kR\cos\theta\mathbf{i} - mg\mathbf{j}$$

Pel principi del treball virtual:

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0.$$

En aquest cas

$$-kR\cos\theta\mathbf{i} \cdot \delta\mathbf{x} - mg\mathbf{j} \cdot \delta\mathbf{y} = 0.$$

Però si $x = R\cos\theta$, llavors:

$$\frac{\delta x}{\delta\theta} = -R\sin\theta$$

i si $y = R\sin\theta$, llavors:

$$\frac{\delta y}{\delta \theta} = R \cos \theta$$

θ fent de variable generalitzada. Substituint i simplificant:

$$kR \sin \theta \cos \theta - mg \cos \theta = 0.$$

D'aquesta equació es poden treure immediatament les quatre posicions d'equilibri. S'anota l'eficàcia dels infinitesimals en el principi.

§5. Sobre la preeminència del principi del treball virtual.

El principi pressuposa una circumstància que deu poder estendre's també a un qualsevol estudi, independentment de l'estàtica. Això és, que els treballs són comparables, poden ser iguals, i dirigits en una mateixa direcció o oposada. El treball es transmet, fa la competència a un altre treball, s'hi oposa, col·labora amb un altre treball, etc.

L'expressió quantitativa de tot això no impedeix de dirigir la mirada a un fet capaç de suggerir una munió de qüestions. La transmissió del treball sembla una nova manifestació que no s'estima que hi hagi anorreament de res (no hi ha recreació o destrucció, sinó sols transformació). Però qualsevol relació d'un treball amb un altre hauria, sembla, de reflectir a nivell teòric quelcom d'un camp experimental.

Si més no el principi dels treballs virtuals proposa l'anul·lació de tots els treballs virtuals per a un sistema en equilibri. Gairebé es podria afegir que és obvi per ell mateix quan s'assumeix per a tot treball que no s'estimba en el no-res: per tant que, si hi ha equilibri, el treball global ha de ser nul. És clar que també es podria recórrer a l'inversa: allò que ocorre en un sistema en equilibri palesa el tarannà dels treballs virtuals, és a dir, que es comparen, es contraposen, s'igualen, etc.

Malgrat tot el principi no és pas evident per més entenedor que arribi a ser. Hi ha una coherència conjunta de tot amb tot, i

cada àmbit deu quelcom a la suggerència empírica i molt a la manera d'anar analitzant, quantificant, fins a arribar a la formulació.

S'aplica a les consideracions de treball finites o infinitesimals. També a tot el que s'ha après de les balances i de la resta d'aparells. I l'estudi ho podria perllongar ponderant des d'aquí l'adquisició del que és la força segons els antics, els clàssics i els moderns, i les respectives lleis de la composició de forces.

Hi ha, sí, alguna circularitat en tot això, i alhora s'és capaç d'una jerarquització. Per això la prevalença del principi del treball virtual no és incompatible a creure que aquest principi és demostrable des de la balança o provable des de la llei de la composició de forces. O que el mateix Lagrange ho provés a partir del que anomena el principi de les politges mentre defensa l'afirmació anterior.

Sens dubte les demostracions que s'han fet reblen més aviat que hi ha una congruència entre forces, balances, treballs, d'altres màquines, sistemes en equilibri, etc. Potser es podria afegir que l'estudiós no sap de vegades ben bé com s'hi ha arribat, al conjunt.

Una qualsevol demostració rebla aquesta congruència, mentre la manté²¹.

²¹ El lector pot trobar diferents demostracions del principi dels treballs virtuals. Una de les més fascinants es troba en l'opuscle *Démonstration du principe des vitesses virtuelles: considéré comme base fondamentale de la mécanique*, (St. Pétersburg, À l'imprimerie des Voies de communication, 1832) de Pierre Dominique Bazaine, que usa la llei de la composició de forces. El seu autor es proposa de lliurar una prova del principi per a l'obra de Lagrange pel fet que estima que no n'hi ha prou amb la basada en el principi de les politges continguda en la *Mécanique analytique*.

També Vicent Martínez Sancho el demostra en el treball esmentat (pàgs.68-69) a partir de la composició de forces i rebla l'exigència de no admetre'l com a principi, sinó com a teorema.