F. GRAELL I DENIEL

LA RAÓ DE TEMPS ENTRE MOVIMENTS PENDULARS I LLIURES EN L'*HOROLOGIUM OSCILLATORIUM* DE CHRISTIAAN HUYGENS

QUADERNS DE FILOSOFIA

45

F. GRAELL I DENIEL

LA RAÓ DE TEMPS ENTRE MOVIMENTS PENDULARS I LLIURES EN L'*HOROLOGIUM OSCILLATORIUM* DE CHRISTIAAN HUYGENS

45

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2016

1ª edició: setembre 2016

ISBN: 978-84-943607-4-9

www.xtec.cat/~fgraell
E-mail: fgraell@xtec.cat

La web permet de baixar la còpia d'un qualsevol quadern editat.
Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia.*

CONTINGUT

PRESENTACIÓ

No hauria de caldre afegir que un exercici de filosofia de la ciència no la conclou de cap manera. Car les pràctiques científiques dels segles XX i XXI, no se les deu poder comprendre en termes dels treballs dels segles XVI-XVII, a banda del fet que l'estudi d'aquests primers segles permet un descabdellament indefinit de temes i d'aspectes. Malgrat que alguna mena de plantejament invers deu esdevenir tant malencaminador com el primer: no sembla que un hom pugui abocar-se a la tasca pròpia d'aquella disciplina sols a partir de les resultants de la ciència dels darrers decennis.

Perquè cal trobar-se al costat de l'home de ciència i arran del seu treball, i això deu ser vàlid per a tots els temps. Un pensament que no s'hi manté, que fa mer metallenguatge, que estima que els jocs que és capaç d'inventar hi esdevenen útils, que encotilla allò que no passa pel seu sedàs, no deu poder tirar endavant el projecte engrescador de participar de l'entusiasme científic dels avantpassats i del seus contemporanis.

Sens dubte la filosofia ha de continuar perseverant en el fet que la ciència en el seu conjunt deu ser una de les realitzacions humanes més fascinants; ha de mantenir-se en el seguiment dels treballs prodigiosos de milers d'éssers humans; ha de persistir en la tasca de repensar una quantitat ingent de treballs, ha de prosseguir en l'acolliment dels textos d'aquests homes savis com a fonts inexhauribles de meravelles, i com a ocasions de discursos il·limitats.

La ciència natural deu ser l'única filosofia de la natura: si això sembla comprovar-se en les mateixes activitats de fer ciència i filosofia, i també en la circumstància que aquesta última hi aporta quelcom interessant quan es manté a prop de l'activitat de l'altra, llavors sols l'experiència ho pot reblar.

Aquí se segueix una mica el treball de Huygens a propòsit del rellotge de pèndol, per tal de circumscriure's a l'estudi del lliurament per primera vegada d'una quantificació de l'acceleració de la gravetat.

L'afer gaudiria d'una certa importància perquè permetrà una vegada més d'apropar-se al concepte d'acceleració i per la rellevància de la gravetat. No n'hi hauria prou, en un cert àmbit, de satisfer-se amb l'aproximació del canvi de velocitat. Car, ¿se sap que el temps no es pot comptar pròpiament?¿s'admet que la velocitat, i les seves modificacions, són *per se* afers qualitatius?¿s'entén be bé què ofereix una expressió d'unes quantitats respecte dels quadrats d'unes altres? En efecte comprendre aquí implica la capacitat de discernir una mica tot això: no farà pas canviar la noció d'acceleració en els seus usos dins de les disciplines naturals i, tanmateix, faria entendre, per exemple, que els *Principia* de Newton palesin nivells diversos de tractament de les nocions bàsiques, i sobretot permet que un hom hi vagi redescobrint arreu què hi ha.

El text de Huygens estudia doncs el rellotge de pèndol, repassa el moviment de caiguda, cerca els centres d'oscil·lació de molts cossos, presenta la força centrífuga, etc. Aquí bastarà oferir un esbós del funcionament del rellotge, apropar la cicloide per a l'estudi de batudes iguals, i abocar-se en el determinació de la gravetat. Si tot això desvetlla l'interès del lector l'escrit haurà abastat amb escreix el seus objectius.

I
UN MECANISME ÚTIL PER AL TEMPS

Només començar l'*Horologium oscillatorium* l'autor anuncia una aportació capital: fins llavors el pèndol simple no podia oferir una mesura invariable del temps. Però ha trobat la solució: un pèndol que bat sempre igual[1].

«En efecte una mesura del temps segura i igual, en el pèndol simple, no es troba en la natura quan s'observa curses més amples més retardades que les més estretes[2]; però la geometria duu per un camí divers d'aquella natura, i descobrim la suspensió, desconeguda anteriorment, del pèndol en la corba estudiada d'una certa línia que mena admirablement, completament, per la raó a la igualtat desitjada que li lliura. En la mesura que després ho hem aplicat als rellotges, així s'ha abastat un moviment seu constant i segur, de manera que, després de reiterats experiments empresos en terra i mar, es manifesta ja, tant en els estudis d'astronomia com en l'art de la nàutica, que els és de moltíssim ajut. Aquesta és la línia que un clau fixat en la circumferència d'una roda giravoltant amb un volteig continu descriu en l'aire; els geòmetres del nostres temps l'anomenen cicloide, i és valorada diligentment per les seves moltes altres propietats; per nosaltres, per aquella facultat que diguérem de mesurar el temps...».

---

[1] Huygens, Christiaan: *Christiani Hugenii ... Horologium oscillatorium, sive De motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae***,** Parisiis [Paris]; apud F. Muguet ..., 1673, pàgs.1-2. Recordi's que no era la primer vegada que l'autor s'ocupava dels rellotges de pèndol. El seu primer treball sobre rellotges, *Horologium*, és del 1658 i, entre d'altres afers, fou ja el primer a allargar el manteniment de l'oscil·lació de la pèndola per mitjà d'engranatges moguts per un pes, i d'introduir el pèndol en els rellotges (Cf. *Horologium oscillatorium*, pag.3).

[2] *Cum latiores excursus angustioribus tardiores observentur*. Com diu més endavant aquelles oscil·lacions del pèndol simple que recorren un arc més petit tenen un durada més curta, cosa que diu reconèixer-se fàcilment per alguna experiència que descriu, a més això no és imputable a la resistència de l'aire (cf. ídem, pàg.9).

FIG.I.

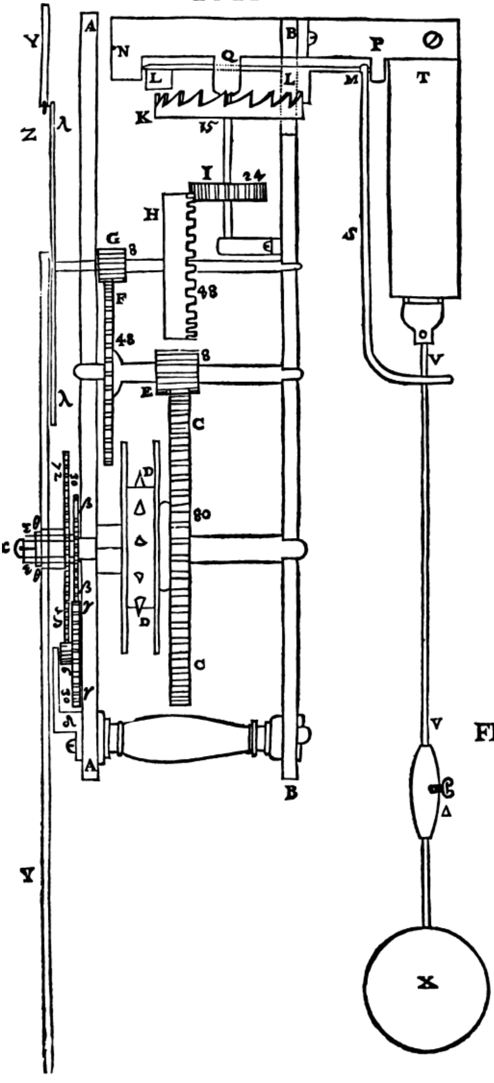
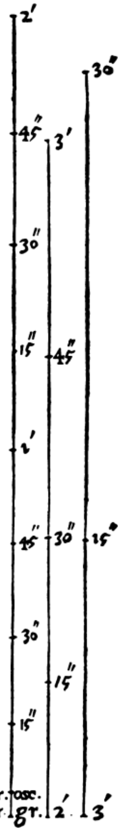


FIG.II.

FIG.IV.



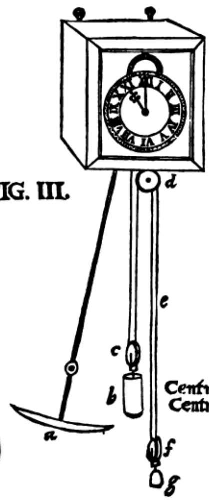


FIG. III.

La possibilitat de mesurar el temps: la introducció d'unes lamel·les metàl·liques corbes en la forma de dos braços [cf. Fig.II del gràfic] que s'obren limita el balanceig de la pèndola i fan que segueixi un moviment cicloïdal pel fet que es dóna precisament la curvatura de les fulles al mateix cos oscil·lant. Els estudis de la cicloide satisfan tota una sèrie de necessitats, se'n veurà alguna, mentre l'eficàcia de la regularitat de les oscil·lacions es palesa en els rellotges.

Mesurar el temps, comptar el nombre de batudes amb una diàfana significació temporal. En aquest punt fóra bo de contemplar un rellotge de pèndol, obrir-lo, escorcollar com treballa: Huygens, que millorà la precisió dels rellotges, explica una mica el seu funcionament, en lliura un gràfic, hi remarca les seves millores. La descripció no és certament completa mentre palesa el seu domini de materials i la seva habilitat. Tanmateix basta per a fer-se una idea de l'abast del propòsit de mesurar el temps.

1. **Un esbós de descripció del rellotge**.

La roda C [cf. Fig.I], amb les seves dents, gira amb un eix solidari a una politja D, amb unes punxes en la part interna que retenen la corda que passa i que aguanta uns pesos suspesos.

Així la roda C és moguda per la força dels pesos; aquesta mou la E i la F alhora. La F fa moure simultàniament la G i la H, que és una roda coronada que empeny també conjuntament la roda Y i la K.

Ometent la descripció de l'estructura superior del rellotge de la Fig.I, admeti's que s'ha muntat un eix LM de manera que és capaç de girar lliurament i solidàriament amb els moviments de la petita palanca S tot fent amb aquesta les mateixes oscil·lacions (S oscil·larà cap al lector i enllà del paper: també es veu a Fig. II). Aquest moviment és alternatiu, d'un costat a l'altre, d'acord amb el compàs que ocasionen les dents de la roda K (forçades a girar pel pes que penja de D) cada cop que es presenten successivament encaixant-se en els alerons LL soldats amb l'eix LM, per tant un mateix pot imaginar que aquest topar l'aleró i la dent de K marca els límits de l'oscil·lació del pèndol, que alhora allibera amb l'oscil·lació la dent de l'aleró pel fet de fer-lo girar solidàriament amb l'eix LN i amb la palanca S.

S’observarà així mateix que la palanca S té la seva part final encorbada i amb un orifici oblong, per on passa la pèndola VV, la qual penja d’un fil doble entre dues petites làmines (que mantenen una forma cicloïdal, cf. Fig.II).

Per tot plegat sembla fàcil de copsar que el moviment de la pèndola, amb una embranzida procurada per la pròpia mà, es manté gràcies a la força de les rodes tirades pels pesos; i alhora el retorn de la pèndola marca a les rodes (i al rellotge en conjunt) el seu ritme de moviment. En efecte el manteniment del balanceig del pèndol es deu al canvi de sentit del balanceig gràcies a les dents de la roda coronada i als alerons, i gràcies al petit impuls que hi va havent, els pesos actuant a través de les rodes. Altrament a la llarga l’aire el frenaria i tendiria al repòs.

D’altra banda Huygens ha aconseguit l’obtenció d’una igualat d’oscil·lacions gràcies a les introducció de les lamel·les (T en Fig.I, i vistes en perspectiva a Fig.II), de manera que es garanteixi que no es permet avançar la roda K més de pressa o menys, ni que l’afectin els canvis de temperatura de l’aire o algun altre defecte de construcció: en qualsevol cas o el rellotge mesurarà perfectament el temps, o no ho farà de cap manera.

Fig.I permet visualitzar també el nombre de dents de cada roda, i suggereix com cal afegir-hi les agulles (horària, minutera i la de segons, d’acord amb els eixos de C i de H), i d’altres detalls relatius a la seva muntura per tal que es vegin les agulles i es pugi modificar l’hora que indiquen.

S’avança ja que la pèndola ha de fer tres peus horaris (més avall ja es veurà què són) per tal de batre al segon.

De manera molt succinta es pot dir: una revolució de la roda C fa girar deu vegades la roda F (80/8), seixanta vegades la H (10×48/8), i cent vint vegades la K [(10×48/8)×48/24]. Llavors: una revolució de la roda K són 30 cops, que corresponen a tantes anades i vinguda (15×2) de la pèndola; per tant 120 voltes corresponen a 3600 segons, en els quals la roda C fa una volta (amb l’agulla minutera corresponent col·locada a ε) en el temps d’una hora. Unes rodes a l’alçada de l’eix per on gira C, i que es troben davant, permeten la conversió d’un gir complet horari en el gir d’una dotzena part de revolució, per tant de marcar la revolució de l'agulla horària. Noti's, finalment, que la roda H girant 60 vegades en una hora, la divisió del disc solidari λλ en 60 parts marcarà pel pas de les parts els segons.

La llentilla es farà de plom i de forma que venci tant com sigui possible la resistència de l'aire. La Fig.III deixa veure també el pes *b* que penja d'una politja *c*; un extrem de la corda que hi passa baixa des de la politja D (Fig.I), fins a la politja *c* (Fig.III), per a tornar a pujar fins a la politja *d* fixada en la part baixa del rellotge, i caure per *e* tibada gràcies al pes *g*, sense cap possibilitat de tornar enrere. Els últims detalls de tot plegat dependrà de l'habilitat del constructor de l'autòmat. Huygens calcula que l'autonomia del rellotge pot ser al voltant d'unes 30 hores.

Respecte de la pèndola i de les lamel·les basti el següent: la longitud de la primera ha de permetre que bati al segon (les longituds del pèndols són entre si com els quadrats dels temps que esmercen per a cada oscil·lació), i aquí serà de tres peus (horaris). Les lamel·les seguiran les cicloides generades per un cercle amb un diàmetre la meitat de la longitud de la pèndola. Llavors, independentment de l'amplada de la cursa, sempre batrà al segon, amb l'afegit que la llentilla [parlant amb precisió: el centre d'oscil·lació] també seguirà una nova línia cicloide, com demostrarà més tard (III,5).

La longitud de la pèndola condiciona el temps de batuda: a banda de modificar-la també es pot acabar d'ajustar el rellotge pujant o baixant un petit pes Δ (cf. Fig.I), collat a V; basti ara afegir que, per a facilitar l'aproximació, Δ pesa igual que V, la part inferior del qual conté unes divisions (Fig.IV), de tal manera que permet de col·locar còmodament Δ (la demostració i la troballa de les divisions, les lliura dins de les qüestions tractades en l'estudi del centre d'oscil·lació; en efecte cf. IV,23).

Per tant cara al temps cal anar seguint l'engranatge de diferents rodes amb un nombre divers de dents, i el joc corresponent d'eixos que remeten a una palanca [S en la Fig.I del gràfic] solidària amb la pèndola (i la llentilla), de manera que, per cada 3600 oscil·lacions simples d'un segon hi hagi un joc mecànic que permeti marcar els minuts, que d'altres rodes i enginys acabin amb una que assenyali les hores, i que es faci venir bé que en algun lloc s'indiqui els segons, a través d'un bell joc de combinacions d'eixos i de rodes.

Cal escorcollar el mecanisme que persegueix el temps, i admetre de seguida el mèrit que hi ha en la creació de rodes i d'eixos escaients, de dents i mides vàries, l'enginy que suposa, no sols la mateixa confecció de les peces, sinó la previsió de llur combinació per a una utilitat, els molts petits detalls de polit i d'ajustament, la dificultat de muntatge, la superació dels imprevistos, la tasca que tot això vagi bé. Hi ha una manipulació de materials des de la seva extracció de terra fins a formar part d'un mecanisme complet. S'hi troba doncs un treball teoricopràctic en la mateixa construcció del rellotge de pèndol àdhuc a banda d'una qualsevol demostració geomètrica: la transformació de materials naturals en peces d'una màquina inclou tots els aspectes rellevants que es puguin dir en una qualsevol altra circumstància. Es tracta d'un procés on van entrant, imbricant-se els uns amb els altres, la percepció amb tot el cos i el corresponent pensament, en un vincleig ocupacional que comporta la transformació natural que va menant cap al terme que es persegueix.

2. Temps del mecanisme i temps del cel.

Aquell que hagi provat de muntar algun mecanisme coneix perfectament les dificultats que s'hi troben: peces deficient, necessitat d'altres elements, desajustaments, etc. Aconseguir que un rellotge funcioni bé sembla ja una proesa quan algú es col·loca al 1673 o si ho fa amateurment avui dia. Caldrà sobretot paciència i constància, molta repetició que torna a provar l'estructura de rodes i d'eixos, prou dies de treball. En poques paraules: hi caldrà dedicació.

És clar que la previsió més gran a propòsit de construir quelcom capaç de mantenir un ritme més o menys constant, i preparat perquè unes agulles estratègicament col·locades en els eixos convenients vagin marcant hores, minut i segons, tot això, es diu ara, es deu a un esforç d'aproximació a partir de gaudir d'algun altre rellotge d'un qualsevol tipus, amb el ben entès que el disseny preveu que l'aproximació dels segons suposi que un eix marqui els minuts cada vegada que es compti seixanta segons, i que l'engranatge permeti que hi hagi la marca de l'hora quan han passat seixanta minuts. És a dir: l'error aproximatiu en una magnitud s'acumula en les altres, per tant es tracta d'apropar tant com sigui possible el dia a les vint-i-quatre hores del rellotge, perquè llavors la resta de magnituds s'aproparan a la dilatació temporal desitjada gràcies al sistema d'eixos i d'engranatges.

Huygens aconseguí amb el seu enginy, i amb l'enginy dels rellotgers anteriors, la construcció d'un rellotge prou encertat. Però aconseguí més: reeixí a fer solidaris l'engranatge de l'aparell i un moviment oscil·lant isocrònic gràcies a la introducció de fer-ho cicloïdalment, la qual cosa implicà que hi havia un rellotge que, dins de les aproximacions que es vulguin, pauta regularment el temps.

Imagini's per un moment que, l'aparell de Huygens, se'l considerés independentment d'un qualsevol altre temps, quan se sap que féu requesta del temps d'altres rellotges. Si fos doncs concebible aquella possibilitat un hom conclouria que hi hauria aquí una mesura del temps molt com cal. Ocorreria, tanmateix, que l'únic individu que podria mesura el temps segons aquest rellotge fóra el seu propietari. S'esdevindria com en les mesures lineals en l'època de l'holandès: el peu tenia una mida en cada contrada, a banda de moltes altres unitats de tot tipus.

El referent del temps per a Huygens i per als seus contemporanis es trobava en el cel, i tots els rellotges de l'època encalçaven d'ajustar-s'hi.

3. Un temps modèlic a la mà de l'home.

En efecte des de l'antigor s'ha perseguit de pautar el temps, per exemple, segons el dia solar mitjà o regular. Huygens cerca d'afinar tant com sigui possible l'aparell i ensenya per quin mètode es compara les seves resultants a «la vertadera mesura de les hores».

«Elegeixi's un lloc segur d'observació ocular des del qual els astres es puguin guaitar, i juntament teulades i parets de cases properes talment situades que, quan alguns estels comptats entre els fixos s'hi apropin, fixin els límits de ser vistos, els estels, simultàniament. Fixi's l'obertura en aquest lloc, d'acord amb el mida de la pupil·la, per tal que l'ull pugui tornar-s'hi a posar els dies següents i sense error. Ja en el moment mateix que algun dels estels desaparegui de la mirada anoti's el temps indicat en el rellotge. I faci's el mateix el dia posterior o, millor, alguns dies deixats passar. Que si sols es tracta d'un dia de separació entre dues observacions cal descomptar de l'última observació del temps del rellotge 3 minuts, 56 segons. En efecte així es comprovarà si la longitud de la pèndola és la correcta: quan el dia solar mitjà sobrepassarà qualsevol revolució del astre fixos en aquesta quantitat. Mitjà, dic, perquè els dies solars, de migdia a migdia, no són tots iguals entre si, com s'exposarà extensament tot seguit. Si en canvi l'observació es reprèn al capdavall després d'uns quants dies, es calcularà per a cadascun una quantitat igual com a causa de la diferència. Sigui, per posar un exemple, en la primera observació, en el moment de perdre's l'estel, observada l'hora 9 del rellotge, amb 30 minuts, 18 segons; després, passats set dies, el mateix estel desapareixent el rellotge indica l'hora 8, amb 50 minuts, 24 segons. Aquesta hora es queda curta respecte de la primera en 39 minuts, 54 segons. Els quals, dividits per set, lliuren un retard diari de 5′, 42″. Però havia de ser 3′, 56″, que és menor a aquella quantitat en 1′, 46″. I així el rellotge queda curt cada dia en una quantitat igual respecte de la mesura veritable, o mitjana, del dia»[3]

En efecte el temps a tall de mer passar uniforme significa quelcom, arrelat en tots els esdeveniments sense identificar-se en cap moviment[4]. Un qualsevol temps, i molt especialment aquell que es fa

---

[3] Ídem, pàgs.13-14.

[4] Deixi's la millora que suposa la introducció de la cicloide, i pregunti's un hom de nou què és un oscil·lació: versemblantment s'assumirà una altra vegada que hi ha *una* oscil·lació per allò que abracen els extrems on arriba malgrat que el moviment mateix que presenta resta sense quantificar. Hi ha quantificació del que és estàtic: llavors és la significació que se li lliura que permet una orientació temporal. El segon no és temps perquè hi hagi una oscil·lació, sinó perquè el procés que mena a l'existència d'aquesta oscil·lació passa en el temps i ell mateix és temps, de tal manera que un hom entén que les pautes són del temps en l'accepció d'allò estàtic que està abans i allò estàtic que està després.

El temps és inabastable tal qual perquè esdevé, tota significació temporal ho pressuposa i s'actualitza en l'esdeveniment que hi va havent. L'encalç d'una quantificació útil per al temps sovint és també el d'un ideal perquè ho és el temps entès com el d'un esdeveniment uniforme.

vàlid per arreu, no pot ser quantificat. I allò que se cerca és la pauta estàtica que permet que un hom compti mentre passa quelcom que tal qual és inabastable més enllà de fer-ho significativament i com a experiència.

No hi ha cap quantificació pròpia de l'esdeveniment temporal. I ara cal veure quin és el moviment que, malgrat no poder rebre tal qual quantificació, palesa un tal regularitat que mereixi la de possibilitar de fer-hi pautes estàtiques que permetin un càlcul mentre un hom hi significa temps.

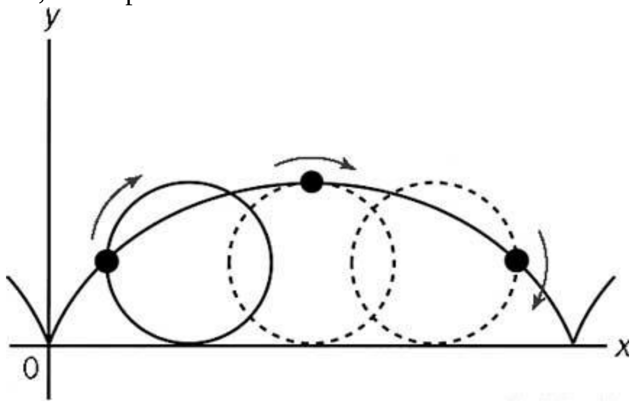
El cel estrellat ha gaudit d'aquet privilegi des d'antic, formant part del moviment diari en l'*Almagest* o del gir diari de la Terra sobre el seu eix des de Copèrnic. Ocorre que la certesa de caràcter observacional que el Sol cada dia s'endarrereix una mica respecte del gir dels estels fa que el dia sideri no pugui coincidir amb el dia solar.

D'altra banda cal tota una aproximació astronòmica per a entendre que cada dia solar és diferent degut a l'obliqüitat de l'eclíptica i a l'anomalia del moviment del Sol. El dia solar regular mitjà no és pràcticament mai l'autèntic, malgrat que una equació de temps permet rectificar la seva durada per a apropar-s'hi millor.

Es pretén doncs que el rellotge segueixi el pas regular del temps representat pel dia sideri, que el mateix dia solar autèntic persegueix sense tant d'encert (el càlcul del dia mitjà permet que es millori). Se l'ajusta perquè, emulant el temps sideri, es conformi a una mesura solar mitjana. Es vol regularitat i se cerca el control d'hores regulars, de minuts regulars, de segons regulars. El rellotge de pèndol representa un èxit de la ciència i de la tecnologia del segle XVII: es disposa d'un altre moviment capaç de pautar la regularitat del temps, i és a l'abast de l'individu. L'home domina un tal temps i és capça d'usar-lo com la quantificació privilegiada del temps.

II
LA RAÓ DE TEMPS D'OSCIL·LACIÓ I DE CAIGUDA

La línia cicloide ha permès abastar d'isocronisme en el pèndol, i per tant de mantenir un moviment que es desencadena segons el mateix temps en les repeticions. Precisament la construcció del rellotge es fa perquè compti el temps a través de pautes per a un moviment amb un temps igual en cada oscil·lació, i acordar-lo, a través de l'engranatge de rodes i d'eixos, amb el temps per excel·lència, el temps celeste.



(*http://mathonline.wikidot.com/the-cycloid*)

Es tracta d'obtenir un moviment mecànic que ho permeti, i llavors es descobreix que la pèndola ha de seguir la corba cicloide, és a dir, aquella corba que traça un punt fix d'una circumferència quan aquesta gira al voltant del seu centre tot fent una volta completa, tal i com es mostra en el gràfic, on un punt de la circumferència que es fixa arbitràriament va descrivint una corba que recull totes les posicions que va agafant a mesura que el cercle va giravoltant com si fos un cèrcol.

Amb això es fa possible un nombre considerable de troballes, i el llibre de Huygens en lliura prou. Una de les més conegudes rau que l'*Horologium oscillatorium* conté la primera aproximació que quantifica l'acceleració de la gravetat o, per ser més exactes, que quantifica l’espai recorregut en un segon per un cos que cau lliurement. Aquí valdrà la pena de circumscriure-s’hi: la rellevància de l’acceleració de la gravetat és tanta que es fa forçós d’explicitar-ne les passes que la lliuren i d’admirar l’obra de Huygens i, des d’aquesta, de bell nou la de Newton.

Per això bastarà en principi l’esment de les proposicions II,23-25, que permeten de comptar amb un pèndol isocrònic que bat al segon, i més endavant s’esmentarà el text de Huygens que aplica el trobat al moviment de caiguda. Comenci’s doncs per les tres proporcions de la segona part de l’*Horologium oscillatorium*.

LA PROPOSICIÓ II,23

Primerament faci’s una representació geomètrica del pèndol i de la seva oscil·lació seguint la línia cicloide per tal d’estudiar el temps que tarda a fer, per exemple, *mitja oscil·lació, admetent que l’altra mitja la farà amb un temps igual.*

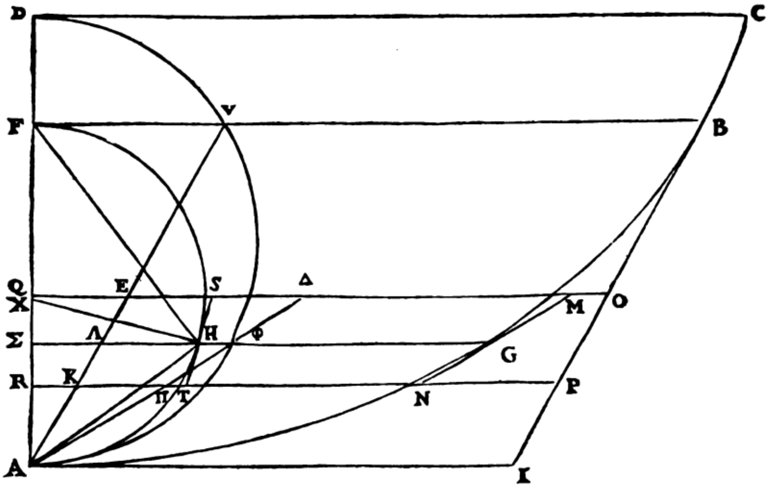
En efecte es tracta de comparar el temps de caiguda per la cicloide amb el temps de caiguda lliure. Però no es pot fer directament.

La proposició II,23 compara doncs el temps de caiguda per la cicloide amb el temps de caiguda per un pla inclinat, i els relaciona respectivament amb un segment tangent a una circumferència i un segment de l’eix de la cicloide.

Tanmateix caldrà anar per parts. De primer vegi’s una mica el gràfic de la semicicloide invertida *CA*.

Agafi’s els punts *B* i *G* a l’atzar de la cicloide, i faci’s *AI* i *DC* perpendiculars a l’eix *DA* pels extrems, *BI* tangent a la corba pel punt *B*; traci’s *FB* i *ΣG* paral·leles a AI; segueixi’s la construcció del semicercle *FHA*, faci’s *FX* igual al radi del semicercle més petit, *MN* i *ST* tangents a les corbes en els punts *G* i *H* respectivament, *QO* i *RP* línies que limiten *ST* i *MN*, i dibuixi’s la resta d’elements geomètrics.

Es tracta de saber el temps que trigarà un mòbil a recórrer el segment *MN* si anés a una velocitat constant, específicament si ho fes amb la velocitat aconseguida pel cos que baixa per la cicloide quan es troba al punt *G*.



Tota la demostració es basa en molta geometria elemental i al coneixement dels moviments uniformes, dels uniformement accelerats i de les seves propietats. Certament no hi ha aquí mai cap símbol (xifra o lletra) que representi ni el temps ni la velocitat. No es tracta que un hom no pensi *quantitativament* el temps i la velocitat: ocorre que no se'ls plasma més que com a magnitud temporal i com a magnitud de velocitat. Els vessants qualitatius superen els quantitatius i s'expressen com a quantitats sense especificació que sols són escaientment explicitades per les raons geomètriques − en les quals es troben implicades − dels elements geomètrics que representen recorreguts enllaçats amb d'altres element constructius del model geomètric.

No es tracta que no hi hagi un bon domini de la quantitat en temps, velocitats i recorreguts, sinó que es creu convenient de descabdellar la proposició seguint les raons geomètriques esmentades, i una concepció del temps i de la velocitat que pensa força que hi ha una significació temporal i del moviment.

Com més avall es reproduirà textualment la proposició II,25 basti ara fer un esquema de la proposició II,23, amb la llicència d'usar algun simbolisme per al temps i per a la velocitat. I així:

t_{MN} = temps que tarda un cos a recórrer *MN* amb una velocitat constant igual a la que té el cos que cau per la cicloide en el punt *G*.
t_{OP} = temps que tarda un cos a recórrer *OP* amb una velocitat constant igual a la meitat de la que ha adquirit a *I* baixant per *BI*).
v_{OP} = velocitat constant del cos en el tram *OP* (igual a la meitat de la que ha adquirit a *I* baixant per *BI*).
v_{MN} = velocitat constant del cos en el tram *MN* (igual a la que té el cos que cau per la cicloide en el punt *G*).
v_{BI} = velocitat que el cos ha adquirit a *I* baixant per *BI*.
v_{FA} = és la mateixa que l'anterior (en un moviment continu d'un cos que cau per múltiples plans inclinats contigus la velocitat final és la mateixa que la del cos que cau verticalment des d'una mateixa alçada; cf. es remet el lector, per exemple, a II,8 de l'obra de Huygens).
v_{BG} = velocitat aconseguida per un cos que cau cicloïdalment des de *B* en el punt *G*.
$v_{F\Sigma}$ = és la mateixa que l'anterior (moviment d'un cos que cau per plans inclinats i verticalment des d'una mateixa alçada; cf. II,8).

Ja s'està en condicions d'emprendre el fil conductor de la demostració.

Compari's el temps (t_{MN}) que tarda un cos a recórrer *MN* amb una velocitat constant igual a la que té el cos que cau per la cicloide en el punt *G*, amb el temps (t_{OP}) que tardaria un cos que recorre *OP* amb una velocitat constant que fos la meitat de la que ha guanyat a *I* baixant per la tangent *BI*.

De primer és fàcil d'admetre (i també és la proposició V de Galileu del moviment unforme):

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{MN}{OP} \cdot \frac{v_{OP}}{v_{MN}}.$$

S'ha establert així mateix que:

$$v_{OP} = \frac{v_{BI}}{2} = \frac{v_{FA}}{2}$$

$$v_{MN} = v_{BG} = v_{F\Sigma.}$$

Per tant:

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{MN}{OP} \cdot \frac{\frac{1}{2}v_{FA}}{v_{F\Sigma}}. \qquad (1)$$

En un moviment uniformement accelerat els espais recorreguts són com els quadrats de les velocitats finals (cf., per exemple, II,3 de Huygens), i llavors:

$$\frac{v_{FA}}{v_{F\Sigma}} = \frac{\sqrt{FA}}{\sqrt{F\Sigma}}.$$

En el rectangle *FAH*: $FH^2 = FA \cdot F\Sigma$ [5].

I llavors:

$$\frac{FA^2}{FH^2} = \frac{FA^2}{FA \cdot F\Sigma} = \frac{FA}{F\Sigma} \to \frac{\sqrt{FA}}{\sqrt{F\Sigma}} = \frac{FA}{FH}.$$

Per tant:

$$\frac{v_{FA}}{v_{F\Sigma}} = \frac{FA}{FH} \to \frac{\frac{1}{2}v_{FA}}{v_{F\Sigma}} = \frac{FX}{FH},$$

$$\text{i des de (1)} \to \frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{MN}{OP} \cdot \frac{FX}{FH}. \qquad (2)$$

BI i *VA* són paral·leles, com ho són *MGN* i *ΔΦΠ* (l'un i l'altre fet es prova a II,15). Per tant:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{\Delta\Pi}{EK} = \frac{\Delta A}{EA}.$$

Però:

$$\frac{\Delta A}{EA} = \frac{\Phi A}{\Lambda A}$$

---

[5] Un camí per a veure-ho fa: $AH^2 = \Sigma H^2 + \Sigma A^2$
$FH^2 = \Sigma H^2 + \Sigma F^2$

Sumant: $AF^2 = 2\Sigma H^2 + \Sigma A^2 + \Sigma F^2$. D'altra banda: $AF = F\Sigma + \Sigma A$; descabdellant: $F\Sigma^2 + 2F\Sigma.\Sigma A + \Sigma A^2 = 2\Sigma H^2 + \Sigma A^2 + \Sigma F^2$. Simplificant: $F\Sigma.\Sigma A = \Sigma H^2$. Substituint: $F\Sigma\,(FA - F\Sigma) = \Sigma H^2$; llavors: $F\Sigma\,.FA - F\Sigma^2 = \Sigma H^2$, i finalment: $F\Sigma\,.FA = \Sigma H^2 + F\Sigma^2 = FH^2$.

$$\text{i } \frac{\Phi A}{\Lambda A} = \frac{VA}{\Phi A}$$
$$(per\ un\ lema\ senzill\ geomètric\ just\ demostrat\ abans\ de\ II, 23)$$

Per tant:

$$\frac{\Delta A}{EA} = \frac{VA}{\Phi A}\ .$$

D'on surt finalment que:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{VA}{\Phi A}\ . \qquad (3)$$

A més a més en el triangle rectangle *DAV* se sap que:

$$VA^2 = DA \times AF.$$ [6]

I en el triangle rectangle *DAΦ* es fa el mateix:

$$\Phi A^2 = DA \times A\Sigma\ .$$

I llavors:

$$\frac{VA^2}{\Phi A^2} = \frac{DA \times AF}{DA \times A\Sigma} = \frac{AF}{A\Sigma}\ .$$

Mentre en el rectangle *FAH*:

$$AH^2 = AF \times A\Sigma\ ,$$

i així:

$$\frac{AF^2}{AH^2} = \frac{AF^2}{A\Sigma \times AF} = \frac{AF}{A\Sigma}\ .$$

Per tant:

$$\frac{VA^2}{\Phi A^2} = \frac{AF^2}{AH^2} \rightarrow \frac{VA}{\Phi A} = \frac{AF}{AH}\ .$$

I com s'havia demostrat (3) que:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{VA}{\Phi A} \rightarrow \frac{MN}{OP} = \frac{AF}{AH}\ .$$

Que, atenent als triangles semblants *FAH*, *HΣ:*

$$\frac{MN}{OP} = \frac{AF}{AH} = \frac{FH}{H\Sigma}.$$

Per tant, i recuperant l'abastat dalt a (2):

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{FH}{H\Sigma} \cdot \frac{FX}{FH} = \frac{FX}{H\Sigma} = \frac{XH}{H\Sigma}\ .$$

Finalment és fàcil de veure que el triangle *HXΣ* és semblant al triangle format per *RQ* i la paral·lela a *ST* traçada des de *R*, i així:

---

[6] Cf. nota anterior.

$$\frac{t_{MN}}{t_{OP}} = \frac{XH}{H\Sigma} = \frac{ST}{QR}.$$

En conclusió: el temps amb què un cos recorre *MN* amb una velocitat constant com l'adquirida en el punt *G* després de caure des del punt B seguint la cicloide és al temps amb què recorre *OP* amb una velocitat constant la meitat de l'adquirida a *I* caient per a tangent des de *B* com *ST* a *QR*. Que era allò que es buscava de demostrar.

LA PROPOSICIÓ II,24.

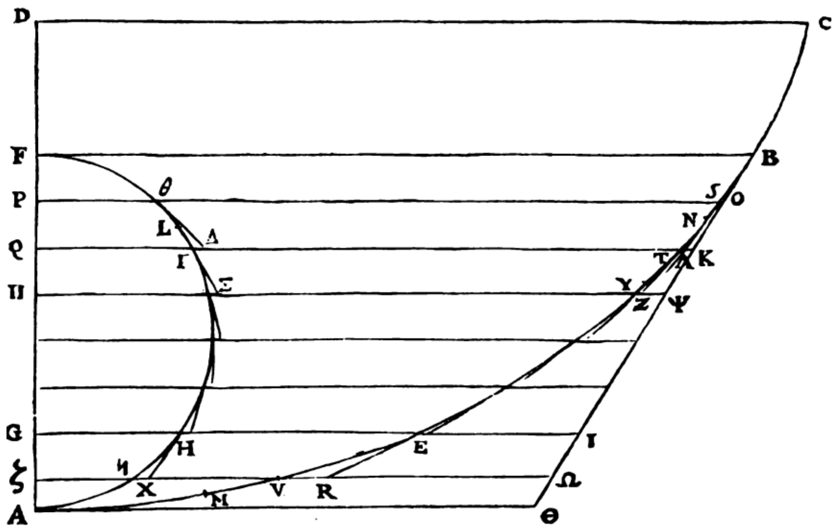
Recapituli's una mica el que s'ha fet. Cal comparar el temps de caiguda per la cicloide amb el temps de la caiguda lliure.

La proposició anterior estableix la raó entre el temps de caiguda per un tros de cicloide (de fet: per un segment que li és tangent) i el temps de caiguda per un segment adient, que és igual a la raó entre un segment de la circumferència FA (de fet: d'un segment que li és tangent) i un segment adient de l'eix de la cicloide.

La proposició II,24 fa una passa mes en aquesta direcció de relacionar el temps de caiguda per la cicloide i el d'una altra caiguda, d'una banda; i l'arc de la circumferència amb l'eix de cicloide, d'una altra. En efecte es diu [cf.gràfic] – amb uns circumstàncies constructives semblants a l'anterior – que el temps de descens segons l'arc de la cicloide *BE* és al temps de descens segons la tangent BI amb una velocitat constant la meitat de la que adquireix quan arriba a Θ [com si es baixés per un pla inclinat], com l'arc FH de la circumsferència és a la recta FG de l'eix de la cicloide.

L'holandès no ha fa explícitament a través de consideracions infinitesimals [la proposició II,24 representaria la suma de molts petits fragments elementals d'arc, de pla inclinat, de circumferència, d'eix de la cicloide, des de II,23], malgrat que versemblantment no deuen ser-hi lluny, sinó a través d'una molt elaborada reducció a l'absurd que palesa que la primera raó [entre els temps respectius] no pot ser ni més gran ni més petita que la segona [entre arc i segment]: per tant s'assumeix que li és igual.

Òbviament la proposició esdevé rellevant del tot perquè donarà peu a la següent, que és fonamental. L'interès que té no lleva, però, la conveniència d'evitar-ne una exposició detallada que hauria de dur molt lluny i que comportaria deixar el camí com sigui que es tracta d'una demostració d'allò que un hom no pot acceptar i que per tant ha d'abandonar, és a dir, d'una prova indirecta – mentre el lector pot intuir aquesta proposició com la resultant d'integrar els quatre components de la II,23.



No és l'única vegada que Huygens utilitza la reducció a l'absurd per a presentar demostrativament quelcom descobert per la seva sagacitat i domini geomètric. Valgui el cas d'una de les proposicions més importants de l'*Horologium oscillatorium*, la cinquena de la quarta part: demostra com es troba el centre d'oscil·lació[7] d'un pèndol compost, i ho fa oferint una fórmula que s'assumeix també per reducció a l'absurd.

[7] És a dir, el punt de l'eix del pèndol compost tan allunyat del punt de suport com la longitud del pèndol simple que seria isocrònic al pèndol compost.

LA PROPOSICIÓ II,25.

Es volia saber el temps que tarda el cos que cau cicloïdalment, fins a arribar a la part més baixa del pèndol, respecte del temps de caiguda. La proposició II,25 farà quelcom exemplar: perquè, no sols demostra que el temps de caiguda *des de qualsevol punt* de la cicloide fins al seu punt més baix és *el mateix,* sinó que aquest temps idèntic *manté una relació* respecte al temps que tardaria un cos que cau lliurement des de la mateix alçada per *l'eix* de la cicloide *com la raó* que hi ha entre una semicircumferència i el seu diàmetre [per tant la raó dels temps és igual a $\pi/2$]. Llegeixi's aquesta molt important proposició:

«PROPOSICIÓ XXV

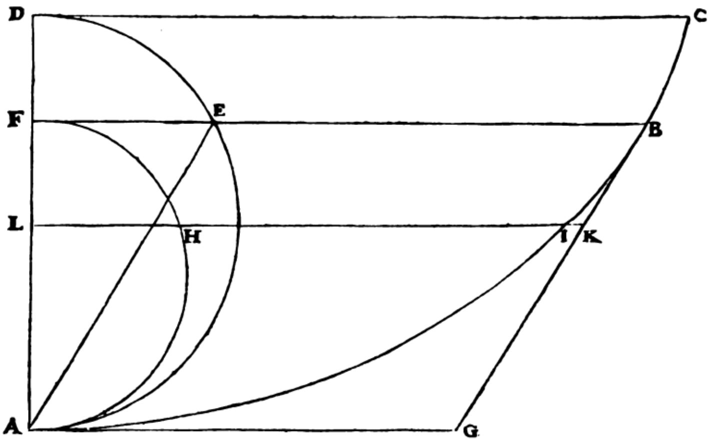
En la cicloide l'eix de la qual s'ha dreçat verticalment amb vèrtex que mira cap avall, els temps de descens, en els quals el mòbil deixat anar des de qualsevol punt seu arriba al punt més baix del vèrtex, són iguals entre si; i tenen, respecte al temps de caiguda perpendicular per tot l'eix de la cicloide, la mateixa raó que la semicircumferència del cercle al diàmetre.

Sigui la cicloide ABC el vèrtex de la qual A mira cap avall, amb l'eix AD dreçat perpendicularment, i des de qualsevol punt de la cicloide, per exemple B, descendeixi el mòbil per impuls natural per l'arc BA, o per una superfície així corbada. Dic que el seu temps de descens és respecte al temps de caiguda per l'eix DA com la semicircumferència del cercle al diàmetre. La qual cosa demostrada, també els temps de descens, sigui quin sigui l'arc de la cicloide acabat en A, s'establirà que són iguals entre si.

Descrigui's sobre l'eix DA un semicercle, la circumferència del qual talli la recta BF, paral·lela a la base DC, en el punt E; i unit EA, traci's la paral·lela BG a EA, que certament és tangent a la cicloide en el punt B[8]. Aquesta mateixa troba en el punt G la recta horitzontal traçada per A: i sigui també descrit sobre FA el semicercle FHA.

[8] Per construcción, cf.II,23.

Aleshores, per la proposició precedent, el temps de descens per l'arc BA de la cicloide és respecte el temps del moviment uniforme per la recta BG amb una velocitat la meitat de BG[9], com l'arc del semicercle FHA a la recta FA. Però el temps esmentat del moviment uniforme per BG és igual al temps de descens naturalment accelerat per la mateixa BG, o per EA, que li és paral·lela i igual; això és, al temps de descens accelerat per l'eix DA (proposició 6 de Galileu sobre el moviment accelerat)[10]. I així el temps per l'arc BA serà també respecte al temps de descens per l'eix DA, com la circumferència FHA del semicercle al diàmetre FA, cosa que s'havia de demostrar.



Si es considera tota la concavitat completa de la cicloide, el mòbil, després d'haver descendit per l'arc BA, ascendirà des d'allà continuant el moviment per un altre arc igual al primer (II,9), i hi emprarà tant de temps com descendint (II,11). Després enrere pervindrà per A a B, i també els temps d'aquestes oscil·lacions singulars, recorregudes en arcs més gran o més petits, seran al temps de caiguda perpendicular per l'eix DA, com la circumferència tota del cercle al seu diàmetre».

9 És a dir, una velocitat constant la meitat de la que té en arribar a *G*.

10 De fet es tracta del teorema I, proposició I, del moviment accelerat en els *Discorsi*.

La proposició es mou amb una agilitat sorprenent. Noti's que no hi ha cap ni una representació del temps ni del moviment, sinó que s'hi té en consideració trajectes recorreguts (o suposadament recorreguts). Tota la proposició esdevé la conseqüència d'un encaix feliç de raons i de proporcions de quantitats (estàtiques) que representen trajectes pel fet que un hom pot relligar unes raons i proporcions d'espais amb d'altres raons i proporcions d'espais.

En efecte (*a*) recull la proposició II,24. (*b*) El mateix trajecte *BG*, el faria amb un temps igual el cos que el recorregués amb una velocitat constant igual a la meitat de la que adquirís a *G* en un moviment uniformement accelerat (des del repòs en *B*), o el cos que el fes amb un moviment uniformement accelerat des del repòs en *B* fins a *G* [teorema de la velocitat mitjana]. (*c*) La igualtat entre *BG* i *EA* lliura la possibilitat d'aplicar un enginyós teorema de Galileu, tot basat en les raons de caire geomètric a partir de l'estudi del pla inclinat, i també entre les cordes d'una circumferència, precisament per a establir una igualtat de temps per a tota una colla de longituds que mantenen constructivament unes raons (aquí la igualtat de temps de caiguda per *EA* i per *DA*).

S'ha bastit doncs tot un sistema de raons i de proporcions que es fa entenedor a partir del problema que es té a les mans i que es pensa. I el punt B pot ser un qualsevol.

La generalització que suposa la proposició (i un qualsevol teorema geomètric) s'ofereix a tall d'una desexemplarització perquè perd l'exemple (ja pensat segons quantitats generals), i alhora es manté significativa perquè sap que només ho ha provat per a un cas i que ho podria repetir per a d'altres casos que no ho ha fet, això de provar-ho. Per això hi ha l'expressió general de la proposició.

III
L'ESPAI RECORREGUT EN CAIGUDA LLIURE DES DEL REPÒS EN UN SEGON

Gràcies a la recerca que ha dut al nou rellotge de pèndol, que bat d'acord amb la cicloide i que s'ha ajustat amb el temps sideri i solar mitjà, s'ha aconseguit que la pèndola bati isocrònicament al segon, és a dir, que una oscil·lació des del punt d'un extrem fins a arribar al punt de l'altre extrem passant pel vèrtex es fa en un segon.

Després s'ha reeixit en la cerca d'una proporció entre el temps de l'oscil·lació i el temps de caiguda d'un cos per l'eix de la cicloide.

El treball de Huygens sens dubte toca molts punts de la màxima importància (pensi's, per exemple, en l'estudi sistemàtic que fa de la cerca del centre d'oscil·lació de tota mena de cossos) i, tanmateix, la circumstància d'haver defensar la relació de temps esmentada permet ara exemplificar quelcom prou rellevant que il·lustrarà un mica el paper cabdal de tot això.

[*Troballa feta amb la raó d'una mesura universal i perpètua.*
A propòsit de la PROPOSICIÓ IV,25]

Perquè suposi's que es vol saber ara la longitud més o menys exacta entre l'eix d'oscil·lació i el centre d'oscil·lació, què mesura doncs aquesta distància quan l'oscil·lació és d'un segon. Per a facilitar-ho s'agafa un segon pèndol simple fet amb una esfera de plom, o d'una altra matèria, suspesa d'un fil, i que es fa batre amb una oscil·lació petita al costat de la pèndola del rellotge, tot donant fil o traient-ne, fins que bat exactament com la pèndola del rellotge durant un quart d'hora o mitja hora.

Huygens ja ha estudiat (IV,22) com es troba el centre d'oscil·lació d'una esfera suspesa per un fil (la distància del punt de suspensió – aquí l'eix d'oscil·lació – i el centre de l'esfera és al seu semidiàmetre com aquest semidiàmetre és a una certa quantitat: les dues cinquenes parts d'aquesta quantitat comptades per sota del centre de l'esfera lliura el punt cercat del centre d'oscil·lació), per tant s'ha de saber la longitud del fil i la mida de l'esfera de plom; no n'hi ha prou, amb la longitud del fil o la distància entre el centre de l'esfera i l'eix d'oscil·lació.

Tot això dut a terme, Huygens divideix la longitud, trobada i fixada per a un qualsevol pèndol que bati al segon, des de l'eix d'oscil·lació fins al centre d'oscil·lació en tres parts, i les anomena «peus horaris», que permetrien de fixar un valor universal de longitud o/i una referència objectiva per a la mesura de tots els altres peus (de París, etc.).

Després afegeix:

«I no és com a màxim també que ho puguem fer servir en aquells rellotges que indiquen, en cada retorn del pèndol, segons o les seves meitats; perquè s'obté l'objectiu per una altra qualsevol longitud de pèndol aparellat sempre que es conegui, per les proporcions de les rodes o pel nombre de dents, el nombre d'oscil·lacions a executar en un cert temps. Així, enllestit el pèndol simple, cadascun dels balanceigs del qual concorden amb cadascun de les retorns del rellotge, o amb dos, o amb tres, constarà ja d'això quina quantitat d'aquell pèndol transcorre simultàniament en el període d'una hora. El nombre dels quals, si és quadrat, farà que com el quadrat de 3600 – nombre dels segons de què constat una hora – és al quadrat d'aquell nombre, així la longitud del pèndol simple enllestit (longitud que s'ha d'entendre sempre des del punt de suspensió al centre d'oscil·lació) és a la longitud d'aquell pèndol horari de tres peus del qual parlàrem.

Perquè això passa pel fet que les longituds de dos qualssevol pèndols són entre si com els quadrats dels temps en què transcorren cadascuna de les oscil·lacions; i d'aquí que [aquelles longituds] tinguin una raó inversa dels quadrats dels nombre que resulten de les oscil·lacions fetes en uns intervals de temps iguals[11].

Certament si fins avui sols per experiència s'ha comprovat aquell teorema de les longituds dels pèndols – tenir aquestes en efecte la raó doble

[11] Si $L_1/L_2 = T_1^2/T_2^2$, i prenent un temps igual x, llavors els nombres d'oscil·lacions fetes en un mateix temps seran x/T_1 i x/T_2, llur relació farà $\frac{x^2/T_1^2}{x^2/T_2^2} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$. Per tant L_1/L_2 és la raó inversa dels quadrats de x/T_1 i x/T_2.

dels temps en què es duen a terme cadascuna de les oscil·lacions −, la seva demostració s'ha fet manifesta ara per allò dalt reportat[12].

Com sigui doncs que s'hagi mostrat que cadascun dels retorns del pèndol, suspès entre cicloides[13], respecte de la caiguda perpendicular des de la meitat de la longitud del pèndol[14], manté una raó determinada, és a dir, aquella que manté la circumferència del cercle al seu diàmetre[15] – llavors es fàcil d'extreure que els temps d'oscil·lacions en dos pèndols són entre si com els temps de descens perpendicular des de la meitat de la seva alçada. Les quals mitges alçades, o àdhuc senceres, com tenen la raó duplicada dels

---

[12] Huygens sols ho ha demostrat aquí per a la cicloide. Tanmateix una manera de veure-ho – més avall ho suggereix − faria així:

Tant l'estudi de les cicloides com el del pèndol simple són «ideals». Si més no se suposa en el pèndol simple que tot el pes de la llentilla es troba concentrada en un punt i que el fil on penja no té pes, amb l'afegit que el pèndol simple no bat ni idealment sempre amb el mateix temps, pres en sentit estricte.

Per tant de primer cal una troballa d'un pèndol que bati en temps iguals, i demostrar les relacions entre la longitud i el temps. D'alguna manera serveix de model de pèndol, model que és el pèndol que segueix un moviment cicloïdal.

Però tots els pèndols són de fet compostos. Quan se cerca el seu centre d'oscil·lació se cerca de fet un pèndol ideal que bati com el compost.

Per tant s'ha demostrat per a la cicloide que els temps d'oscil·lació depenen de la longitud del pèndol. Però, i això és important, el temps d'oscil·lació no depèn de l'amplària de l'oscil·lació, que sempre es fa amb el mateix temps, i s'assumeix que el pèndol simple amb una batuda molt petita no n'és una excepció. Huygens estimaria haver demostrat així que, per a tots els pèndols, el temps de batuda depèn de la longitud: en efecte es podria pensar que el pèndol simple no fóra més que un cas límit del pèndol que bat cicloïdalment.

[13] Es refereix al fet que la pèndola del rellotge es mou entre dues lamel·les cicloïdals, i que fan que bati cicloïdalment (cf.III,6). D'altra banda la proporció que ho defensa, és clar, és la II,25.

[14] La mida de l'eix de la cicloide que determina el moviment cicloïdal de la pèndola s'ha fixat des de la primera part de l'*Horologium oscillatorium* com la meitat de la longitud del pèndol vertical. Com diu tot seguit la raó de les meitats és la raó de les longituds senceres.

[15] En el temps de tota una oscil·lació la raó és el doble de $\pi/2$ (cf. II,25).

temps en els quals se les recorre en un descens perpendicular (II,3)[16], aquelles mateixes tenen també la raó duplicada dels temps que mesuren cadascuna de les oscil·lacions.

Però les oscil·lacions molt petites del pèndol simple no difereixen sensiblement de les oscil·lacions molts petites del pèndol suspès entre cicloides[17], la longitud del qual és la mateixa que la del primer. I així també les longitud dels pèndols simples tindran la raó duplicada dels temps en els quals les oscil·lacions molt petites s'efectuen».

[*Com es determina l'espai que recorre un greu que cau verticalment en un temps donat*]

En efecte el pèndol permet de calcular l'espai recorregut pels cossos que cauen en un temps determinat. Una altra proposició de la quarta part (*Del centre d'oscil·lació*), en concret la segona proposició IV,25, ho fa així:

«Tots els qui investigaren fins avui aquesta mesura havien necessàriament de remetre's a experièncíes; en aquells, pels quals aquella mesura fou establerta, no s'arribà fàcilment a una determinació exacta a causa de la velocitat de les caigudes adquirida al final del moviment. Però des de la nostra proposició 25, del *Del descens dels greus* [II,25], i coneguda la longitud del pèndol que bat estrictament al segon, sense més experiència, podem obtenir el que es busca per una certa conseqüència. I en primer lloc certament se cerca aquell espai que el greu recorre en el temps d'aquell segon exacte, de la qual cosa serà permès després de treure'n qualsevol altra. Perquè en efecte diguérem que la longitud del pèndol era de 3 peus dels horaris: però el temps d'una oscil·lació molt petita és al temps de descens perpendicular des de la mitja alçada del pèndol[18], com la circumferència del cercle al diàmetre, això és com 355 a

[16] És el moviment de caiguda de cossos.

[17] Dalt ja s'ha suggerit que allò que és vàlid per a pèndols suspesos entre cicloides (i que es mouen cicloïdalment) també ho seria per al pèndol simple (raó de temps i longituds) – el pèndol simple batent al segon com la pèndola del rellotge, no hi hauria un motiu seriós per a no assimilar-lo en el cas general dels pèndols moguts cicloïdalment.

[18] La longitud del pèndol és de 3 peus i és el doble de l'eix de la cicloide (eix que fa doncs 18 polzades).

113[19]: si es fa com un temps primer a un altre, així el temps d'un segon exacte, o seixanta tercers, a un altre, llavors fa 19'''$\frac{1}{10}$ el temps de descens per la mitja alçada del pèndol, que certament és de 18 polzades de peu. Però com els quadrats del temps, així són els espais recorreguts en aquells temps, tal i com es mostrà en una proposició anterior[20]. Llavors, si es fa com el quadrat de 19'''$\frac{1}{10}$ al quadrat de 60''', això és, com 36481 a 360000, així 18 polzades a un altre, surt 14 peus, 9 polzades, 6 línies, en alçada de descens perpendicular, en el temps d'un segon. Però com el peu horari és al parisenc com 881 a 864, la mateixa alçada serà, reduïda a aquesta mesura, molt propera a 15 peus i una polzada. També aquesta acorda del tot amb experiments nostres acuradíssims, en els quals aquella part de temps, en què s'acaba la caiguda, no es discerneix ni en el judici de les oïdes ni en el de l'ull; cap d'aquests dos no es aquí suficientment segur; però es coneix sense cap error l'espai recorregut descendent d'un altra manera que provarem aquí d'exposar».

Repassi's el següent:

a) El peu horari és una mesura de Huygens, que la voldria universal (un pèndol simple que batés per segons tindria tres peus de longitud). El fa equivalent a 12 polzades, cadascuna amb 12 línies.

b) El peu de París (≈ 0,3248 metres) té també 12 polzades, cadascuna amb 12 línies.

c) La relació de la circumferència al diàmetre val π. En el text com 355 a 113.

d) La longitud del pèndol és el doble de l'eix de la cicloide que defineix l'oscil·lació. Per tant si el primer feia 3 peus horaris l'eix de la cicloide farà la meitat, és a dir, 18 polzades.

e) Com ja s'ha advertit a II,23 en lletra cursiva, les raons i les proporcions estudiades *es refereixen en qualsevol cas a mitja oscil·lació*, per tant *l'enunciat de II,25 considera sols mig segon* (30 tercers).

f) Es tracta d'una aplicació de la proposició II,25. En efecte la raó dels temps és igual a la raó entre la semicircumferència i el

[19] Valor aproximat de π.

[20] Cf. II,3. Es tracta dels espais recorreguts per moviments uniformement accelerats, prou estudiats per Galileu.

diàmetre (πr/2r = π/2). I llavors s'eliminen en els dos cantons les meitats. Per tant:

$$\frac{temps\ mitja\ batuda\ cicloide}{temps\ caiguda\ vertical\ per\ l'eix} = \frac{60''/2}{t} = \left(\frac{\frac{355}{113}}{2}\right):$$

$$\rightarrow \frac{60''}{t} = \frac{355}{113}$$

Fent càlculs: $t = 19''' \frac{1}{10}$

El cos baixa 18 polzades de peu horari en $19''' \frac{1}{10}$.

g) Se sap que en un moviment uniformement accelerat els espais són com els quadrats dels temps (Huyghens ho estableix a la proposició II,3), per tant és fàcil de seguir que:

$$\frac{\left\lfloor 19''' \frac{1}{10} \right\rfloor^2}{\lfloor 60''' \rfloor^2} = \frac{36481}{360000} = \frac{18}{l}$$

En peus horaris: *l* = 14 peus 9 polzades 6 línies.
En peus de París: *l* = 15 peus 1 polzada ≈ 4,899 metres.

Es tracta de l'espai recorregut pel cos que cau des del repòs durant un segon.

IV
EXCURS SOBRE L'ACCELERACIÓ DE LA GRAVETAT

1. La resultant troba l'espai recorregut (≈ 4,9 metres) per un cos en caiguda lliure des del repòs en un segon.

Al lector d'avui, li pot sobtar la manera d'apropar-se a una quantificació del moviment de caiguda per dos motius diferents: el primer per l'ús de raons i de proporcions; el segon pel fet que aquestes raons i proporcions tenen en compte sobretot quantitats d'espai i de temps, de manera que no es fa molt ús de quantificacions de velocitat (en les proporcions que s'ha citat no n'hi ha cap: n'hi ha, però, un mínim en l'estudi del greus de Huygens), i que no hi apareix l'acceleració de la gravetat.

Es tracta en efecte d'adonar-se que la sorpresa es troba més aviat en la circumstància que l'ús universal de l'àlgebra i l'anàlisi per a definir el moviment uniformement accelerat, i en espacial el de caiguda, alhora que permet una generalització d'acord amb orientacions diverses, i de facilitar extraordinàriament la recerca, també ha tingut l'inconvenient de destorbar la certesa que un hom pot sols mesurar espai i «temps»[21], pot sols comptar-los, i pot sols relacionar-los en tant que espais i «temps». És així com s'entén la velocitat uniforme i una velocitat mitjana com a proporcions entre espais i «temps», i que una velocitat instantània no pot pensar-se altrament en alguna accepció.

Es podria extrapolar que els orígens de les formulacions modernes per a la velocitat i l'acceleració, és a dir, allò que creà la necessitat d'una altra aproximació algèbrica i analítica, es trobarien precisament en les raons i les proporcions, entre espais i espais, entre «temps» i «temps», entre els uns i els altres, i les seves complicacions. Precisament perquè s'hauria comprès el que es feia, la nova formulació no tenia la urgència d'amagar els orígens: bastava assumir-ho com una manera àgil d'entomar l'estudi i l'ús del càlcul, amb

[21] Les cometes recorden que el temps (o la velocitat), estrictament parlant, no es compta mai.

l'inconvenient que l'oblit dels orígens oferia una aproximació amb alguna paradoxa (noció de velocitat instantània, noció d'acceleració, noció d'acceleració instantània, etc.).

Fet i fet la mecànica moderna clàssica rep l'impuls definitiu amb els *Principia mathematica philosophiae naturalis*, que fa un ús exhaustiu de raons i proporcions – i alhora els *Principia* sovint suposen ja una manera de pensar que versemblantment ha deixat aquest estadi de raons i de proporcions per a endinsar-se en concepcions algèbriques i l'anàlisi (la mateixa llei II suposa una acceleració instantània, per exemple). No és descartable que una de les dificultats de fer filosofia de la ciència tot estudiant aquesta obra ragui en la pluralitat dels seus recursos matemàtics segons la tradició (atenent espais i «temps», i les seves complicacions) i d'acord amb altres maneres de treballar. Si més no l'estudi en detall duria versemblantment que les raons i proporcions amb espais i temps són cabdals – mentre és prou conegut que Newton esdevé un dels pares de l'anàlisi matemàtica amb el seu tractament de les fluxions.

Sigui com sigui l'experiment per a comprovar la validesa de la teoria de la gravitació universal inclou l'esment a Huygens. Després de calcular el *sinus versus* de l'arc de la Lluna recorregut en els transcurs d'un minut afegeix[22]:

> «I per la mateixa força els greus descendeixen de fet a la Terra. Car els pèndols que baten al segon d'oscil·lació a la latitud de París fan de longitud tres peus de París i 8½ línies, com ha observat Huygens. I l'alçada que el greu descriu caient en el temps d'un segon és a la meitat de la longitud del pèndol esmentat en una raó doble de la raó entre la circumferència del cercle i del seu diàmetre (com també ha indicat Huygens), i per tant és de 15 peus de París, 1 polzada, $1^{7}/_{9}$ línies. I en conseqüència[23] la força per la qual la Lluna és retinguda en el seu orbe, si es descendeix a la superfície de la Terra, es comporta igual a la força de la gravetat aquí entre nosaltres».

---

[22] Cf. *Principia* III, Proposicions IV.

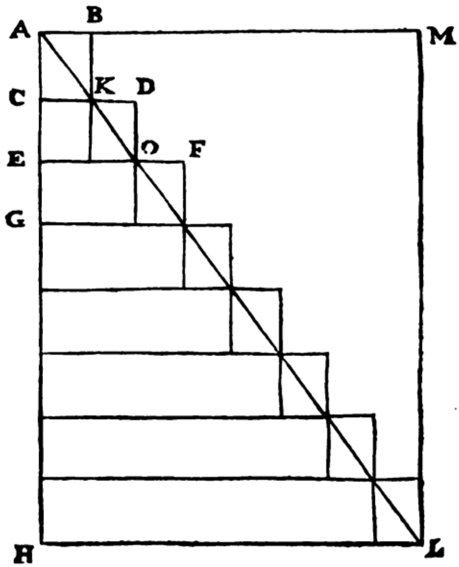
[23] Newton havia deduït, dels efectes de la força que desvia la Lluna del moviment uniforme rectilini, el recorregut de caiguda d'un greu sobre la Terra – suposant la validesa de la hipòtesi general de l'autor – amb una resultant de 15 peus, 1 polzada, $1^{4}/_{9}$línies.

2. L'obra de Newton és del 1686 (2ª 1713) i la de Huyghens del 1673. Òbviament tant l'un com l'altre sabien perfectament tot el que es relaciona amb un espai recorregut d'uns 4,9 metres en caiguda lliure des del repòs.

Agafi's l'enunciat de la proposició II,5 del mateix *Horologium oscillatorium,* que torna a demostrar (aquí per reducció a l'absurd) la proposició corresponent de Galileu:

«L'espai recorregut en un temps determinat per un greu començant una caiguda des del repòs és la meitat de l'espai que aquell greu travessaria en un temps igual d'un moviment uniforme amb la velocitat que ha adquirit en el darrer moment de la caiguda».

La demostració s'ajuda amb el següent gràfic:



AH («temps»), HL («velocitat»), AMLH (espai d'un mòbil que es mou AH «temps» a la «velocitat» HL); després s'hi representa seccions de «temps» i de «velocitat».

Es miri com es miri la «velocitat» HL (i qualsevol altra) pot expressar només una raó entre espai i «temps» (indiferentment que es consideri una velocitat mitjana o uniforme), i de fet aquest tipus de demostracions geomètriques ho pressuposen explícitament; car tots els paral·lelograms sobreposats en forma d'escala són espais discernibles (en un «temps» discernible) que poden aprimar-se tant com es vulgui. La línia-paral·lelogram HL (i qualsevol altra) no n'és una excepció, cal copsar-la com una representació de la «velocitat», per breu que sigui el «temps» (l'alçada), i que no valgui la pena de representar-se'l.

La «velocitat» HL és la d'una raó entre espai i «temps», i això val arreu de les línies horitzontals en el triangle AHL, de manera que les sumes dels espais representats tendeix a un triangle rectangle, suma dels espais que és la meitat de l'espai que el mòbil franquejaria si mantingués la raó d'espai i de temps de HL en el temps AH (paral·lelogram AMLH).

En el present cas la resultant ha lliurat que el mòbil cau 4,9 metres en un segon. És a dir, el triangle ALH permet establir que la suma de tots els espais inclosos és de 4,9 metres. Per tant el paral·lelogram AMLH fa 9,8 metres, i el mòbil ho hauria fet en un segon si ho fes uniformement.

L'espai AMLH és el recorregut durant un segon per un mòbil que anés uniformement de tal manera que travessés un tal espai AMLH. Hi ha una raó entre espai i «temps».

És clar que si l'espai AMLH val 9,8 és perquè HL és 9,8 i AH la unitat.

Què pot més representar AH? Doncs pot representar el «temps» en la raó d'espai i de «temps elemental» (un segon, aquí).

Però la «velocitat instantània» HL (una línia-paral·lelogram) no és res més (en l'aspecte quantitatiu) que la raó entre espai i «temps», un espai representat per la línia-paral·lelogram, i un «temps» elemental.

En d'altres paraules: en un moviment uniforme la raó entre espais i «temps» sempre és la mateixa; la seva velocitat instantània no en pot diferir perquè no pot ser res més.

I això es podria tornar a repetir per a totes les horitzontals del triangle ALH.

Què voldria dir des de la perspectiva d'un càlcul amb raons i amb proporcions que la «velocitat» (des del punt de mirar quantitatiu) creix uniformement en la direcció descendent de l'eix AH, que representa el temps?

Doncs que la raó entre una qualsevol «velocitat mitjana instantània», entesa com l'esmentada i aconseguida des del repòs, a un «temps» transcorregut des del repòs sigui proporcional a una qualsevol altra raó de la mateixa caiguda des del repòs entre «velocitats mitjanes instantànies» i «temps».

Per tant en el moviment de caiguda des del repòs la raó que la raó espai i «temps elemental» (moviment uniforme) manté amb el «temps» és proporcional en tots els casos.

La dificultat del discurs fa entendre que es parli directament d'una acceleració i de velocitat al marge de la raó i de la proporció. I sobretot quan un hom vulgui la generalització de l'acceleració per a casos múltiples com és el cas dels *Principia*.

Quina és, en el cas que ens ocupa, aquesta constant de proporcionalitat? Certament 9,8, malgrat que fora d'una gènesi de raons i de proporcions es manté com a quelcom distorsionant[24].

---

[24] Interpreti's la caiguda del greu d'acord amb la segona llei del *Principia*. Llavors aquesta llei diria exactament el de dalt: que la raó entre la «velocitat instantània» aconseguida des del repòs al «temps» transcorregut des del repòs sigui proporcional a una qualsevol altra raó, etc.

Llavors sembla fàcil de generalitzar els tipus de «canvi de moviment» d'una banda, i de deixar pas a una aproximació matemàtica més àgil, d'una altra. La segona llei fa la sensació d'haver franquejat aquests dos camins, mentre s'hi manté quelcom que l'apropa a un llenguatge de raons i de proporcions.

Alguna cosa semblant valdria mes enllà: el mateix corol·lari primer (la llei de la composició de forces) ho fa en termes d'adquisió (per la força) d'un moviment uniforme: caldria tractar cada costat del paral·lelogram de forces a tall d'una representació de velocitat instantània com dalt, etc.

V
UN EXERCICI DE MECÀNICA

Les notes a l'*Horologium oscillatorium* permeten d'introduir algunes consideracions a propòsit del que s'hi fa precisament des de la perspectiva que un hom voldria saber l'espai que recorre un cos que cau en un temps determinat fent omissió de resistències.

Certament un hom no és capaç de determinar-ho directament perquè ocorre massa de pressa: versemblantment les experiències perceptives que s'hi proposen deuen ser difícils de complimentar escaientment. Si més no la troballa de Huygens a propòsit del pèndol n'esdevé un mitjà d'aproximació.

Des d'una perspectiva global de la solució cal admetre la necessitat d'introduir-hi tota mena d'activitats de l'ésser humà, d'una banda; d'indicar-hi les dependències respecte de les aportacions dels altres estudiosos, d'una altra.

La construcció d'un rellotge exemplifica la tenacitat de trobar peces de tot tipus escaients, de perfeccionar-ne l'acoblament, d'aprendre dels altres rellotges tot fent progressos en una tradició d'aquests mecanismes. El rellotge d'una qualsevol època es mostra com un enginy resultant d'una complexitat teoricopràctica de llarg abast, que va des de l'extracció de materials, que passa per la fosa i els motlles corresponents, que fa requesta d'einesa vàries, que en compon els elements, etc. Una tasca amb una finalitat que segueix moltes passes fetes per d'altres homes, que s'incardina en una transmissió de generació en generació, que palesa moltes peculiaritats de l'ésser humà total, extractor, transformador, manipulador, creador, dins d'un projecte d'obtenció d'un mecanisme.

La pretensió d'afinar l'aparell de rellotgeria s'ha d'entendre dins d'aquest context. Huygens fou el primer a usar el pèndol aplicat als rellotges (fins llavors, des de Galileu, s'avaluava el temps tot comptant les seves curses), fou el primer a ponderar la corba cicloide com la figura segons la qual havia de moure's la llentilla per tal de fer oscil·lacions isocròniques, fabrica unes làmines que limiten l'oscil·lació del pèndol, calcula com augmentar o disminuir el temps de batuda per mitjà d'unes pesos estratègicament col·locats, a més a més d'una quantitat enorme de demostracions per a estimar tota mena de relacions dins dels pèndols, tota mena de raons a trobar entre els elements de la cicloide, ultra un estudi del comportament dels greus en la caiguda lliure i en els plans inclinats, i una presentació vàlida per a tota classe de cossos que oscil·lin i d'acord amb les característiques de cadascun.

Això vol dir que, en un cert sentit, no hi ha solució de continuïtat entre la construcció de rellotges, els nous problemes que s'hi introdueixen, les noves consideracions que provoquen i les ampliacions dels estudis a què conviden. No es tracta d'un *totum revolutum* com si no hi hagués una comprensió de cadascun dels principals factors, com si la mirada no s'adonés de l'ampliació possible des d'uns afers més o menys rumiats. Hi ha més aviat l'exercici reiterat i privilegiat d'un anar ocupant-se.

Les consideracions del dia sideri i del dia solar remunten a l'antiguitat. La problemàtica d'un dia solar mitjà es planteja nítidament en l'*Almagest*, i l'un i l'altre pressuposen l'admissió dels moviments corresponents i l'avaluació de l'esfera celeste. Hi ha doncs una assumpció d'una problemàtica astronòmica, l'acceptació de quelcom que s'entén rebut, que en cap cas no vol dir acríticament. Es tracta mes aviat que un hom pot aprendre molt de pressa alguna cosa que ha necessitat de la dedicació de moltes vides, que se l'assumeix pel seu poder de persuasió intel·lectual, i que serveix cara a la continuïtat de les investigacions o d'unes altres recerques.

Huygens cerca un rellotge a la disposició d'un hom i que compti tan fidelment com sigui possible el temps. Fet i fet tots els moviments necessiten la pauta que lliura el compte del temps per a poder-los relacionar i fins i tot a fi de descriure'n el comportament, com sigui que se suposa que el temps passa regularment, i seria per comparació amb aquesta regularitat que l'estudiós s'afiguraria els altres moviments.

És clar que un hom s'adona que se li escapoleix l'exactitud incondicional. La manipulació de les peces del rellotge de pèndol palesa que hi ha l'aproximació més encertada possible des del repàs de materials i les habilitats dels operaris, àdhuc guiats pel càlcul més sagaç que duu a l’ús de petits cossos capaços d’ajustar el temps de la cursa. Aquest rellotge és una obra humana tan reeixida com les capacitats pràctiques i tècniques que un hom posseeix: tanmateix sempre és perfectible.

La tensió entre el treball resultant (el rellotge del cas) i el temps a comptar es perllonga amb la dificultat de precisar el temps sideral per l’observació dels estels; a la qual cosa cal afegir la impossibilitat d’excloure alguns errors a l’hora de determinar l’any i conseqüentment el dia mitjà, a banda de l’assaig de superar una qualsevol manca en la correcció del dia mitjà, etc.

Potser la tasca de l’ésser humà mai no podria oferir-se com aquella que fes impossible un qualsevol altre discerniment, i el treball transformador que executa palesaria una perfectibilitat indefinida. Tot plegat faria aterrar el coneixement, que esdevindria d’aquest món.

Per tant un hom entén la construcció d’un tal rellotge, potser l’ha executada i tot, i en qualsevol cas no ha estat una mera obra transformadora, ha estat una ocupació sempre intencional, planejadora, dissenyadora, encaminada a una resultant que ja es pensa que fa quelcom (l’oscil·lació del pèndol) comparable amb el moviment dels estels, del Sol (en alguna mesura), que forma part d’un programa extraordinàriament extens (l’astronomia), mentre se sap què és el temps, que es diu regular i que transcorre uniformement.

La cerca de l’isocronisme del pèndol s’ha d’enquadrar en tot això, i s’entoma a tall d’una ampliació de tot això. S’ha observat que els pèndols simples no són isocrònics (la batuda depèn de l’amplada de l’oscil·lació). Si més no l’*Horologium oscillatorium* no explica ben bé com va arribar l’autor a la descoberta de l’isocronisme (però sí que diu que hi va arribar tenint la geometria per guia). Fos com fos el treball explora la congruència entre una experiència amb un pèndol de batuda cicloïdal i l’estudi fisicomatemàtic corresponent de la cicloide.

Com cal copsar un tal estudi, i circumscrits a allò esmentat en el present escrit? El geni es palesa, no pas sols en la circumstància de bastir un discurs farcit de dades i de matemàtica; no pas sols pel fet que la construcció d’un rellotge i l’estudi del temps diari sideri o solar no es reveli com una tasca intel·lectual de primer ordre: la grandesa de l’escrit estreba en particular a pensar el moment i el temps dels cossos que es mouen uniformement o uniformement accelerats mentre es capaç de relacionar quantitats estàtiques de trajectes cicloïdals i de caiguda lliure amb la relació de la circumferència i el seu diàmetre. Hi ha una immensa habilitat matemàtica des del pensament físic. El lector de Huygens té la sensació que se li està representant un magnífic joc de prestidigitació amb un resultant sorprenent.

Es tracta, sí, d'una eixamplament més del saber de la ciència, i, en conjunt, de les disposicions de l'individu quan s'acara a un afer qualsevol. Coneix molt bé Galileu i d'altres autors, i precisament la conclusió de l'isocronisme sembla la conseqüència del moviment uniformement accelerat de Galileu quan s'és capaç d'entortolligar-lo amb un munt de proporcions i de raons, que són de magnituds lineals, en profit d'una certa resultant. I de fer-ho magistralment.

Ser capaç d'entendre l'isocronisme del pèndol que segueix una línia cicloïdal.

Al capdavall s'ha pensat. Però afegir «matemàticament» ajuda sols una mica. D'una banda no hi hauria fil conductor sense les consideracions qualitatives implicades, i la geometria s'ofereix com una tasca simplificadora (i, si es vol, idealitzadora) de les relacions entre alguns elements a considerar cabdals (sobretot línies i punts). La matemàtica té el seus fonaments en la representació perceptiva: el geòmetra (euclidià) descabdella un pensament, però ho fa des de la representació perceptiva, i al cap i a la fi s'hi aboca.

S'ha arribat a una resultant del tot brillant: la congruència del moviment cicloïdal oscil·lant del pèndol amb les concepcions galileanes del moviment, per tant hi ha encadenament d'afirmacions que eixampla la comprensió dels fenòmens (des de la caiguda lliure d'un cos o per un pla inclinat al moviment oscil·lant) o capaç de preveure noves experiències, que per això mateix ja s'entenen: el pensament fa congruent la comprensió del que ha ocorregut amb la d'allò que hauria de passar o passa.

Tanmateix una tal congruència no pot ser pensada directament, sinó per allò que esdevé útil perquè forma part del que ja es comprèn o d'allò a comprendre, perquè es pot simplificar i relacionar, perquè en part pot rebre una significació d'interès cinètic o/i temporal, perquè un hom ja ha rebut molt d'exercici en les proporcions i raons de tot tipus de magnitud lineals, perquè ja se suposa que la geometria i, en conjunt, la matemàtica són la resultant de ments prou hàbils per a enteranyinar un discurs segons mires vàries.

La ponderació del procés es desfigura quan s'assenyala massa insistentment la importància de l'enllaç geomètric a tall d'un pensament alliè als seus orígens, quan s'obvia que hi va havent una comprensió qualitativa que fa de guia i hi lliura significació (altrament no hi hauria afer oscil·lant, etc.), quan s'oposa la circumstància que hi ha deducció a la congruència conjunta, quan es mal interpreta el fet que hi ha una realitat material al costat d'una mala comprensió del que fa la matemàtica.

L'escrit de Huygens palesa que l'enllaç entre fenòmens no directament relacionats es fa a través de la geometria, no pas perquè s'oposi a res, sinó perquè cal trobar allò que hi vagi millor. Es comprèn un fenomen gràcies a la circumstància que ja s'ha comprès algun fenomen, n'hi ha una significació qualitativa i una expressió quantitativa, i que n'hi ha un desencadenament de passes quantitatives, algunes de les quals amb significació qualitativa, que mena a entendre un altre fenomen, amb les quantificacions que li són escaients. *Comprendre vol dir aquí mantenir significacions impossibles de quantificar amb un concatenació de relacions quantitatives, algunes de les quals significades qualitativament, capaç de fer-hi valer una congruència conjunta quantitativa i no quantitativa*. Pensar aquí implica l'assumpció de fenòmens, i de significacions que en depenen (no quantificables), per mitjà d'allò que en forma part i que permet un excurs quantitatiu, quelcom ja especialitzant però que en cap cas no s'oposa a allò que és qualitatiu com sigui que els seus orígens es troben en allò de què un hom s'ocupa en les coses mateixes.

Un mateix s'adona que cal desenvolupar tant com sigui possible les diverses branques matemàtiques, i que el domini de les múltiples i vàries relacions del quantitatiu esdevingui un afer cabdal: car no hi ha un altre procediment d'enllaç congruent de fenòmens aparentment dispars, sense una relació a mà capaç d'apropar-los amb encert.

Alhora aflora fàcilment una nova perspectiva cabdal: la importància de la comprensió dels fenòmens, de saber què hi ocorre, la de pensar els esdeveniments, la de copsar el significat d'afers bàsics. La congruència matemàtica fóra la d'un exercici estèril (mancat de coneixement natural) sense trobar-se significat per allò que no és quantitatiu, sense formar part dels fenòmens abans de simplificar-los, sense trobar-se orientat pels fenòmens observats o per aquells que es preveu que podrien ser observats.

Es tracta que l'observació i la previsió poden aportar una munió de fenòmens (i.e. quelcom representat, perceptivament o imaginàriament) i motivar un munt de pensaments (amb una qualsevol mena de significat), i tot plegat no excedeix de ser una presumpció sense algun ajustament que enfaixi el discurs. La ciència es desplega aquí com una activitat complexa en la qual les seves passes s'ofereixen a tall d'un pensament que posa èmfasi a prendre nota dels esdeveniments que ocorren i a buscar la manera d'enllaçar-los.

Es diu que així s'entén quelcom: però això sols vol dir que un fenomen o una significació ha estat capaç de ser articulat quantitativament (i.e. hi ha algun afer quantitatiu que hi es subsumit o implícit) a través d'una concatenació de relacions amb d'altres fenòmens o significacions així mateix vertebrats amb afers quantitatius. *Sense significació qualitativa no hi ha coneixement – sense matemàtica no hi ha una certesa escaient malgrat totes les imprecisions instrumental i operatives*.

Sens dubte el pèndol cau per la gravetat, és a dir, cau de forma comparable a com cau un cos lliure, *hi ha això*, i per tant no s'està situat en la circumstància de la pregunta què hi ha (però un hom pot preguntar-se què és la gravetat, com ho fa a què és la massa o què és el magnetisme, per exemple). Tanmateix l'exemple il·lustra que un mateix no en té prou a saber el que hi ha o les seves múltiples i vàries manifestacions, sinó que cerca de saber-ne més quan es troben enllaçades pels trets quantitatius que ho permeten. L'«hi ha això» esdevé més complex i acabat perquè passa a un «hi és, es quantifica així, i...», «i» que pot perllongar-se amb un «es relaciona» o «serveix per a noves relacions». Llavors s'entén: s'eixampla l'«hi ha això», se cap com quantificar quelcom d'un altre fenomen, i com relacionar-ho. Si més no es comença a assumir que la ciència natural esdevé l'única filosofia de la natura possible, i pel cap baix s'ofereix així: un pensament del que hi ha amb una especial atenció a les relacions quantitatives que permet.

La troballa de la magnitud de la caiguda lliure d'un cos per segon palesa una vegada més el que es va comentant i permet d'afegir-hi algun matís. Perquè al cap i a la fi no suposa res més que una explicitació de la circumstància que la relació (quantitativa, estàtica) del temps de caiguda i del temps de mitja oscil·lació és la del diàmetre a la semicircumferència (la seva raó és proporcional a la raó entre la unitat i $\pi/2$). No conté res més de nou, no implica cap nou fenomen: sols fa palès una quantitat a partir de la relació que s'ha establert entre l'oscil·lació cicloïdal que efectua el pèndol i un moviment uniformement accelerat de caiguda lliure. L'encert d'aquesta relació i de les relacions quantitatives que ha comportat fa que, per unes simples operacions, es pugui lliurar el recorregut d'un cos que cau per segon. No cal cap corroboració: basta que s'observi el pèndol i es pensi els afers (si hi ha alguna corroboració confirmarà, és clar, l'encert de tot plegat).

El matís s'introdueix per l'aspecte xocant del fet que sembla que es trobi allò que potser s'hauria d'observar malgrat l'admissió que cau massa de pressa i que l'esdeveniment no permet gaire discriminació. Es tracta al cap i a la fi que el càlcul de la caiguda d'un cos en un segon forma part del mateix conjunt que comprèn el moviment del pèndol (hi ha un moviment que cau per la gravetat i un hom és capaç de complicar-lo quantitativament amb el de caiguda lliure) en els seus aspectes quantitatius, per tant que impliquen aquí magnituds lineals. En d'altres parts de la mecànica es tractarà més aviat d'assegurar-se des d'aquesta part de les magnituds lineals (o més enllà d'aquestes) la congruència de pensar que hi ha quelcom semblant (pensi's com Newton relacionà la caiguda d'un cos i el moviment de la Lluna). El coneixement avança com pot en cada cas, sempre d'acord amb un perllongament del que hi ha amb les quantitats que hi són compromeses a la recerca de noves connexions i comprensions globals.

¿Cal doncs ponderar especialment la matemàtica? Si més no cal exercitar-s'hi tant com sigui possible, amb el ben entès que en els afers de la mecànica clàssica (i d'altres branques físiques) fóra una activitat cega i gratuïta si un hom ignorés el que hi ha i les maneres de pensar-ho i de lliurar significació; d'aquí que hi hagi un interès per tot el que sigui quantificació. Sense pèndol, plans inclinats i caigudes lliure, sense moviments que s'acceleren i sense temps (tots afers qualitatius), sense cerca de perquès i respostes provisionals (per exemple, la gravetat), etc., no se sabria què s'està estudiant, i llavors s'estaria ocupat en d'altres activitats que no són l'estudi dels afers materials.