

F. GRAELL I DENIEL

**LA RAÓ DE TEMPS ENTRE MOVIMENTS
PENDULARS I LLIURES EN
L'HOROLOGIUM OSCILLATORIUM
DE CHRISTIAAN HUYGENS**

QUADERNS DE FILOSOFIA

F. GRAELL I DENIEL

**LA RAÓ DE TEMPS ENTRE MOVIMENTS
PENDULARS I LLIURES EN
L'HOROLOGIUM OSCILLATORIUM
DE CHRISTIAAN HUYGENS**

45

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2025

2^a edició febrer 2025 [1^a edició setembre 2016]

© F.Graell i Deniel
ISBN: 978-84-943607-4-9

www.dossier.graell
www.quadernsdefilosofia.cat
www.xtec.cat/~fgraell

E-mail: fgraell@xtec.cat

El web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb
Quaderns de Filosofia.

CONTINGUT

Presentació, 6.

I. UN MECANISME ÚTIL PER AL TEMPS, 8.

1. Un esbós de descripció del rellotge, 10.
2. Un temps físic modèlic a la mà de l'home, 13.

II. LA RAÓ DE TEMPS D'OSCIL·LACIÓ I DE CAIGUDA, 17.

La proposició II,23, p.17.

La proposició II,24, p.22.

La proposició II,25, p.23.

III. L'ESPAI RECORREGUT EN CAIGUDA LLIURE DES DEL REPÒS EN UN SEGON, 27.

1. La proposició IV,25 enuncia la troballa feta amb la raó d'una mesura universal i perpètua, 27.
2. La proposició IV,26 ens diu com es determina l'espai que recorre un greu que cau verticalment en un temps donat, 31.

IV. EXCURS SOBRE L'ACCELERACIÓ DE LA GRAVETAT, 34.

V. UN EXERCICI DE MECÀNICA, 38.

PRESENTACIÓ

1. No hauria de caldre afegir que un exercici de filosofia de la ciència no la conclou de cap manera. Car les pràctiques científiques dels segles XX i XXI, no se les deu poder comprendre en termes dels treballs dels segles XVI-XVII, a banda del fet que l'estudi d'aquests primers segles permet un descabdellament indefinit de temes i d'aspectes. Malgrat que alguna mena de plantejament invers deu esdevenir tant malencaminador com el primer: no sembla que hom pugui abocar-se a la tasca pròpia d'aquella disciplina sols a partir de les resultants de la ciència dels darrers decennis.

Perquè cal trobar-se al costat de l'home de ciència i arran del seu treball, i això deu ser vàlid per a tots els temps. Una aproximació que no s'hi manté, que fa mer metallenguatge, que estima que els jocs que és capaç d'inventar hi esdevenen útils, que encotilla allò que no passa pel seu sedàs, no deu poder tirar endavant el projecte engrescador de participar de l'entusiasme científic dels avantpassats i del seus contemporanis.

Sens dubte la filosofia ha de continuar perseverant en el fet que la ciència en el seu conjunt deu ser una de les realitzacions humanes més fascinants; ha de mantenir-se en el seguiment dels treballs prodigiosos de molts; ha de persistir en la tasca de repensar una quantitat ingent de treballs, ha de prosseguir en l'acolliment dels textos d'aquests homes savis com a fonts inexhauribles de meravelles, i com a ocasions de discursos il·limitats.

2. Seguirem una mica el treball de Huygens a propòsit del rellotge de pèndol, per tal de circumscriure'ns a l'estudi del lliurament per primera vegada d'una quantificació de l'acceleració de la gravetat.

L'afer gaudiria d'una certa importància perquè permet una vegada més d'apropar-se al concepte d'acceleració i per la rellevància de la gravetat.

El text de Huygens estudia doncs el rellotge de pèndol, repassa el moviment de caiguda, cerca els centres d'oscil·lació de molts cossos, presenta la força centrífuga, etc. Aquí oferim un esbós del

funcionament del rellotge, apropiem la cicloide per a l'estudi de batudes iguals, i ens aboquem en la determinació de la gravetat. Si desvetlla l'interès del lector l'escrit haurà abastat amb escriure els seus objectius.

I

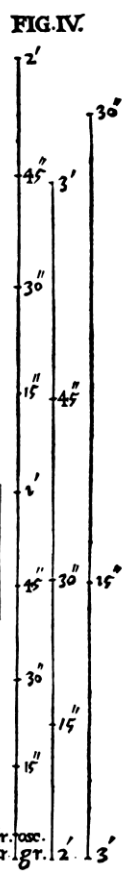
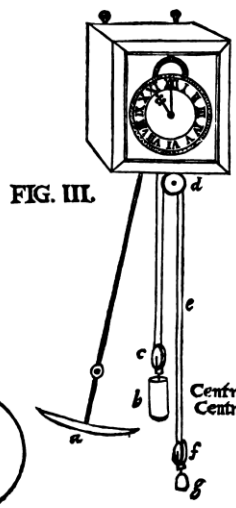
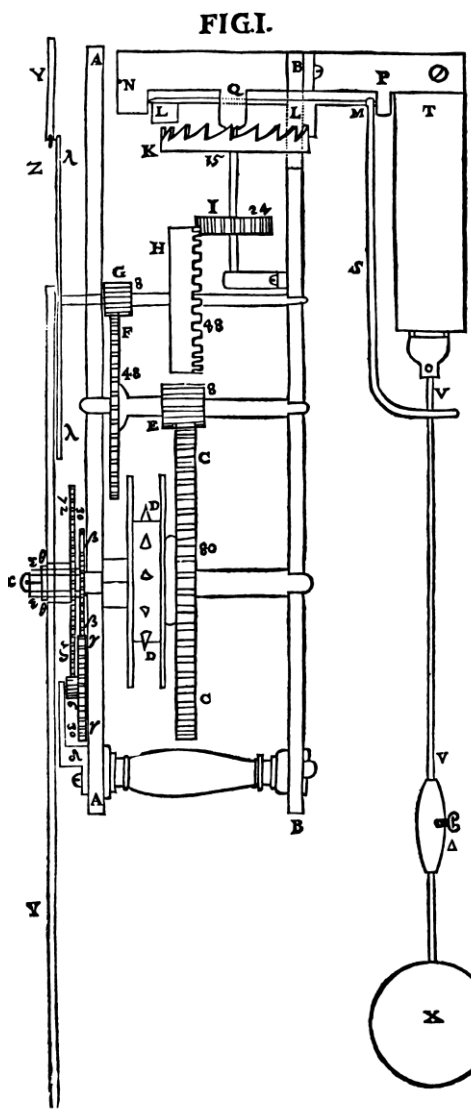
UN MECANISME ÚTIL PER AL TEMPS

Només començar l'*Horologium oscillatorium* l'autor anuncia una aportació capital: fins llavors el pèndol simple no podia oferir una mesura invariable del temps. Però ha trobat la solució: un pèndol que bat sempre igual¹.

«En efecte una mesura del temps segura i igual, en el pèndol simple, no es troba en la natura quan s'observa curses més amples més retardades que les més estretes²; però per un camí geomètric divers hi descobrim una suspensió, desconeguda anteriorment, en el pèndol, d'una línia advertida d'una certa curvatura que proveeix la igualtat desitjada, resolent-ho meravellosament, i d'acord amb la raó. En la mesura que després ho hem aplicat als rellotges, així s'ha abastat un moviment seu constant i segur, de manera que, després de reiterats experiments empresos en terra i mar, es manifesta ja, tant en els estudis d'astronomia com en l'art de la nàutica, que els és de moltíssim ajut. Aquesta és la línia que un clau fixat en la circumferència d'una roda giravoltant amb un volteig continu descriu en l'aire; els geòmetres del nostres temps l'anomenen cicloide, i és valorada diligentment per les seves moltes altres propietats; per nosaltres, per aquella facultat que diguérem de mesurar el temps...».

¹ Huygens, Christiaan: *Christiani Hugenii ... Horologium oscillatorium, sive De motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parisiis [Paris]; apud F. Muguet ..., 1673, pàgs.1-2. No era la primer vegada que l'autor s'ocupava dels rellotges de pèndol. El seu primer treball sobre rellotges, *Horologium*, és del 1658 i, entre d'altres afers, fou ja el primer a allargar el manteniment de l'oscil·lació de la pèndola per mitjà d'engranatges moguts per un pes, i d'introduir el pèndol en els rellotges (Cf. *Horologium oscillatorium*, pag.3).

² «Cum latiores excursus angustioribus tardiores observentur». Com diu més endavant aquelles oscil·lacions del pèndol simple que recorren un arc més petit tenen un durada més curta, cosa que diu reconèixer-se fàcilment per alguna experiència que descriu, a més això no és imputable a la resistència de l'aire (cf. ídem, pàg.9).



La possibilitat de mesurar el temps: la introducció d'unes lamel·les metàl·liques corbes en la forma de dos braços [cf. Fig.II del gràfic] que s'obren limita el balanceig de la pèndola i fan que segueixi un moviment cicloïdal pel fet que es dona precisament la curvatura de les fulles al mateix cos oscil·lant. Els estudis de la cicloide satisfan tota una sèrie de necessitats, se'n veurà alguna, mentre l'eficàcia de la regularitat de les oscil·lacions es palesa en els rellotges.

Mesurar el temps, comptar el nombre de batudes amb una diàfana significació temporal. En aquest punt fóra bo de contemplar un rellotge de pèndol, obrir-lo, escorcollar com treballa: Huygens, que millorà la precisió dels rellotges, explica una mica el seu funcionament, en lliura un gràfic, hi remarca les seves millores. La descripció no és certament completa mentre palesa el seu domini de materials i la seva habilitat. Tanmateix basta per a fer-se una idea de l'abast del propòsit de mesurar el temps.

1. Un esbós de descripció del rellotge.

La roda C [cf. Fig.I], amb les seves dents, gira amb un eix solidari a una politja D, amb unes punxes en la part interna que retenen la corda que passa i que aguanta uns pesos suspesos.

Així la roda C és moguda per la força dels pesos; aquesta mou la E i la F alhora. La F fa moure simultàniament la G i la H, que és una roda coronada que empeny també conjuntament la roda Y i la K.

Ometent la descripció de l'estructura superior del rellotge de la Fig.I, s'ha muntat un eix LM de manera que és capaç de girar lliurament i solidàriament amb els moviments de la petita palanca S tot fent amb aquesta les mateixes oscil·lacions (S oscil·larà cap al lector i enllà del paper: també es veu a Fig. II). Aquest moviment és alternatiu, d'un costat a l'altre, d'acord amb el compàs que ocasionen les dents de la roda K (forçades a girar pel pes que penja de D) cada cop que es presenten successivament encaixant-se en els alerons LL soldats amb l'eix LM, per tant un mateix pot imaginar que aquest topar l'aleró i la dent de K marca els límits de l'oscil·lació del pèndol, que alhora allibera amb l'oscil·lació la dent de l'aleró pel fet de fer-lo girar solidàriament amb l'eix LN i amb la palanca S.

S'observarà així mateix que la palanca S té la seva part final encorbada i amb un orifici oblong, per on passa la pèndola VV, la qual penja d'un fil doble entre dues petites làmines (que mantenen una forma cicloïdal, cf. Fig.II).

Per tot plegat sembla fàcil de copsar que el moviment de la pèndola, amb una embranzida procurada per la pròpia mà, es manté gràcies a la força de les rodes tirades pels pesos; i alhora el retorn de la pèndola marca a les rodes (i al rellotge en conjunt) el seu ritme de moviment. En efecte el manteniment del balanceig del pèndol es deu al canvi de sentit del balanceig gràcies a les dents de la roda coronada i als alerons, i gràcies al petit impuls que hi va havent, els pesos actuant a través de les rodes. Altrament a la llarga l'aire el frenaria i tendiria al repòs.

D'altra banda Huygens ha aconseguit l'obtenció d'una igualtat d'oscil·lacions gràcies a les introducció de les lamel·les (T en Fig.I, i vistes en perspectiva a Fig.II), de manera que es garanteixi que no es permet avançar la roda K més de pressa o menys, ni que l'afectin els canvis de temperatura de l'aire o algun altre defecte de construcció: en qualsevol cas o el rellotge mesurarà perfectament el temps, o no ho farà de cap manera.

Fig.I permet visualitzar també el nombre de dents de cada roda, i suggereix com cal afegir-hi les agulles (horària, minuteria i la de segons, d'acord amb els eixos de C i de H), i d'altres detalls relatius a la seva muntura per tal que es vegin les agulles i es pugi modificar l'hora que indiquen.

S'avança ja que la pèndola ha de fer tres peus horaris (més avall ja es veurà què són) per tal de batre al segon.

De manera molt succinta es pot dir: una revolució de la roda C fa girar deu vegades la roda F ($80/8$), seixanta vegades la H ($10 \times 48/8$), i cent vint vegades la K [$60 \times 48/24$]. Llavors: una revolució de la roda K són 30 cops, que corresponen a tantes anades i vinguda (15×2) de la pèndola; per tant 120 voltes corresponen a 3600 segons, en els quals la roda C fa una volta (amb l'agulla corresponent col·locada a ε) en el temps d'una hora. Unes rodes a l'alçada de l'eix per on gira C, i que es troben davant, permeten la conversió d'un gir complet horari en el gir d'una dotzena part de revolució, per tant de marcar la revolució de

l'agulla horària. Notem, finalment, que la roda H girant 60 vegades en una hora, la divisió del disc solidari $\lambda\lambda$ en 60 parts marcarà pel pas de les parts els segons.

La llentilla es farà de plom i de forma que venci tant com sigui possible la resistència de l'aire. La Fig.III deixa veure també el pes b que penja d'una politja c ; un extrem de la corda que hi passa baixa des de la politja D (Fig.I), fins a la politja c (Fig.III), per a tornar a pujar fins a la politja d fixada en la part baixa del rellotge, i caure per e tibada gràcies al pes g , sense cap possibilitat de tornar enrere. Els últims detalls de tot plegat dependrà de l'habilitat del constructor de l'autòmat. Huygens calcula que l'autonomia del rellotge pot ser al voltant d'un 30 hores.

Respecte de la pèndola i de les lamel·les basti el següent: la longitud de la primera ha de permetre que bati al segon (les longituds del pèndols, la reduïda si és un pèndol compost, són entre si com els quadrats dels temps que esmercen per a cada oscil·lació), i aquí serà de tres peus (horaris). Les lamel·les seguiran les cicloïdes generades per un cercle amb un diàmetre la meitat de la longitud de la pèndola. Llavors, independentment de l'amplada de la cursa, sempre batrà al segon, amb l'afegit que la llentilla [parlant amb precisió: el centre d'oscil·lació] també seguirà una nova línia cicloïde, com demostrarà més tard (III,5).

La longitud de la pèndola condiciona el temps de batuda: a banda de modificar-la també es pot acabar d'ajustar el rellotge pujant o baixant un petit pes Δ (cf. Fig.I), collat a V; basti ara afegir que, per a facilitar l'aproximació, Δ pesa igual que V, la part inferior del qual conté unes divisions (Fig.IV), de tal manera que permet de col·locar còmodament Δ (la demostració i la troballa de les divisions, les lliura dins de les qüestions tractades en l'estudi del centre d'oscil·lació, cf. IV,23).

Per tant cara al temps cal anar seguint l'engrenatge de diferents rodes amb un nombre divers de dents, i el joc corresponent d'eixos que remeten a una palanca [S en la Fig.I del gràfic] solidària amb la pèndola (i la llentilla), de manera que, per cada 3600 oscil·lacions simples d'un segon hi hagi un joc mecànic que permeti marcar els minuts, que d'altres rodes i enginyes acabin amb una que assenyali les

hores, i que es faci venir bé que en algun lloc s'indiqui els segons, a través d'un bell joc de combinacions d'eixos i de rodes.

El lector de l'escrit de Huygens no pot deixar de sorprendre's de la visió tècnica de l'autor. Cal escorcollar el mecanisme que persegueix el temps, i admetre de seguida el mèrit que hi ha en la creació de rodes i d'eixos escaients, de dents i mides varies, l'enginy que suposa, no sols la mateixa confecció de les peces, sinó la previsió de llur combinació per a una utilitat, els molts petits detalls de polit i d'ajustament, la dificultat de muntatge, la superació dels imprevistos, la tasca que tot això vagi bé. Hi ha una manipulació de materials des de la seva extracció de terra fins a formar part d'un mecanisme complet. S'hi troba doncs un treball teoricopràctic en la mateixa construcció del rellotge de pèndol àdhuc a banda d'una qualsevol demostració geomètrica: la transformació de materials naturals en peces d'una màquina inclou tots els aspectes rellevants que es puguin dir en una qualsevol altra circumstància. Es tracta d'un procés on van entrant, imbricant-se els uns amb els altres, la percepció amb tot el cos i el corresponent esforç, en un vincleig ocupacional que comporta la transformació que va menant cap al terme que es persegueix.

2. Un temps físic modèlic a la mà de l'home.

Huygens reeixí a fer solidaris l'engranatge de l'aparell i un moviment oscil·lant isocrònic gràcies a la introducció de fer-ho cicloïdalment, la qual cosa implicà que hi havia un rellotge que, dins de les aproximacions que es vulgui, pauta regularment el temps.

Imaginem per un moment que, l'aparell de Huygens, se'l considerés independentment d'un qualsevol altre temps. Si fos concebible aquesta possibilitat es conclouria que hi hauria aquí una mesura del temps molt com cal. Ocorreria, tanmateix, que l'únic individu que podria mesura el temps segons aquest rellotge fora el seu propietari. S'esdevindria com en les mesures lineals en l'època de l'holandès: el peu tenia una mida en cada contrada, a banda de moltes altres unitats de tot tipus.

El referent del temps per a Huygens i per als seus contemporanis es trobava en el cel, i tots els rellotges de l'època encaixaven d'ajustar-s'hi.

En efecte des de l'antigor s'ha perseguit de pautar el temps, per exemple, segons el dia solar mitjà o regular. Huygens cerca d'afinar tant com sigui possible l'aparell i ensenya per quin mètode es compara les seves resultants a «la verdadera mesura de les hores».

«S'elegeix un lloc segur d'observació ocular des del qual els astres es puguin guaitar, i juntament teulades i parets de cases properes talment situades que, quan alguns estels comptats entre els fixos s'hi apropin, fixin els límits de ser vistos, els estels, simultàniament. Es fixa el tros d'espai en aquest lloc, d'acord amb el mida de la pupil·la, per tal que l'ull pugui tornar-s'hi a posar els dies següents i sense error. Ja en el moment mateix que algun dels estels desaparegui de la mirada s'anota el temps indicat en el rellotge. I es fa el mateix el dia posterior o, millor, alguns dies deixats passar. Que si sols es tracta d'un dia de separació entre dues observacions cal descomptar de l'última observació del temps del rellotge 3 minuts, 56 segons³. En efecte així es comprovarà si la longitud de la pèndola és la correcta: quan el dia solar mitjà sobrepassarà qualsevol revolució dels astres fixos en aquesta quantitat. Mitjà, dic, perquè els dies solars, de migdia a migdia, no són tots iguals entre si, com s'exposarà extensament tot seguit. Si en canvi l'observació es reprèn al capdavall després d'uns quants dies, es calcularà per a cadascun una quantitat igual com a causa de la diferència. Sigui, per posar un exemple, en la primera observació, en el moment de perdre's l'estel, observada l'hora 9 del rellotge, amb 30 minuts, 18 segons; després, passats set dies, el mateix estel desapareixent el rellotge indica l'hora 8, amb 50 minuts, 24 segons. Aquesta hora es queda curta respecte de la primera en 39 minuts, 54 segons. Els quals, dividits per set, lliuren un retard diari de 5', 42". Però havia de ser 3', 56", que és menor a aquella quantitat en 1', 46". I així el rellotge queda curt cada dia en una quantitat igual respecte de la mesura veritable, o mitjana, del dia»⁴

El temps a tall de mer passar uniforme s'arrela en tots els esdeveniments sense identificar-se en cap moviment.

³ La diferència entre el dia solar mitjà, que és més llarg, i el dia sideri. El pèndol mesurarà hores, minuts i segons solars mitjans.

⁴ Ídem, pàgs.13-14.

El cel estrellat ha gaudit d'un privilegi des d'antic, formant part del moviment diari en l'*Almagest* o del gir diari de la Terra sobre el seu eix des de Copèrnic. Ocorre que la certesa de caràcter observacional que el Sol cada dia s'endarrereix una mica respecte del gir dels estels fa que el dia sideri no pugui coincidir amb el dia solar.

Cal tota una aproximació astronòmica per a copsar que cada dia solar és diferent degut a l'obliqüitat de l'eclíptica i a l'anomalia del moviment del Sol. El dia solar regular mitjà no és pràcticament mai l'autèntic, malgrat que una equació de temps permet rectificar la seva durada per a apropar-s'hi millor.

El rellotge segueix el pas regular del temps representat pel dia sideri, que el mateix dia solar autèntic persegueix sense tant d'encert (el càlcul del dia mitjà permet que es millori). Se l'ajusta perquè, emulant el temps sideri, es conformi a una mesura solar mitjana. Es vol regularitat i se cerca el control d'hores regulars, de minuts regulars, de segons regulars. El rellotge de pèndol representa un èxit de la ciència i de la tecnologia del segle XVII: es disposa d'un altre moviment capaç de pautar una regularitat que exemplaritza el mer passar, regularitat que fa de temps físic⁵.

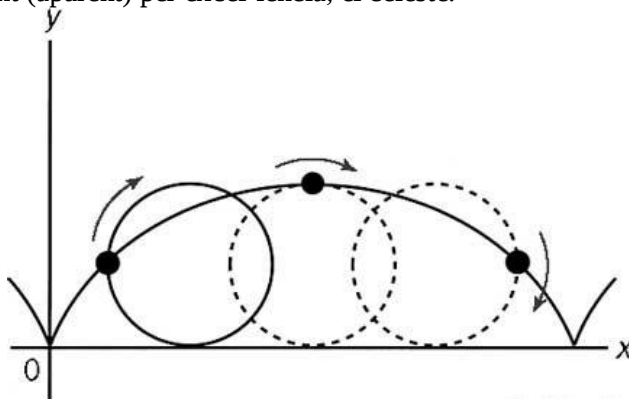
⁵ Cf. *El temps i el moviment natural* QF6, i *A propòsit de la cinemàtica* QF38.

II

LA RAÓ DE TEMPS D'OSCIL·LACIÓ

I DE CAIGUDA

La línia cicloide ha permès abastar d'isocronisme en el pèndol. Precisament la construcció del rellotge es fa perquè lliuri un compte a través de pautes per a un moviment igual en cada oscil·lació, i acordar-lo, a través de l'engranatge de rodes i d'eixos, amb el moviment (aparent) per excel·lència, el celeste.



(<http://mathonline.wikidot.com/the-cycloid>)

Es tracta d'obtenir un moviment mecànic que ho permeti, i llavors es descobreix que la pèndola ha de seguir la corba cicloide, és a dir, aquella corba que traça un punt fix d'una circumferència quan aquesta gira al voltant del seu centre tot fent una volta completa, tal i com es mostra en el gràfic, on un punt de la circumferència que es fixa arbitràriament va descrivint una corba que recull totes les posicions que va agafant a mesura que el cercle va giravoltant com si fos un cercol.

Amb això es fa possible un nombre considerable de troballes, i el llibre de Huygens en lliura prou. Una de les més conegudes rau que l'*Horologium oscillatorium* conté la primera aproximació que quantifica l'acceleració de la gravetat o, per ser més exactes, que quantifica l'espai recorregut en un segon per un cos que cau

lliurement. Aquí valdrà la pena de circumscriure-s'hi: la rellevància de l'acceleració de la gravetat és tanta que es fa forçós d'explicitar-ne les passes que la lliuren i d'admirar l'obra de Huygens i, des d'aquesta, de bell nou la de Newton.

Per això bastarà en principi l'esment de les proposicions II,23-25, que permeten de calcular la relació entre el temps de caiguda cicloidalment i el temps de caiguda lliure, i més endavant s'esmentarà el text de Huygens que aplica el trobat a resoldre l'espai recorregut en el moviment de caiguda. Comencem per les tres proporcions de la segona part de l'*Horologium oscillatorium*.

LA PROPOSICIÓ II,23

Primerament es fa una representació geomètrica del pèndol i de la seva oscil·lació seguint la línia cicloide per tal d'estudiar el temps que tarda a fer, per exemple, *mitja oscil·lació, admetent que l'altra mitja la farà amb un temps igual*.

Es tracta de comparar el temps de caiguda per la cicloide amb el temps de caiguda lliure. Però no es pot fer directament.

La proposició II,23 compara doncs el temps de caiguda per la cicloide amb el temps de caiguda per un pla inclinat, i els relaciona respectivament amb un segment tangent a una circumferència i un segment de l'eix de la cicloide.

Tanmateix caldrà anar per parts. De primer vegem una mica el gràfic de la semicicloide invertida CA .

S'agafa els punts B i G a l'atzar de la cicloide, i es fa AI i DC perpendiculars a l'eix DA pels extrems, BI tangent a la corba pel punt B ; es traça FB i ZG paral·leles a AI ; se segueix amb la construcció dels semicercles DVA i FHA , es fa FX igual al radi del semicercle més petit, la recta AV serà igual i tangent a BI (per la proposició II,15), MN i ST tangents a les corbes en els punts G i H respectivament, QO i RP línies que limiten ST i MN , i es dibuixa la resta d'elements geomètrics.

Es tracta de saber el temps que trigarà un mòbil a recórrer el segment MN si anés a una velocitat constant, específicament si ho fes

Com més avall es reproduirà textualment la proposició II,25 basti ara fer un esquema de la proposició II,23, amb la llicència d'usar algun simbolisme per al temps i per a la velocitat. I així:

 v_{MN} = velocitat constant del cos en el tram MN (igual a la que té el cos que

cau per la cicloide en el punt G).

v_{BI} = velocitat que el cos ha adquirit a I baixant per BI .

v_{FA} = és la mateixa que l'anterior (en un moviment continu d'un cos que cau per múltiples plans inclinats contigus la velocitat final és la mateixa que la del cos que cau verticalment des d'una mateixa alçada; cf. es remet el lector, per exemple, a II,8 de l'obra de Huygens).

v_{BG} = velocitat aconseguida per un cos que cau cicloïdalment des de B en el punt G .

$v_{F\Sigma}$ = és la mateixa que l'anterior (moviment d'un cos que cau per plans inclinats i verticalment des d'una mateixa alçada; cf. II,8).

Ja s'està en condicions d'emprendre el fil conductor de la demostració.

Es compara el temps (t_{MN}) que tarda un cos a recórrer MN amb una velocitat constant igual a la que té el cos que cau per la cicloide en el punt G , amb el temps (t_{OP}) que tardaria un cos que recorre OP amb una velocitat constant que fos la meitat de la que ha guanyat a I baixant per la tangent BI .

De primer és fàcil d'admetre (i també és la proposició V de Galileu del moviment uniforme):

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{MN}{OP} \cdot \frac{v_{OP}}{v_{MN}}.$$

S'ha establert així mateix que:

$$v_{OP} = \frac{v_{BI}}{2} = \frac{v_{FA}}{2}$$

$$v_{MN} = v_{BG} = v_{F\Sigma}.$$

Per tant:

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{MN}{OP} \times \frac{\frac{1}{2}v_{FA}}{v_{F\Sigma}}. \quad (1)$$

En un moviment uniformement accelerat els espais recorreguts són com els quadrats de les velocitats finals (cf., per exemple, II,3 de Huygens), i llavors:

$$\frac{v_{FA}}{v_{F\Sigma}} = \frac{\sqrt{FA}}{\sqrt{F\Sigma}}.$$

En el rectangle FAH : $FH^2 = FA \times F\Sigma$ ⁶.

I llavors:

$$\frac{FA^2}{FH^2} = \frac{FA^2}{FA \cdot F\Sigma} = \frac{FA}{F\Sigma} \rightarrow \frac{\sqrt{FA}}{\sqrt{F\Sigma}} = \frac{FA}{FH}.$$

Per tant:

$$\frac{v_{FA}}{v_{F\Sigma}} = \frac{FA}{FH} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}v_{FA}}{v_{F\Sigma}} = \frac{FX}{FH},$$

i des de (1) $\rightarrow \frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{MN}{OP} \cdot \frac{FX}{FH}. \quad (2)$

BI i VA són paral·leles, com ho són MGN i $\Delta\Phi II$ (l'un i l'altre fet es prova a II,15). Per tant:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{\Delta\Pi}{EK} = \frac{\Delta A}{EA}.$$

Però:

$$\frac{\Delta A}{EA} = \frac{\Phi A}{\Lambda A}$$

i $\frac{\Phi A}{\Lambda A} = \frac{VA}{\Phi A}$

(per un lema senzill geomètric just demostrat abans de II, 23)

Per tant:

$$\frac{\Delta A}{EA} = \frac{VA}{\Phi A}.$$

D'on surt finalment que:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{VA}{\Phi A}. \quad (3)$$

⁶ Un camí per a veure-ho fa: $AH^2 = \Sigma H^2 + \Sigma A^2$
 $FH^2 = \Sigma H^2 + \Sigma F^2$

Sumant: $AF^2 = 2\Sigma H^2 + \Sigma A^2 + \Sigma F^2$. D'altra banda: $AF = F\Sigma + \Sigma A$; descabdellant: $F\Sigma^2 + 2F\Sigma \times \Sigma A + \Sigma A^2 = 2\Sigma H^2 + \Sigma A^2 + \Sigma F^2$. Simplificant: $F\Sigma \times \Sigma A = \Sigma H^2$. Substituint: $F\Sigma (FA - F\Sigma) = \Sigma H^2$; llavors: $F\Sigma \times FA - F\Sigma^2 = \Sigma H^2$, i finalment: $F\Sigma \times FA = \Sigma H^2 + F\Sigma^2 = FH^2$.

A més a més en el triangle rectangle DAV se sap que:

$$VA^2 = DA \times AF.^7$$

I en el triangle rectangle $DA\Phi$ es fa el mateix:

$$\Phi A^2 = DA \times A\Sigma.$$

I llavors:

$$\frac{VA^2}{\Phi A^2} = \frac{DA \times AF}{DA \times A\Sigma} = \frac{AF}{A\Sigma}.$$

Mentre en el rectangle FAH :

$$AH^2 = AF \times A\Sigma,$$

i així:

$$\frac{AF^2}{AH^2} = \frac{AF^2}{A\Sigma \times AF} = \frac{AF}{A\Sigma}.$$

Per tant:

$$\frac{VA^2}{\Phi A^2} = \frac{AF^2}{AH^2} \rightarrow \frac{VA}{\Phi A} = \frac{AF}{AH}.$$

I com s'havia demostrat (3) que:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{VA}{\Phi A} \rightarrow \frac{MN}{OP} = \frac{AF}{AH}.$$

Que, atenent als triangles semblants FAH , $FH\Sigma$:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{AF}{AH} = \frac{FH}{H\Sigma}.$$

Per tant, i recuperant l'abastat dalt a (2):

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{FH}{H\Sigma} \times \frac{FX}{FH} = \frac{FX}{H\Sigma} = \frac{XH}{H\Sigma}.$$

Finalment és fàcil de veure que el triangle $HX\Sigma$ és semblant al triangle format per RQ i la paral·lela a ST traçada des de R , i així:

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{XH}{H\Sigma} = \frac{ST}{QR}.$$

En conclusió: el temps amb què un cos recorre MN amb una velocitat constant com l'adquirida en el punt G després de caure des del punt B

⁷ Cf. nota anterior.

seguint la cicloide és al temps amb què recorre OP amb una velocitat constant la meitat de l'adquirida a I caient per a tangent des de B com ST a QR . Que era allò que es buscava de demostrar.

LA PROPOSICIÓ II,24.

Recapitem una mica el que s'ha fet. Cal comparar el temps de caiguda per la cicloide amb el temps de la caiguda lliure.

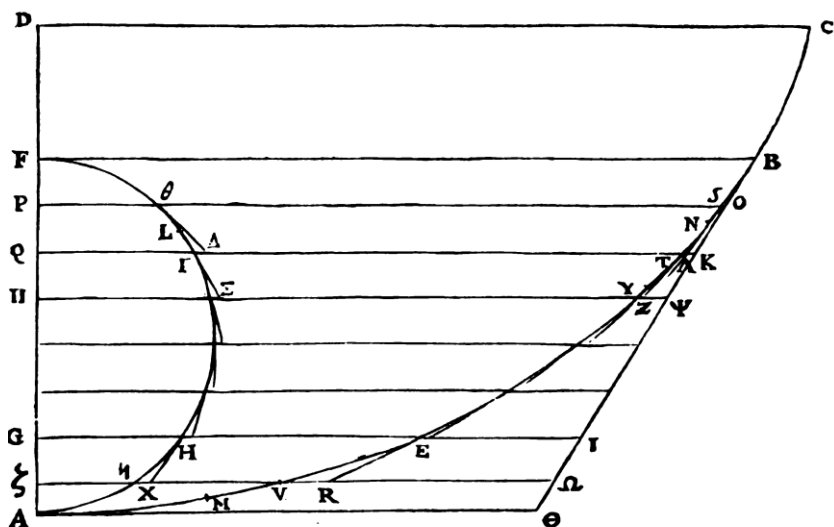
La proposició anterior estableix la raó entre el temps de caiguda per un tros de cicloide (de fet: per un segment que li és tangent) i el temps de caiguda per un segment adient, que és igual a la raó entre un segment de la circumferència FA (de fet: d'un segment que li és tangent) i un segment adient de l'eix de la cicloide.

La proposició II,24 fa una passa mes en aquesta direcció de relacionar el temps de caiguda per la cicloide i el d'una altra caiguda, d'una banda; i l'arc de la circumferència amb l'eix de cicloide, d'una altra. En efecte es diu [cf.gràfic] – amb uns circumstàncies constructives semblants a l'anterior – que el temps de descens segons l'arc de la cicloide BE és al temps de descens segons la tangent BI amb una velocitat constant la meitat de la que adquireix quan arriba a Θ [com si es baixés per un pla inclinat], com l'arc FH de la circumferència és a la recta FG de l'eix de la cicloide.

L'holandès no ha fet explícitament a través de consideracions infinitesimals [la proposició II,24 representaria la suma de molts petits fragments elementals d'arc, de pla inclinat, de circumferència, d'eix de la cicloide, des de II,23], malgrat que versemblantment no deuen ser-hi lluny, sinó a través d'una molt elaborada reducció a l'absurd que palesa que la primera raó [entre els temps respectius] no pot ser ni més gran ni més petita que la segona [entre arc i segment]: per tant s'assumeix que li és igual.

Òbviament la proposició esdevé rellevant del tot perquè donarà peu a la següent, que és fonamental. L'interès que té no lleva, però, la conveniència d'evitar-ne una exposició detallada que hauria de dur molt lluny i que comportaria deixar el camí com sigui que es tracta d'una demostració d'allò que no es pot acceptar i que per tant ha d'abandonar, és a dir, d'una prova indirecta – mentre el lector pot

intuir aquesta proposició com la resultant d'integrar els quatre components de la II,23.



No és l'única vegada que Huygens utilitza la reducció a l'absurd per a presentar demostrativament quelcom descobert per la seva sagacitat i domini geomètric. Valgui el cas d'una de les proposicions més importants de l'*Horologium oscillatorium*, la cinquena de la quarta part: demostra com es troba el centre d'oscil·lació⁸ d'un pèndol compost, i ho fa oferint una fórmula que s'assumeix també per reducció a l'absurd.

LA PROPOSICIÓ II,25.

Es volia saber el temps que tarda el cos que cau cicloïdalment, fins a arribar a la part més baixa del pèndol, respecte del temps de caiguda. La proposició II,25 farà quelcom exemplar: perquè, no sols

⁸ És a dir, el punt de l'eix del pèndol compost tan allunyat del punt de suport com la longitud del pèndol simple que seria isocrònic al pèndol compost.

demostra que el temps de caiguda *des de qualsevol punt* de la cicloide fins al seu punt més baix és *el mateix*, sinó que aquest temps idèntic *manté una relació* respecte al temps que tardaria un cos que cau lliurement des de la mateix alçada per *l'eix* de la cicloide *com la raó* que hi ha entre una semicircumferència i el seu diàmetre [per tant la raó dels temps és igual a $\pi/2$]. Aquesta molt important proposició fa:

«PROPOSICIÓ XXV

En la cicloide l'eix de la qual s'ha dreçat verticalment amb vèrtex que mira cap avall, els temps de descens, en els quals el mòbil deixat anar des de qualsevol punt seu arriba al punt més baix del vèrtex, són iguals entre si; i tenen, respecte al temps de caiguda perpendicular per tot l'eix de la cicloide, la mateixa raó que la semicircumferència del cercle al diàmetre.

Sigui la cicloide ABC el vèrtex de la qual A mira cap avall, amb l'eix AD dreçat perpendicularment, i des de qualsevol punt de la cicloide, per exemple B, descendeixi el mòbil per impuls natural per l'arc BA, o per una superfície així corbada. Dic que el seu temps de descens és respecte al temps de caiguda per l'eix DA com la semicircumferència del cercle al diàmetre. La qual cosa demostrada, també els temps de descens, sigui quin sigui l'arc de la cicloide acabat en A, s'establirà que són iguals entre si.

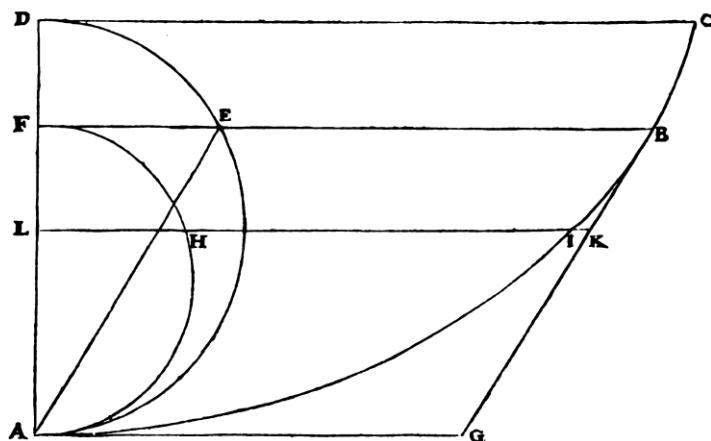
Es descriu sobre l'eix DA un semicercle, la circumferència del qual talli la recta BF, paral·lela a la base DC, en el punt E; i unit EA, es traça la paral·lela BG a EA, que certament és tangent a la cicloide en el punt B⁹. Aquesta mateixa troba en el punt G la recta horitzontal traçada per A: i sigui també descrit sobre FA el semicercle FHA.

Aleshores, per la proposició precedent, el temps de descens per l'arc BA de la cicloide és respecte el temps del moviment uniforme per la recta BG amb una velocitat la meitat de BG¹⁰, com l'arc del semicercle FHA a la recta FA. Però el temps esmentat del moviment uniforme per BG és igual al temps de descens naturalment accelerat per la mateixa BG, o per EA, que li és paral·lela i igual; això és, al temps de descens accelerat per l'eix DA

⁹ Per construcció, cf.II,23, que remet a II,15.

¹⁰ És a dir, una velocitat constant la meitat de la que té en arribar a G.

(proposició VI de Galileu sobre el moviment accelerat)¹¹. I així el temps per l'arc BA serà també respecte al temps de descens per l'eix DA, com la circumferència FHA del semicercle al diàmetre FA, cosa que s'havia de demostrar.



Si es considera tota la concavitat completa de la cicloide, el mòbil, després d'haver descendit per l'arc BA, ascendirà des d'allà continuant el moviment per un altre arc igual al primer (II,9), i hi emprarà tant de temps com descendent (II,11). Després enrere pervindrà per A a B, i també els temps d'aquestes oscil·lacions singulars, recorregudes en arcs més gran o més petits, seran al temps de caiguda perpendicular per l'eix DA, com la circumferència tota del cercle al seu diàmetre».

La proposició es mou amb una agilitat sorprenent. Notem que no hi ha cap ni una representació del temps ni del moviment, sinó que s'hi té en consideració trajectes recorreguts (o suposadament recorreguts). Tota la proposició esdevé la conseqüència d'un encaix feliç de raons i de proporcions de quantitats que representen trajectes

¹¹ La proposició de Galileu diu que si, des del punt més alt o més baix d'un cercle col·locat en posició vertical, es tracen plans inclinats fins al peu de la circumferència, els temps de caiguda per aquests plans seran iguals.

pel fet que es pot relligar unes raons i proporcions d'espais amb d'altres raons i proporcions d'espais.

En efecte (a) recull la proposició II,24. (b) El mateix trajecte BG , el faria amb un temps igual el cos que el recorregués amb una velocitat constant igual a la meitat de la que adquirís a G en un moviment uniformement accelerat (des del repòs en B), o el cos que el fes amb un moviment uniformement accelerat des del repòs en B fins a G [teorema de la velocitat mitjana]. (c) La igualtat entre BG i EA lliura la possibilitat d'aplicar un enginyós teorema de Galileu, tot basat en les raons de caire geomètric a partir de l'estudi del pla inclinat, i també entre les cordes d'una circumferència, precisament per a establir una igualtat de temps per a tota una colla de longituds que mantenen constructivament unes raons (aquí la igualtat de temps de caiguda per EA i per DA).

S'ha bastit doncs tot un sistema de raons i de proporcions que es fa entenedor a partir del problema que es té a les mans i que es pensa. I el punt B pot ser un qualsevol.

La generalització que suposa la proposició (i un qualsevol teorema geomètric) s'ofereix a tall d'una desexemplarització perquè perd l'exemple (ja considerat segons quantitats generals), i alhora es manté vàlida perquè sap que només ho ha provat per a un cas i que ho podria repetir per a d'altres casos que no ho ha fet, això de provar-ho. Per això hi ha l'expressió general de la proposició.

III

L'ESPAI RECORREGUT EN CAIGUDA LLIURE DES DEL REPÒS EN UN SEGON

Gràcies a la recerca que ha dut al nou rellotge de pèndol, que bat d'acord amb la cicloide i que s'ha ajustat amb el temps sideri i solar mitjà, s'ha aconseguit que la pèndola bati isocrònicament al segon, és a dir, que una oscil·lació des del punt d'un extrem fins a arribar al punt de l'altre extrem passant pel vèrtex es fa en un segon.

Després s'ha reeixit en la cerca d'una proporció entre el temps de l'oscil·lació i el temps de caiguda d'un cos per l'eix de la cicloide.

El treball de Huygens sens dubte toca molts punts de la màxima importància (per exemple, l'estudi sistemàtic que fa de la cerca del centre d'oscil·lació de tota mena de cossos) i, tanmateix, la circumstància d'haver defensar la relació de temps esmentada permet ara exemplificar quelcom prou rellevant que il·lustrarà un mica el paper cabdal de tot això.

1. La proposició IV,25 enuncia la troballa, feta amb la raó, d'una mesura universal i perpètua.

Primerament Huygens estima haver trobat una mesura del peu que eviti els equívocs entre les mesures del peu romà, grec, etc. El seu procediment segueix el següent esquema:

Suposem que ja tenim un rellotge que bat a segons, i es vol saber la longitud més o menys exacta entre el seu eix d'oscil·lació¹² i el seu centre d'oscil·lació¹³, l'oscil·lació esset d'un segon. Per a facilitar-ho s'agafa un segon pèndol simple fet amb una esfera de plom, o d'una altra matèria, suspesa d'un fil, i que es fa batre amb una oscil·lació

¹² El punt, o millor l'eix, al voltant del qual continua el moviment de va i ve per la força de la gravetat, i que és paral·lel al pla de l'horitzó.

¹³ També anomenat centre d'agitació, el punt de la línia del centre que és tan allunyada de l'eix d'oscil·lació com la llargada del pèndol simple que li és isocrònic.

petita al costat de la pèndola del rellotge, tot donant fil o traient-ne, fins que bat exactament com la pèndola del rellotge durant un quart d'hora o mitja hora.

Huygens ja ha estudiat (IV,22) com es troba el centre d'oscil·lació d'una esfera suspesa per un fil (la distància entre el punt d'oscil·lació i el centre de l'esfera és igual a la tercera proporcional de la distància del centre de suspensió al centre de l'esfera¹⁴, i del radi: comptada per sota del centre de l'esfera lliura el punt cercat del centre d'oscil·lació), per tant s'ha de saber la longitud del fil i la mida de l'esfera de plom.

Tot això dut a terme, Huygens divideix la longitud, trobada i fixada – gràcies al pèndol del fil i de l'esfera –, vàlida per a un qualsevol pèndol que bati al segon, des del punt de suspensió fins a l'eix d'oscil·lació en tres parts, i les anomena «peus horaris», que permetrien de fixar un valor universal de longitud o/i una referència objectiva per a la mesura de tots els altres peus (de París, etc.).

A més a més afegeix una consideració que demostra la proporcionalitat de les longituds (reduïdes) d'un qualsevol pèndol amb els quadrats dels períodes, que fins llavors sols se sabia per experiència, quan diu:

«I no és que ho puguem fer servir sols en aquells rellotges que indiquen, en cada retorn del pèndol, segons o les seves meitats; perquè s'obté l'objectiu per una altra qualsevol longitud de pèndol aparellat sempre que es conegui, per les proporcions de les rodes o pel nombre de dents, el nombre d'oscil·lacions a executar en un cert temps. Així, enllestit el pèndol simple, cadascun dels balanceigs del qual concorden amb cadascun de les retorns del rellotge, o amb dos, o amb tres, constarà ja d'això quants retorns d'aquell pèndol transcorren en el període d'una hora¹⁵. El nombre dels quals

¹⁴ Si la distància del punt d'oscil·lació al centre de l'esfera és LE , la distància del centre de suspensió al centre de l'esfera és ES , i el radi és EB , llavors:

$$\frac{LE}{EB} = \frac{EB}{ES}$$

¹⁵ És a dir, s'ha aparellat un pèndol simple del qual sabem la seva longitud, mentre el rellotge ens ha servit per a conèixer el període d'aquest pèndol

[*balanceigs*], si és quadrat, farà que, com el quadrat de 3600 – nombre dels segons de què constat una hora – és al quadrat d'aquell nombre, així la longitud del pèndol simple enllestit (longitud que s'ha d'entendre sempre des del punt de suspensió al centre d'oscil·lació) és a la longitud d'aquell pèndol horari de tres peus del qual parlàrem.

«Perquè això passa pel fet que les longituds de dos qualssevol pèndols són entre si com els quadrats dels temps en què transcorren cadascuna de les oscil·lacions; i d'aquí que [*aquelles longituds*] tinguin una raó inversa dels quadrats dels nombre que resulten de les oscil·lacions fetes en uns intervals de temps iguals».

En efecte ha mostrat que el temps de cada retorn d'un pèndol entre cicloïdes¹⁶ té una raó determinada amb el temps de la caiguda vetical des de la meitat de la llargada del pèndol¹⁷, és a dir, la raó de la circumferència al seu diàmetre ($2\pi/2r$, el doble del demostrat en la proposició II,25 perquè compta tot un retorn)¹⁸.

D'aquí es dedueix que, en dos pèndols, els seus temps d'oscil·lació són entre si com els temps de caiguda vertical des de la meitat de les seves alçades¹⁹.

La raó de les meitats, de les llargades dels pèndols, és la de llur totalitat.

Les alçades (és a dir, les longituds dels pèndols) tenen una raó doble de la dels temps de caiguda (pel moviment uniformement accelerat, cf. II.3). Per tant les alçades tindran també una raó doble del temps que mesura cada oscil·lació.

Es demostra la proporcionalitat de les longitud d'un pèndol amb el quadrat dels períodes.

simple. La comparació estarà entre la longitud d'aquest pèndol simple i la longitud d'aquell pèndol horari de tres peus.

¹⁶ Es refereix al fet que la pèndola del rellotge es mou entre dues lamel·les cicloïdals, i que fan que bati cicloïdalment (cf.III,6). D'altra banda la proporció que ho defensa, és clar, és la II,25.

¹⁷ La mida de l'eix de la cicloïde que determina el moviment cicloïdal de la pèndola s'ha fixat des de la primera part de l'*Horologium oscillatorium* com la meitat de la *longitud* del pèndol vertical. [Parlem sempre de «longitud» en l'accepció de «longitud reduïda», cf.IV,24].

¹⁸ En el temps de *tota una oscil·lació completa* la raó és el doble de $\pi/2r$ (cf. II,25), és a dir $2\pi:2r$.

¹⁹ $\frac{\frac{L_1}{2}}{[temps\ 1]} = \pi = \frac{\frac{L_2}{2}}{[temps\ 2]}$, després conclou que $\rightarrow \frac{L_1}{T_1^2} = \frac{L_2}{T_2^2}$

Per tant, essent L la longitud del pèndol i T el temps d'oscil·lació, si $L_1/L_2 = T_1^2/T_2^2$, i prenent un temps igual x , llavors els nombres d'oscil·lacions fetes en un mateix temps seran x/T_1 i x/T_2 , llur relació farà $\frac{x^2/T_1^2}{x^2/T_2^2} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$. Per tant L_1/L_2 és la raó inversa dels quadrats de x/T_1 i x/T_2 .

Certament, afegeix Huygens, si fins avui sols per experiència s'ha comprovat aquell teorema de les longituds dels pèndols – tenir aquestes en efecte la raó doble dels temps en què es duen a terme cadascuna de les oscil·lacions –, la seva demostració s'ha fet manifesta ara per allò dalt reportat²⁰.

I subratlla que «les oscil·lacions molt petites del pèndol simple no difereixen sensiblement de les oscil·lacions molts petites del pèndol suspès entre cicloïdes²¹, la longitud del qual és la mateixa que la del primer. I així també les longituds dels pèndols simples tindran la raó duplicada dels temps en els quals les oscil·lacions molt petites s'efectuen».

²⁰ Huygens sols ho ha demostrat aquí per a la cicloïde. Tanmateix una manera de veure-ho – més avall ho suggereix – faria així:

Tant l'estudi de les cicloïdes com el del pèndol simple són «ideals». Si més no se suposa en el pèndol simple que tot el pes de la lentilla es troba concentrada en un punt i que el fil on penja no té pes, amb l'afegit que el pèndol simple no bat sempre amb el mateix temps, pres en sentit estricte.

Però tots els pèndols són de fet compostos. Quan se cerca el seu centre d'oscil·lació se cerca de fet un pèndol ideal que bati com el compost.

Per tant s'ha demostrat per a la cicloïde que els temps d'oscil·lació depenen de la longitud del pèndol. Però, i això és important, el temps d'oscil·lació no depèn de l'amplària de l'oscil·lació, que sempre es fa amb el mateix temps, i s'assumeix que el pèndol simple amb una batuda molt petita no n'és una excepció. Huygens estimaria haver demostrat així que, per a tots els pèndols, el temps de batuda depèn de la longitud: en efecte es podria pensar que el pèndol simple no fóra més que un cas límit del pèndol que bat cicloïdalment.

²¹ Repetim que allò que és vàlid per a pèndols suspesos entre cicloïdes (i que es mouen cicloïdalment) també ho seria per al pèndol simple (raó de temps i longituds) – el pèndol simple batent al segon com la pèndola del rellotge, no hi hauria un motiu seriós per a no assimilar-lo en el cas general dels pèndols moguts cicloïdalment.

2. La proposició IV,26 ens diu com es determina l'espai que recorre un greu que cau verticalment en un temps donat.

El pèndol permet de calcular l'espai recorregut pels cossos que cauen en un temps determinat:

«Tots els qui investigaren fins avui aquesta mesura havien necessàriament de remetre's a experiències; en aquells, pels quals aquella mesura fou establerta, no s'arribà fàcilment a una determinació exacta a causa de la velocitat de les caigudes adquirida al final del moviment. Però des de la nostra proposició 25, del *Del descens dels greus* [II,25], i coneguda la longitud del pèndol que bat estrictament al segon, sense més experiència, podem obtenir el que es busca per una certa conseqüència. I en primer lloc certament se cerca aquell espai que el greu recorre en el temps d'aquell segon exacte, de la qual cosa serà permès després de treure'n qualsevol altra. Perquè en efecte diguérem que la longitud del pèndol era de 3 peus dels horaris: però el temps d'una oscil·lació molt petita és al temps de descens perpendicular des de la mitja alçada del pèndol²², com la circumferència del cercle al diàmetre, això és com 355 a 113²³: si es fa com un temps primer a un altre, així el temps d'un segon exacte, o seixanta tercers, a un altre²⁴, llavors fa $19''\frac{1}{10}$ el temps de descens per la mitja alçada del pèndol, que certament és de 18 polzades de peu. Però com els quadrats del temps, així són els espais recorreguts en aquells temps, tal i com es mostrà en una proposició anterior²⁵. Llavors, si es fa com el quadrat de $19''\frac{1}{10}$ al quadrat de 60'', això és, com 36481 a 360000, així 18 polzades a un altre, surt 14 peus, 9 polzades, 6 línies, en alçada de descens perpendicular, en el temps d'un segon. Però com el peu horari és al parisenc com 881 a 864, la mateixa alçada serà, reduïda a aquesta mesura, molt propera a 15 peus i una polzada. També aquesta acorda del tot amb experiments nostres acuradíssims, en els quals aquella part de temps, en què s'acaba la caiguda, no es discerneix ni en el judici de les oïdes ni en el de

²² La longitud del pèndol és de 3 peus i és el doble de l'eix de la cicloide (eix que fa doncs 18 polzades).

²³ Valor aproximat de π .

²⁴ És a dir, $\frac{60'''}{x} = \frac{355}{113} \cong 3,145$, i llavors $60:3,1415 \cong 19,1'''$.

²⁵ Cf. II,3. Es tracta dels espais recorreguts per moviments uniformement accelerats, afer prou estudiat per Galileu.

l'ull; cap d'aquests dos no es aquí suficientment segur; però es coneix sense cap error l'espai recorregut descendent d'un altra manera que provarem aquí d'exposar»²⁶.

Repassem el següent:

a) El peu horari és una mesura de Huygens, que la voldria universal (un pèndol simple que batés per segons tindria tres peus de longitud). El fa equivalent a 12 polzades, cadascuna amb 12 línies.

b) El peu de París ($\approx 0,3248$ metres) té també 12 polzades, cadascuna amb 12 línies.

c) La relació de la circumferència al diàmetre val π . En el text com 355 a 113.

d) La longitud del pèndol és el doble de l'eix de la cicloide que defineix l'oscil·lació. Per tant si el primer feia 3 peus horaris l'eix de la cicloide farà la meitat, és a dir, 18 polzades.

e) Amb el que hem estudiat a IV,25, hem arribat que la raó dels temps de la batuda a segons amb el de la caiguda per l'eix del pèndol és igual a la raó entre la circumferència i el diàmetre ($2\pi r/2r = \pi$). Per tant:

$$\frac{\text{temps batuda}}{\text{temps caiguda vertical per l'eix de la cicloide}} = \frac{60'''}{t} = \left(\frac{355}{113}\right)$$

Fent càlculs: $t = 19''' \frac{1}{10}$

El cos baixa 18 polzades de peu horari en $19''' \frac{1}{10}$.

f) Se sap que en un moviment uniformement accelerat els espais són com els quadrats dels temps (Huyghens ho estableix a la proposició II,3), per tant és fàcil de seguir que:

$$\frac{\left[19''' \frac{1}{10}\right]^2}{[60''']^2} = \frac{36481}{360000} = \frac{18}{l}$$

²⁶ Explica una enginyosa prova experimental amb una esfera de plom que cau verticalment mentre el pèndol fa una semioscil·lació.

En peus horaris: $l = 14$ peus 9 polzades 6 línies.

En peus de París: $l = 15$ peus 1 polzada $\approx 4,899$ metres.

Es tracta de l'espai recorregut pel cos que cau des del repòs durant un segon.

IV

EXCURS SOBRE L'ACCELERACIÓ DE LA GRAVETAT

1. La resultant troba l'espai recorregut ($\approx 4,9$ metres) per un cos en caiguda lliure des del repòs en un segon.

Potser sobta la manera d'apropar-se a una quantificació del moviment de caiguda per dos motius diferents: el primer per l'ús de raons i de proporcions; el segon pel fet que aquestes raons i proporcions tenen en compte quantitats d'espai i de temps.

L'ús universal de l'àlgebra i l'anàlisi per a definir el moviment uniformement accelerat, i en espacial aplicats a la caiguda, alhora que permet una generalització d'acord amb orientacions diverses, i de facilitar extraordinàriament la recerca, també ha tingut l'inconvenient de destorbar la certesa que lliura la consideració de l'espai i el temps.

La mecànica moderna clàssica rep l'impuls definitiu amb els *Principia mathematica philosophiae naturalis*, que fa un ús exhaustiu de raons i proporcions – i alhora els *Principia* sovint suposen ja una manera de treballar que també deixa aquest estadi de raons i de proporcions per a endinsar-se en concepcions algèbriques i de l'anàlisi (la mateixa llei II suposa una acceleració instantània, per exemple). No és descartable que una de les dificultats de l'estudi d'aquesta obra ragui en la pluralitat dels seus recursos matemàtics segons la tradició (atenent espais i temps, i les seves complicacions) i d'acord amb altres maneres de treballar. Si més no una consideració en detall duria versemblantment que les raons i proporcions amb espais i temps són cabdals – mentre és prou conegut que Newton esdevé un dels pares de l'anàlisi matemàtica amb el seu tractament de les fluxions.

Alhora l'estudi per a comprovar la validesa de la teoria de la gravitació universal inclou l'esment a Huygens. Després de calcular el *sinus versus* de l'arc de la Lluna recorregut en els transcurso d'un minut afegeix²⁷:

²⁷ Cf. *Principia* III, Proposicions IV.

«I per la mateixa força els greus descendeixen de fet a la Terra. Car els pèndols que baten al segon d'oscil·lació a la latitud de París fan de longitud tres peus de París i $8\frac{1}{2}$ línies, com ha observat Huygens. I l'alçada que el greu descriu caient en el temps d'un segon és a la meitat de la longitud del pèndol esmentat en una raó doble de la raó entre la circumferència del cercle i del seu diàmetre (com també ha indicat Huygens), i per tant és de 15 peus de París, 1 polzada, $17\frac{1}{9}$ línies. I en conseqüència²⁸ la força per la qual la Lluna és retinguda en el seu orbe, si es descendeix a la superfície de la Terra, es comporta igual a la força de la gravetat aquí entre nosaltres».

2. L'obra de Newton és del 1686 (2^a 1713) i la de Huyghens del 1673. Òbviament tant l'un com l'altre sabien tot el que es relaciona amb un espai recorregut d'uns 4,9 metres en caiguda lliure des del repòs, durant un segon.

L'enunciat de la proposició II,5 del mateix *Horologium oscillatorium* torna a demostrar (aquí per reducció a l'absurd) la proposició corresponent de Galileu:

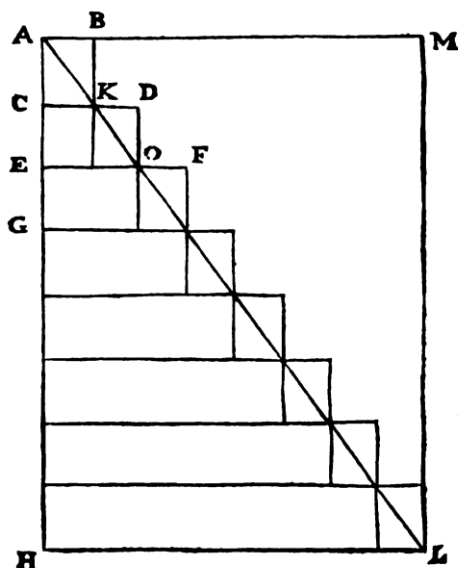
«L'espai recorregut en un temps determinat per un greu començant una caiguda des del repòs és la meitat de l'espai que aquell greu travessaria en un temps igual d'un moviment uniforme amb la velocitat que ha adquirit en el darrer moment de la caiguda».

La demostració s'ajuda amb el següent gràfic:

²⁸ Newton havia deduït, dels efectes de la força que desvia la Lluna del moviment uniforme rectilini, el recorregut de caiguda d'un greu sobre la Terra – suposant la validesa de la hipòtesi general de l'autor – amb una resultant de 15 peus, 1 polzada, $14\frac{1}{9}$ línies.

El càlcul directe de Newton en la cita, el fa seguint les lletres c), d), e) i f) de les pàgines anteriors:

$$\frac{l}{18} = \left(\frac{60'''}{19'''} \right)^2 = \left(\frac{355}{113} \right)^2 = \pi^2.$$



AH (temps), HL (velocitat), AMLH (espai d'un mòbil que es mou en un temps AH a la velocitat HL); després s'hi representa seccions de temps i de velocitat.

Tots els paral·lelograms sobreposats en forma d'escala són espais discernibles (en un temps discernible) que poden aprimar-se tant com es vulgui. Una línia-paral·lelogram HL no en seria una excepció, caldria copsar-la com el paral·lelogram elemental de l'espai recorregut, per breu que fos el temps (l'alçada), i que no valgués la pena de representar-se'l.

La raó entre aquest espai i aquest temps s'anomena «velocitat HL», i això valdria arreu de les línies horitzontals en el triangle AHL, de manera que les sumes dels espais representats tendiria a un triangle rectangle, suma dels espais que seria la meitat de l'espai que el mòbil franquejaria si mantingués la raó d'espai i de temps, entre el paral·lelogram elemental HL i el seu costat, durant el temps AH (paral·lelogram AMLH)²⁹.

²⁹ Per a una consideració més detallada d'això, cf. *El temps i el moviment natural* QF6, A propòsit de la cinemàtica QF38.

En el present cas la resultant ha lliurat que el mòbil cau 4,9 metres en un segon. És a dir, el triangle ALH permet establir que la suma de tots els espais inclosos és de 4,9 metres. Per tant el paral·lelogram AMLH fa 9,8 metres, i el mòbil hauria recorregut aquest espai en un segon si ho fes uniformement amb la velocitat representada pel paral·lelogram HL.

L'espai AMLH seria el recorregut durant un segon per un mòbil que anés uniformement de tal manera que travessés un tal espai AMLH. Hi hauria una raó entre espai i temps.

És clar que, seguint el cas, si l'espai AMLH val 9,8, llavors per construcció HL valdria 9,8, si AH val un segon.

Però una línia-paral·lelogram HL no seria res més que un espai representat per la línia-paral·lelogram, i un temps elemental.

Com això es podria estendre a qualsevol línia-paral·lelogram d'AMLH, concloem que en un moviment uniforme la raó entre espais i temps sempre és igual.

Què voldria dir que la velocitat creix uniformement en la direcció descendent de l'eix AH, que representa el temps?

Doncs que entre la raó espai (línia-paral·lelogram) i temps elemental, aconseguida des del repòs, i un temps transcorregut des del repòs, hi hagi una proporcionalitat respecte d'entre una qualsevol altra raó espai i temps elemental, i el temps transcorregut des del repòs.

Per tant que, en el moviment de caiguda des del repòs, la raó entre l'espai i el temps elemental (moviment uniforme) i el temps de caiguda és proporcional en tots els casos.

Quina és, en el cas que ens ocupa, aquesta constant de proporcionalitat? En aquest cas una línia-paral·lelogram HL, que representa 9,8 i un temps elemental, s'abastaria en un temps transcorregut d'un segon: lliuraria doncs la constant de proporcionalitat. Certament 9,8. Fora d'una gènesi de raons i de proporcions, aquest 9,8 es mantindria més aviat quelcom desfigurat.

V UN EXERCICI DE MECÀNICA

1. Les notes a l'*Horologium oscillatorium* permeten d'introduir algunes consideracions a propòsit del que s'hi fa precisament des de la perspectiva de saber l'espai que recorre un cos que cau en un temps fent omisió de resistències.

Certament no es determina directament perquè ocorre massa de pressa: versemblantment les experiències que s'hi proposa deuen ser difícils de complimentar escaientment. Si més no la troballa de Huygens a propòsit del pèndol n'esdevé un bon mitjà.

La construcció d'un rellotge exemplifica la tenacitat de trobar peces de tot tipus escaients, de perfeccionar-ne l'acoblament, d'aprendre dels altres rellotges tot fent progressos en una tradició d'aquests mecanismes. El rellotge d'una qualsevol època es mostra com un enginy resultant d'una complexitat teoricopràctica de llarg abast, que va des de l'extracció de materials, que passa per la fosa i els motlles corresponents, que fa requesta d'eines varies, que en compon els elements, etc. Una tasca amb una finalitat que segueix moltes passes fetes per d'altres homes, que s'incardina en una transmissió de generació en generació, que palesa moltes peculiaritats de l'ésser humà extractor, transformador, manipulador, creador, dins d'un projecte d'obtenció d'un mecanisme.

La pretensió d'afinar l'aparell de rellotgeria es copsa dins d'aquest context. Huygens fou el primer a usar el pèndol aplicat als rellotges (fins llavors, des de Galileu, s'avaluava el temps tot comptant les seves curses), fou el primer a ponderar la corba cicloide com la figura segons la qual havia de moure's la llentilla per tal de fer oscil·lacions isocròniques, fabrica unes làmines que limiten l'oscil·lació del pèndol, calcula com augmentar o disminuir el temps de batuda per mitjà de pujat o baixar uns pesos estratègicament col·locats, a més a més d'una quantitat enorme de demostracions per a estimar tota mena de relacions dins dels pèndols, tota mena de raons a trobar entre els elements de la cicloide, ultra un estudi del comportament dels greus en la caiguda lliure i en els plans inclinats, i

una presentació vàlida per a tota classe de cossos que oscil·lin i d'acord amb les característiques de cadascun.

Les consideracions del dia sideri i del dia solar remunten a l'antiguitat. La problemàtica d'un dia solar mitjà es planteja nítidament en l'*Almagest*, i l'un i l'altre pressuposen l'admissió dels moviments corresponents i l'avaluació de l'esfera celeste. Hi ha doncs una assumpció d'una problemàtica astronòmica, l'acceptació de quelcom rebut, que en cap cas no vol dir acríticament.

Huygens cerca un rellotge que compti tan fidelment com sigui possible el temps. Fet i fet tots els moviments necessiten la pauta que lliura el compte del temps. És clar que s'escapoleix una exactitud incondicional. La manipulació de les peces del rellotge de pèndol palesa que hi ha l'aproximació més encertada possible des del repàs de materials i les habilitats dels operaris, àdhuc guiats pel càlcul més sagaç que duu a l'ús de petits cossos capaços d'ajustar el temps de la cursa. Aquest rellotge és una obra humana tan reeixida com les capacitats pràctiques i tècniques que es posseeix: tanmateix sempre és perfectible.

I l'*Horologium oscillatorium* no explica ben bé com va arribar l'autor a la descoberta de l'isocronisme (però sí que diu que hi va arribar tenint la geometria per guia), el treball explora la congruència entre el comportament d'un pèndol de batuda cicloïdal i l'estudi corresponent de la cicloïde.

Circumscrips a allò esmentat en el present escrit, la seva rellevància estriba en particular a estudiar els cossos que es mouen uniformement o uniformement accelerats mentre es capaç de relacionar trajectes cicloïdals i de caiguda lliure amb la relació de la circumferència i el seu diàmetre.

S'ha arribat a una resultant del tot brillant: la congruència del moviment cicloïdal oscil·lant del pèndol amb les concepcions galileanes del moviment, per tant hi ha encadenament d'afirmacions que eixampla la comprensió dels fenòmens (des de la caiguda lliure d'un cos o per un pla inclinat al moviment oscil·lant) o capaç de preveure noves experiències.

2. La troballa de la magnitud de la caiguda lliure d'un cos per segon permet d'afegir-hi quelcom. Perquè al cap i a la fi no suposa res més que una explicació de la circumstància que la relació del temps de mitja oscil·lació i del temps de caiguda és la de la semicircumferència al diàmetre (la seva raó és proporcional a la raó entre $\pi/2$ i la unitat). No conté res més de nou, no implica cap nou fenomen: sols fa palès una quantitat a partir de la relació que s'ha establert entre l'oscil·lació cicloïdal que efectua el pèndol i un moviment uniformement accelerat de caiguda lliure. L'encert d'aquesta relació, i de les relacions quantitatives que ha comportat fa que, per unes simples operacions, es pugui lliurar el recorregut d'un cos que cau per segon. No cal cap corroboració: basta l'oscil·lació cicloïdal i estudiar els afers (si hi ha alguna corroboració confirmarà, és clar, l'encert de tot plegat).

Es tracta al cap i a la fi que el càlcul de la caiguda d'un cos en un segon forma part del mateix conjunt que comprèn el moviment del pèndol (hi ha un moviment que cau per la gravetat i s'és capaç de complicar-lo quantitativament amb el de caiguda lliure), on s'impliquen magnituds lineals. En d'altres parts de la ciència es tractarà més aviat d'assegurar-se des d'aquesta part de les magnituds lineals (o més enllà d'aquestes) la congruència d'estimar que hi ha quelcom semblant (per exemple, com Newton relacionà la caiguda d'un cos i el moviment de la Lluna).

La circumstància que, feta atenció a les magnituds lineals implicades, l'obtenció de l'espai recorregut per un greu en caiguda lliura es trobi a partir de les consideracions del moviment uniforme i uniformement accelerat, i d'una munió de relacions geomètriques (raons i proporcions), exemplaritza una vegada més, malgrat un constant barreig d'elements, alguna cosa que ja es palesa en la cinemàtica, on el temps és un «pur temps» que es pot copsar amb una qualsevol quantitat (sempre que el conjunt sigui congruent), mentre ells mòbils es mouen d'una manera ideal i que l'important rau que la raó dels espais (que de fet són moviments) i del temps sigui constant en l'uniforme, i que es vagi complicant en l'uniformement accelerat. En la part de l'escrit de Huygens que es refereix a les relacions entre els temps de fer mitja oscil·lació i de caiguda vertical, el gràfic

geomètric representa com a molt segments implicats en moviments, però bàsicament serveix com a imatge per a relacionar amb raons i proporcions diferents velocitats que sols es consideren abastades en algun punt. El gràfic, tanmateix, ofereix idealment els seus segments, quan convé amb una significació quantitativa, de manera que l'estudiós no abandona el nivell ideal i el temps pur, que pot arribar a resultants estimables des d'aquí sense haver abandonat una consideració idealitzada, mentre es mantingui coherent. Es tracta que la troballa de l'espai (moviment) recorregut durant un segon (temps físic aquí copsat per allò que conté de pur) és un *exercici teòric*. Precisament l'única dada que és agafada experimentalment rau en la mesura de la pèndola perquè bati a segons, llargada i segon que s'hi assimilien com a dades, a la tasca teòrica, que es desenvolupa d'acord amb el que ja se sap dels moviments, de les raons i de les proporcions geomètriques amb les corresponents relacions dels segments que siguin d'interès.

Fet i fet les dades experimental es tenen en compte a títol de dades prèvies assumides en la teoria.