

F. GRAELL I DENIEL

**AL VOLTANT DE LA TEORIA
MATEMÀTICA ELEMENTAL
EN ELECTROSTÀTICA**

ESCRITS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

QUADERNS DE FILOSOFIA

F. GRAELL I DENIEL

**AL VOLTANT DE LA TEORIA
MATEMÀTICA ELEMENTAL
EN ELECTROSTÀTICA**

ESCRITS DE FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA

61
QUADERNS DE FILOSOFIA

1ª edició desembre 2024

© F.Graell i Deniel
ISBN: 978-84-123314-7-9

www.dossier.graell
www.xtec.cat/~fgraell
www.quadernsdefilosofia.cat

E-mail: fgraell@xtec.cat

Podeu fer ús de l'adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb
Quaderns de Filosofia.

Es prega de tenir en compte sempre de consultar si hi ha una nova edició dels
quaderns (que inclou canvis de vegades prou rellevants) en el web esmentat.

CONTINGUT

Presentació, 6.

I

PRIMERES CONSIDERACIONS ELEMENTALS

1. Uns fenòmens integrat, 8.
2. L'electricitat com a quantitat, 9.
3. Excurs: l'electròmetre de Timothy Lane de 1766, 11.

II

A PROPÒSIT DE LA FORÇA

1. Una avaluació de la força, 14.
2. La força elèctrica, 16.

III

UNA PRESENTACIÓ DEL POTENCIAL

1. Fenòmens elèctrics complexos i càlcul, 19.
2. Introducció al potencial segons Gauss, 20.
3. Repàs d'alguns fets bàsics, 26.
4. Potencial i treball, 28.
5. A propòsit dels signes dels potencials, 30.
6. El potencial com a concepte teòric, 33.

IV

LA INTENSITAT DEL CAMP

1. L'acció elèctrica en un medi, 35.
2. La intensitat de camp, 36.
3. El camp i el potencial, 38.
4. El potencial degut a un sistema elèctric, 39.

V

ALGUNES FÓRMULES CONEGUDES, 42

VI

UNA DIGRESSIÓ.

LA INTEGRAL DE SUPERFÍCIE, 47

PRESENTACIÓ

Quan no fem electricitat, sinó filosofia, estem obligats a fer aparèixer el que els estudiosos d'aquella primera disciplina donen per descomptat, i llavors s'observa que s'hi troba una bona colla de dificultats, alhora que s'hi guanya unes consideracions que permeten enllaçar les qüestions elementals, les expressions formals inicials amb les posteriors, i de veure que tot plegat revela molt d'estudi constant, mentre anem explicitant possibilitats i casos diversos.

D'exemples, n'hi ha de diferents: la força que fa repel·lir dues càrregues es considera positiva, i negativa si s'atrauen, la raó de la qual convenció es fonamentaria en el càlcul i en la consideració física. O el fet que en la integral del camp que lliura el potencial s'obviés el signe del camp, i també es tendís a no designar en els tractats generals els seus límits, aquesta vegada així mateix per raons físiques i de càlcul, etc. Es tracta doncs d'esbrinar amb un cert detall aquests casos, que ens permeten si més no un eixamplament comprensiu que no menysté l'eficàcia de les presentacions en els treballs fisicomatemàtics.

Car, en estudiar els afers com fem aquí, els compliquem, i alhora pot semblar que els ofereix una llum nova. Basta de repassar les presentacions del camp i del potencial en els manuals dels estudis superiors per a adonar-se que el que aquí descabdellam no resulta més senzill, i que ens col·loquem en perill de caure en inexactituds. És clar, valgui el cas, que la integral del camp pot semblar quelcom definitiu quan el lector estableix com a quelcom ja enllestit l'estudi de la integral com un límit. La claredat d'això es trasllada a la integral del camp, etc. Tanmateix, si hi ha aquí exactitud i eficàcia, hi ha també una manca bàsica de comprensió quan hom no es deixa portar per un saber que gaudeix sens dubte d'un factor conductual, és a dir, adquirit. Precisament adonant-nos del que suposa aquesta adquisició no podem més que reconèixer el mèrit immens de molts i molts estudiosos que han provat històricament de superar obstacles físics i matemàtics per a abastar un descabdellament fisicomatemàtic.

En efecte el domini del potencial permet parlar-ne sense tantes circumval·lacions i esclariments, una vegada se l'ha definit en termes de treball i d'energia.

L'escrit deixa molt de marge per a d'altres aproximacions de la filosofia a propòsit del potencial, de la intensitat, etc., com sigui que s'hi compila unes quantes notes, que poden semblar suggerents, i que hi ha molt de tros per córrer. A més fan referència a uns pocs autors sense cap ànim d'exhaurir els estudis. Ens hem circumscrit al que era necessari per a fer comprensible el que volíem transmetre, que certament admet precisions i, si cal, alguna rectificació, amb l'esperança que sigui petita.

Finalment s'hi ha incorporat la traducció d'unes poques línies de Gauss, de Rieman, i de Maxwell: algunes han estat útils a l'hora de les nostres consideracions, d'altres s'han transcrit a tall d'una certa exemplarització que espigola ací i allà en la rellevància dels texts d'aquests autors, i sols com a indicació d'un possible eixamplament de mires.

I

PRIMERES CONSIDERACIONS ELEMENTALS

L'estudi de l'electricitat crida l'atenció per les seves característiques: per exemple, es percep prou afers que van formant un conjunt d'esdeveniments a través de la fricció, de la influència, de la conducció, de les diverses piles, de l'electròlisi, etc., de manera que hi hauria hagut una primera tasca que hauria consistit a reagrupar observacions diferents: des d'una espurna i d'una descàrrega a les consideracions que es deriven de l'apropament de metall variis.

1. Uns fenòmens integrats.

No hi hauria una unificació autèntica dels diferents fenòmens elèctrics: s'anomenaria així *llur integració*, amb el mèrit de fer-ho d'acord amb alguns expedients, sobretot el de causa i efecte (la fricció lliura propietats al vidre i a la resina, per exemple), al costat de la semblança entre les manifestacions resultants (els efectes de l'electricitat des d'una ampolla de Leiden i des d'una pila voltaica, valgui el cas).

Simultàniament l'observació d'una manifestació elèctrica, fins i tot abans de la seva quantificació, hauria necessitat de l'ajut de la imaginació-pensament per a completar, i així expressar, el que no es veu, ja per a una descripció més assaonada o per a l'explicació del que és patent. L'electricitat i tot va estar durant molts anys l'objecte de posicions diverses a propòsit de què era i àdhuc si hi havia un moviment de trasllat de quelcom o no. Aquesta voluntat de representar-se d'una manera més o menys completa el que ocorria en les experiències elèctriques semblava quelcom que s'ajustava a les exigències de la raó..

Es tracta del que s'anomena *una modelització comuna o narrativa*, on no hi entra ni llenguatge formal ni models geomètrics, de manera que hi va havent una expressió més i més descabdellada que permet seguir el que succeeix i, si pot ser, explicar-ho a fi que es compregui el que passa.

Exemples paradigmàtics d'això serien la teoria del fluid únic de Benjamin Franklin i la de les dues electricitats de Robert Symmer¹.

2. L'electricitat com a quantitat.

La unitat de quelcom anota la seva relativa autonomia de les altres coses; la unitat al marge d'un objecte natural deu ser la resultant d'un domini expressiu, quelcom dit així, que es deu explicar a partir dels afers perceptius unitaris.

No semblaria difícil de determinar quelcom unitari en l'electricitat, i alhora sí que ho semblaria perquè no s'hi aïlla allò elèctric i, si més no durant el temps que se'n sabia poc, del que era aquest fenomen. Sempre s'hauria pogut assumir una electricitat unitària a través del cos electrificat: Coulomb manipulava petites esferes, podia distribuir l'electricitat fent-la passar de l'una a l'altra, i aconseguir-ne dues aproximadament amb la mateixa càrrega; a través de la influència s'electritzava un cos amb una electricitat igual i oposada a una altra; les descàrregues de tot tipus palesarien cossos més electrificats o menys, etc.

Amb el pas dels anys l'electroscopi, que assenyalava que hi havia electricitat, es complementà amb l'electròmetre que dava alguna mesura de càrrega. Per exemple, el mateix Coulomb usà la balança de torsió modificada com a electròmetre, d'acord amb el fet que les forces eren proporcionals a les càrregues, i precisament per a mesurar-les. Certament el nombre de la càrrega s'interpretaria sense nous inconvenients (deixant que s'hauria trobat a través d'una relació de forces i distàncies).

Camins com aquests, i de molts altres, permetrien d'aplicar el quantitatiu i, sobretot, d'avaluar, a propòsit del fenomen elèctric, en termes de continuïtat: hi hauria una relació de continuïtat entre forces, distàncies i càrregues, una màquina productora d'electricitat ho faria des de càrregues febles fins a poder fer-ne de fortes, quelcom paral·lel s'esdevindria amb les piles i el nombre dels seus elements o les variacions per la mida de les seves superfícies, el metalls anirien

¹ Cf. *Esbossos sobre electricitat (1600-1785). Escrits de filosofia de la ciència* QF48 i 49.

variant el seu comportament elèctric a mesura que hi hagués un canvi de temperatura, etc. La continuïtat es trobaria assegurada: a semblança de l'exemple dels espais i els moviments, que podrien considerar-se tant elementals com es volgués, els trepitjaria les passes, es podria quantificar l'elèctric en mesures tan petites com semblés, i encetar-hi un camí que ja s'hauria recorregut amb els infinitesimals.

Parlaríem de la quantitat positiva o negativa d'electricitat e d'un cos carregat, d'acord amb una convenció de signes². I des d'aquí es definiria la densitat elèctrica de volum en un punt, o la de superfície en un punt, o àdhuc la d'una línia en un punt, com afers elementals elèctrics³, per tant sense més variació interna quan no hi hagués canvis

² En paraules de Maxwell: «Hem vist que les propietats dels cossos carregats són tals que la càrrega d'un cos pot ser igual a la d'un altre, o a la suma de les càrregues de dos cossos, i que quan dos cossos estan igual i oposadament carregats no tenen cap efecte elèctric sobre els cossos externs quan es col·loquen junts dins d'un recipient aïllant tancat. Podem expressar tots aquests resultats d'una manera concisa i coherent descrivint un cos electrificat com a carregat amb una certa quantitat d'electricitat, que podem denotar per e . Quan la càrrega és positiva, és a dir, segons la convenció habitual, e serà una quantitat positiva. Quan la càrrega és negativa o resinosa, e serà negativa, i la quantitat $-e$ es pot interpretar com una quantitat negativa d'electricitat vítria o com una quantitat positiva d'electricitat resinosa.

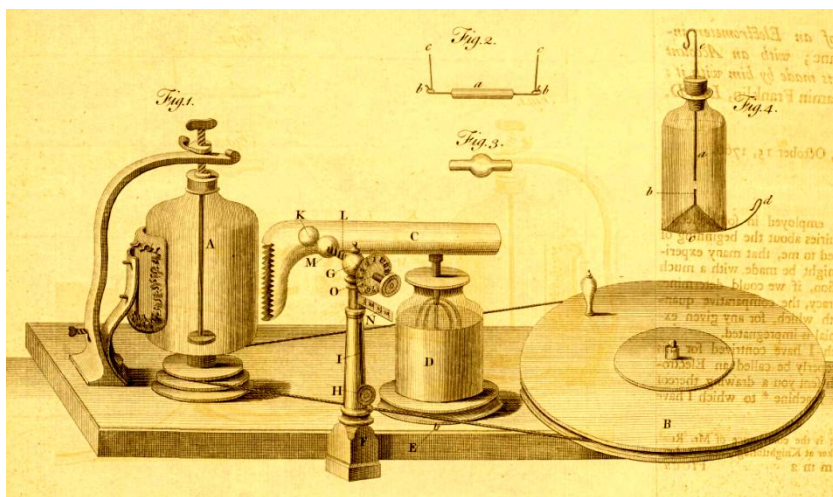
L'efecte de la suma de dues càrregues iguals i oposades d'electricitat, $+e$ i $-e$, es produeix un estat d'absència de càrrega expressat pel zero. Podem considerar, doncs, que un cos no carregat està virtualment carregat amb càrregues iguals i oposades de magnitud indefinida, i que un cos carregat està virtualment carregat amb quantitats no iguals d'electricitat positiva i negativa, constituint la suma algebraica d'aquestes càrregues l'electrificació observada. Tanmateix, és evident que aquesta manera de considerar un cos electrificat és completament artificial, i pot ser comparada amb la concepció de la velocitat d'un cos com a compost de dues o més velocitats diferents, cap de les quals és la velocitat real del cos» (*A treatise on electricity and magnetisme*, §63).

³ La referència «en un punt» no s'ha de comprendre en l'accepció d'un «sense parts», sinó com a quelcom el suficientment petit per tal de fer vàlids els estudis. Aquell punt «sense parts» no contindria electricitat sense fer-ne

físics, i que permetrien que s'hi operés segons hem après en el càlcul, les integrals corresponents permetent una expressió formal de caràcter hipotètic a contrastar, si fos el cas, o que permetria un anar més enllà en el procés de càlcul.

3. Excurs: l'electròmetre de Timothy Lane de 1766.

És uns dels primers, està descrit en una carta dirigida a Benjamin Franklin el 15 d'octubre de 1766⁴, i palesa una aproximació a la càrrega per haver-hi alguna relació entre causes i efectes, malgrat que les lectures de l'escala de l'instrument no hagin de ser proporcionals als valors efectius de les càrregues. A tall d'exemple d'enginy i dels diferents elements del conjunt, anotem les seves parts:



qualcom que no es trobaria en la natura (per exemple, un potencial infinit), a més del fet de tractar-se d'una idealitat.

⁴ Cf. <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rstl.1767.0046>.

- A. El vidre cilíndric de la màquina d'electricitat.
- B. La roda: a cada gir seu el vidre cilíndric ho fa quatre vegades.
- C. El conductor (porta la càrrega des d'A a D).
- D. L'ampolla de Leiden.
- E. Un fil de llautó (per a connectar-la, per baix l'ampolla de Leiden, amb H).
- F. El suport de l'electròmetre, de fusta, buidat per dins.
- G. Peça de llautó, la seva part inferior es troba dins del buidat del suport.
- H. Un cargol que toca la peça de llautó G per baix.
- I. Un canaló per a H, per si cal pujar-lo o baixar-lo (segons la mida de les ampolles de Leiden).
- K. Una peça de llautó fixada al conductor.
- L. Cargol d'acer que ve des de G.
- M. Un nova peça de llautó fixada a L i oposada a K.
- N. Escala, amb divisions iguals per a cada gir de L.
- O. Placa circular fixa a un cargol, i mòbil amb aquest, que apunta, amb el gir, a la divisió de l'escala. Aquesta placa està dividida també en dotze parts.

El seu principi de funcionament és aquest: quan l'ampolla de Leiden resta plena, l'excés elèctric vol ser expulsat.

Notem que H, I, G, L, M, formen un tot oposat, sense contacte per dalt, amb un altre tot format per C i K, però aquell primer tot amb un fil per baix que connecta l'ampolla de Leiden amb H.

Si posem en contacte l'ampolla (D) amb el cargol (H) de l'electròmetre, intercalant-hi i tot algun objecte que es pugui trencar, i mentre hi ha una nou cargol (O) que conté una escala circular, i a sota (N) una escala, cada unitat de la qual corresponent a una volta del cargol, llavors podrem regular la distància en el conductor (K) i l'electròmetre (M). Quan fem girar la roda (B) la màquina d'electricitat (A) comunica electricitat a l'ampolla (D), i quan ja és plena salta l'espurna entre (K) i (M) a una distància seva, i llegirem a (O) i (N) una mesura. Hi haurà les següents variables: el nombre de voltes que es fa a la roda, la mida del cobriment metàl·lic de l'ampolla, el nombre d'ampolles de Leiden usades, mentre que s'ha de

tenir present com a factors modificants l'estat de l'aire, el vidre cilíndric de la màquina, el coixinet amb què es fricciona el vidre. Si més no l'aparell lliura una relació, l'espurna fent de senyal, entre ampolles de Leiden, els seus recobriments, l'efectivitat de la roda, etc., mentre hi va llegit els valors numèrics en una escala.

II

A PROPÒSIT DE LA FORÇA

Es pot definir la força com una acció sobre un objecte, que fa que acceleri respecte d'un sistema de referència inercial, i de vegades es parla de forces en contacte i forces d'acció a distància (la gravitatòria, l'elèctrica i la magnètica). Certament n'hi ha d'altres: ara ens interessa sols de dir-ne uns apunts elementals.

1, Una avaluació de la força.

La noció de força passa com una de les més conegudes i alhora hi hauria motius per a no titllar-la d'immediatament òbvia. Que la força aplicada en un punt a un cos sigui proporcional a la massa corporal i al canvi instantani de velocitat, o que hi hagi una proporcionalitat de forces i de canvis instantanis de velocitat en un mateix cos, àdhuc que anomenem «força» quan ocorre això, no és sols alguna cosa suggerida i avalada experimentalment, sinó també la resultant de la proposta *teòrica* d'un *model formal* capaç d'arribar, a través del càlcul, a unes dades que permeten alguna confirmació experimental directa o indirecta. Més enllà això es perllonga amb el fet d'haver-hi una força constant, que es pot resseguir formalment. O una força que va canviant, i en tots els casos seria el càlcul el que permetria d'anar expressant les implicacions a propòsit dels espais, de les velocitats, i més, en el procés.

L'expressió formal no suposa que la força teòrica no interpreti un esdeveniment natural, o que aquest darrer no rebi aquesta interpretació: l'ús que en feu Newton en els *Principia* ho reblaria; si més no l'escoli a les lleis del moviment del llibre basta per a recordar que les experiències amb els xocs dels pèndols permeten postular, per exemple, la igualtat de forces dirigides en direccions contràries i que, si no es «percep» les forces teòriques perquè són una expressió formal, hi ha un cos i uns efectes cinemàtics corresponents. Les forces teòriques són expressions formals compromeses amb els esdeveniments implicats en els fenòmens, són l'única manera de què

hem pogut gaudir per a fer un seguiment del que passa en el que ens és proper i, a través de llargs camins formals, en allò que és molt distant. No s'ofereixen com a rèpliques perceptives, sinó com a expressions que pretenen recollir les instàncies implicades (per exemple, el cos pesant a través d'un concepte teòric com la massa) i les modificacions que hi ha (un canvi natural per mitjà del canvi instantani de velocitat, un afer de cap a cap ideal), que no es lliuren soles i per si mateixes, sinó que es fa precis de recollir-les en una teoria i d'establir-hi la relació amb allò que ho suggereix.

Encara millor: nosaltres interpretem el xoc dels dos cossos pendulars a través d'una relació entre els seus cossos i el seu canvi de moviment. Havent estudiat teòricament a què anomenem velocitat i massa, sembla que la millor manera de lliurar un assaig de descripció quantitativa del que ocorre és la d'expressar-nos a través d'una massa corporal i un canvi de velocitat (ho fariem en termes paral·lels a propòsit de la caiguda de cossos). Ni és una iniciativa que no pretengui respondre ben bé al que passa, ni el que succeeix no ho té altrament que com una expressió bastida a partir d'afers (l'espai ideal, el temps pur, la mera massa) que, presos d'un a un, tal qual no serien útils: la força teòrica es trobaria a través d'aquell espai, temps i massa com a seguiment d'un procés natural.

El rellevant rau a fer-ne, d'això, un domini. L'aproximació a la unitat de força revela què es fa: una tal unitat lliura a una massa unitària una unitat de canvi de velocitat.

Llavors, en el domini, assumim que aquesta acció pot anar-se duent a terme successivament, per exemple, com diu Newton al lloc esmentat, quan ja es coneix la llei de caiguda:

«Quan cau un cos, la gravetat uniforme, obrant igualment en les porcions iguals de temps individuals, imprimeix forces iguals en aquell cos, i genera velocitats iguals: llavors en tot el temps imprimeix tota la força, i genera tota la velocitat proporcional al temps. I els espais descrits en els temps proporcionals són com les velocitats i els temps conjuntament; això és, en la raó duplicada dels temps».

O es pot parlar d'una força instantània quan s'estima, per exemple, que no és constant.

L'èxit de la mecànica newtoniana dugué a expressar-se en termes de força en prou qüestions mentre s'anava adquirint com a quelcom après, i desdibuixant-se com a millor aproximació al que ocorre sense que lliuri precisament el que succeeix en el seus termes. La força passà a ser una noció bàsica amb la seva expressió formal compromesa dins el conjunt de les expressions formals.

2. La força elèctrica.

1. La força elèctrica es manifesta amb les atraccions i les repulsions: hi ha cossos que es mouen; i assumim que ho fan amb un moviment la velocitat del qual canvia constantment, d'acord amb els nostres mitjans d'expressar-ho

La balança de torsió de Coulomb va permetre que es fixés la proporcionalitat inversa entre la força d'atracció o de repulsió de dos cossos, i el quadrat de la seva distància, d'una manera molt més convincent que d'altres demostracions més recents que ho haurien volgut fer a través del càlcul amb l'ajut d'una experiència.

L'estudi de Coulomb suposava la força teòrica i a seva llei implica una aproximació de les dades experimentals al model ideal de la força. Per dir-ho així: el concepte de força *també* és eficaç aquí.

Precisament la llei assegurava la continuïtat en el creixement i decreixement de les forces, les tractava com uns afers que reflectien els esdeveniments naturals mentre es prenia, en lloc del valor de les pròpies forces, els valors que els són proporcionals, és a dir, l'angle de torsió i el moment de la corresponent força. Al cap i a la fi tot es movia a nivell idealment proporcional.

No sols no s'implicava la força en els termes que podrien remetre directament a un esdeveniment natural, sinó que l'expressió de la força havia de rebre l'ajut d'una torsió i recuperació, de segur a estudiar en uns termes paral·lels, és a dir, tenint en compte la força de torsió, el cos que es torça, i el moviment. La força elèctrica es calculava amb l'ajut d'una força de torsió. Hom se les enginyava per tal de donar una expressió formal a la força elèctrica: al cap i a la fi les dues forces es trobarien en una relació de causa i efecte, les

proporcionalitats de l'una portarien a les de l'altra, per on tornàriem a ser a la força tal i com l'expressem sempre.

2. Mentre les forces elèctriques es palesarien en els comportaments dels cossos, la seva expressió se'n distanciaria perquè el seu esment hauria estat el final d'un estudi d'experiències seguides amb una expressió formal característica.

Fet i fet els experiments de Coulomb expressen que la força elèctrica és directament proporcional a l'angle de torsió i inversament proporcional al quadrat de les distàncies. Tractant-se de dues boles carregades elèctricament la càrrega elèctrica no expressarà res més que les variacions d'aquell angle a partir de la manipulació de les boles per a modificar la seva electricitat.

Sigui com sigui, les forces elèctriques, se les estudia com a accions que comprometen cossos i moviments (o equilibris), i poden rebre una relació quantitativa quan se les estudia tal i com és possible.

Hom manipula la càrrega elèctrica com una variable de les relacions entre forces i distàncies, i estableix una relació entre càrregues d'acord amb això, acompanyat del fet que pot produir electricitat (i per tan càrrega) de diferents maneres, alhora que hi ha tota l'experiència elèctrica acumulada.

3. D'altra banda els fenòmens elèctrics no són com els gravitatoris. Aquests depenen de la massa, i els primers no són dels cossos en aquest sentit, sinó que semblarien més aviat que estarien en el cossos, com uns hostes que no els afectarien. Les diferents interpretacions que se n'haurien fet en els segles passats haurien defensat que el «fluid» elèctric es mantindria autònom, i seria aquest el responsable de les forces elèctriques. No sembla doncs estrany que hi desaparegués l'esment del cos on es trobaria perquè aquest cos no en seria el causant, o si més no el punt de partida de l'estudi, mentre es mantindria el criteri de provocar una força.

Des d'aquí la càrrega forma part d'un *model narratiu* que permet *interpretar* unes raons quantitatives de forces i distàncies, mentre se la fa l'origen de forces en les interaccions dels cossos electrificats.

La força elèctrica esdevé doncs una força l'acció de la qual es troba connectada amb els cossos electrificats.

La *teoria* elèctrica tindrà en compte una força ideal i el concepte pur de càrrega elèctrica.

4. L'electroscopi i algun electròmetre disposen d'uns elements semblants: forces i distàncies de separació, que permetrien dar alguna quantificació de la càrrega elèctrica, de manera que expressen de bell nou una relació d'espais tenint en compte que són més o menys proporcionals a les forces.

III

UNA PRESENTACIÓ DEL POTENCIAL

Les relacions entre força i potencial mereixen ser estudiades amb detall quan es treballa amb el propòsit de comprendre-les en un escrit com el nostre. De fet varen passa alguns anys fins que es fixaren els referents sobre els quals recau el camp, la càrrega unitària positiva, la qual cosa permeté una explicitació de signes entre força i potencial.

1. Fenòmens elèctrics complexos i càlcul.

Sigui com sigui l'expressió formal dels fenòmens elèctrics no es reduïrien a la relació entre forces i distàncies, a més de les càrregues: s'atrauen i el repel·leixen cossos electrificats en tot tipus de formes, pot suggerir-se que la mateixa electricitat es troba distribuïda de diferents maneres, els cossos metàl·lics carregats ho estan sols en la superfície, cossos no conductors es comporten individualment d'una manera diferent, etc., i els estudiosos des de finals del XVIII i començaments del XIX provaren de trobar experimentalment com eren les modificacions i les participacions de càrregues entre cossos de diferents mida, per exemple, i àdhuc en provaren expressions formals partint de l'acceptació de la força que hi ha entre partícules elèctriques.

Perquè una vegada assumida la càrrega elèctrica, cal capdavant una noció teòrica que s'inclou doncs en un nivell ideal, i àdhuc admetent-ne una quantificació, la mirada analítica planeja els elements que convenen, els enllaça, resol dificultats o estudis tediosos. Un d'aquests elements, ja l'hem esmentat dalt, fora la partícula elèctrica.

Un cas paradigmàtic seria el treball de Poisson *Sur la distribution de l'électricité à la superficie des corps conducteurs* de 1812, que expressament volia mostrar l'acord entre el càlcul i les experiències publicades per Coulomb de la relació de les quantitats totals d'electricitat de dues esferes en contacte de radis varis, i l'espessor de

la capa elèctrica en diferents punts de les seves superfícies. Però n'hi hauria mes.

Els cossos tenint volum, la distribució elèctrica es mouria en tres dimensions, la qual cosa comportaria que el càlcul hagués d'assumir les corresponents integrals, àdhuc exercicis complexos, com el treball esmentat de Poisson, que d'altra banda ja expressa el potencial de Laplace.

Es tracta de grans matemàtics al costat dels seus interessos físics conjunts, que duen a terme, a partir de consideracions infinitesimals, el càlcul de les resultants conjuntes dels fenòmens elèctrics, i són sovint també els que lliuren els mitjans formals més convenients per a desenvolupar l'aproximació analítica als fenòmens (recordem Green i Gauss, i llur estudi sobre el potencial). El fet s'inscriuria en l'extensió del tractament analític en els estudis elèctrics d'aquests anys que perllongarien els mecànics (i d'altres) anteriors, i que en conjunt anirien establint una aproximació a les observacions de fenòmens a tenir en compte, i un eixamplament de les previsions.

Deu ser cert que tot això podria comportar el tractament dels fenòmens naturals a tall de problemes matemàtics, i sens dubte també ho eren, si calia resoldre com expressar alguna dada observable. Alhora no podríem fer dues coses al mateix temps: l'expressió formal no se semblaria al fenomen, malgrat que seria un error de no fer confluïr aquesta dualitat, per exemple, per mitjà d'estudis més elementals.

La infinitesimalització de les partícules elèctriques, i la seva repercussió sobre la força, permeteren sens dubte la continuïtat d'unes recerques; és més: deixaren suposar per als fenòmens físics observats unes nocions bàsiques expressables amb l'ajut de l'anàlisi, i que permetien vorejar un estudi feixuc des del començament.

2. Introducció al potencial segons Gauss.

Un dels mitjans de càlcul més rellevants trobats, i que permetien un tractament específic, deriva primerament de Lagrange quan el 1777 fa expressar els components d'una força pels quocients diferencials parcials d'una funció; més endavant Laplace denota aquesta funció

amb V en els seus estudis, el 1781 i anys posteriors, de l'acció gravitatòria d'un esferoide sobre un punt.

Green i Gauss assumiren aquesta funció i descabdellaren tot un reguitzell de teoremes generals de la màxima rellevància, i que valdrien per a les forces que atrauen o repel·leixen segons el quadrat de la distància, és a dir, les forces gravitatòries, les elèctriques i les magnètiques..

L'alemany pràcticament comença el seu treball així⁵:

«Disegnem amb a, b, c , les coordenades rectangulars d'un punt material, des del qual s'exerceix una força repulsiva o atractiva; la força acceleradora mateixa en un punt O indeterminat, les coordenades del qual són x, y, z , amb

$$\frac{\mu}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = \frac{\mu}{rr^6}$$

on també μ , com en el cas primer [*la gravetat*] de l'article que precedeix, és la matèria ponderable que es troba en el punt primer, en el cas segon i tercer expressa el quantum del fluid magnètic o elèctric. Dividim aquesta força paral·lelament als tres eixos coordinats, i llavors s'origina els components⁷

⁵ Gauß, Karl Friedrich: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte*, a Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in Jahre 1839, Leipzig, 1840, pàgs.1-51. Tot això són les parts 2, 3, 4.

⁶ Aplica per als tres casos que les forces són directament proporcionals a allò que les provoca i inversament al quadrat de la distància. Arreu hi hauria la unitat en el punt O .

⁷ La força està denotada per $\frac{\mu}{r^2}$.

Els seus components, que segueixen els eixos, són: $\frac{\mu}{r^2} \cos \alpha, \frac{\mu}{r^2} \cos \beta, \frac{\mu}{r^2} \cos \gamma$ [α l'angle que forma r , la distància entre (a,b,c) i (x,y,z) , amb la paral·lela a l'eix de les abscisses, etc.].

Llur suma (és a dir, l'arrel de la suma del seus quadrats) fent $\frac{\mu}{r^2}$. D'acord amb el que són α, β, γ tenim:

$$\frac{\varepsilon\mu(a-x)}{r^3}, \frac{\varepsilon\mu(b-y)}{r^3}, \frac{\varepsilon\mu(c-z)}{r^3},$$

on ha de ser $\varepsilon = +1$ o $= -1$, segon si la força és atractiva o repulsiva⁸, cosa que es decideix per si mateix segons la condició de l'actuant i del que rep l'acció. Aquests components són representats com els coeficients diferencials parcials

$$\frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dx}, \frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dy}, \frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dz}, \text{etc.}^9 \gg$$

Si llavors fem: $\frac{\mu}{r} = V$

I per tant: $d\frac{\varepsilon\mu}{r} = dV,$

$$\cos \alpha = \frac{a-x}{r}, \cos \beta = \frac{b-y}{r}, \cos \gamma = \frac{c-z}{r},$$

⁸ Maxwell (*A treatise*, vol.1 §93a) considera positiva la força que tendeix a augmentar la distància.

Que, amb $\frac{\mu}{r^2}$ [denotat més avall per ρ] va lliurant els components que segueixen.

⁹ És a dir, aquestes derivades parcials (la derivada respecte de x , la respecte de y , i la de respecte de z) dutes a terme lliuren els components de les forces de dalt. Per exemple, la derivada parcial de $\frac{\varepsilon\mu}{r}$ respecte de x seria (recordant que $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$):

$$\begin{aligned} \frac{d\frac{\varepsilon\mu}{r}}{dx} &= \frac{d\frac{\varepsilon\mu}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}}{dx} = \\ &= \frac{-\varepsilon\mu \frac{1}{2} 2(a-x)(-1)}{r^3} = \frac{\varepsilon\mu}{r^3} (a-x). \end{aligned}$$

Per tant les derivades parcials de $\frac{\varepsilon\mu}{r}$ són *els components de les forces*.

Quan hi ha molts punts materials que fan forces d'atracció o de repulsió sobre el punt O, llavors es poden anar sumant totes les derivades parcials del respectiu $\frac{\varepsilon\mu}{r}$.

els components de la força actuant en O es representaran per:

$$\frac{\varepsilon dV}{dx}, \frac{\varepsilon dV}{dy}, \frac{\varepsilon dV}{dz}$$

Remarca que:

« V esdevé una funció de x, y, z , i la recerca de les propietats d'aquesta funció és la clau per a la teoria de les forces atractives i repulsives¹⁰. Per a un tractament còmode de les investigacions que serveixen per això ens permetrem de lliurar a aquesta V un nom propi, i d'anomenar aquesta quantitat el *potencial*¹¹ de les masses a les quals es refereix».

Mirem la relació entre el potencial i la força:

«Dissenyem tota la força que es troba en el punt x, y, z , amb ρ , i l'angle que la seva direcció fa, amb els tres eixos de coordenades, amb α, β, γ , llavors els tres components fan¹²

$$\rho \cos \alpha = \varepsilon \frac{dV}{dx}, \quad \rho \cos \beta = \varepsilon \frac{dV}{dy}, \quad \rho \cos \gamma = \varepsilon \frac{dV}{dz},$$

i

$$\rho = \sqrt{\left(\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right)}.^{13}$$

Finalment tenim:

¹⁰ Gauss fa notar la importància de V per a la teoria de forces que tenen una relació inversament proposicional al quadrat de la distancia entre els seus orígens.

¹¹ Degué ser la primera vegada que es parlava de V en termes de potencial (i no funció potencial, expressió que Gauss desconeixia).

¹² Si la derivada del potencial expressa la força, els components de la força seran els components de la derivada del potencial. Els angles són els mateixos de dalt.

¹³ Posem tot al quadrat i sumem membre a membre les tres igualtats. Llavors $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, i ε^2 és sempre la unitat. Resta ρ^2 igual als quadrats dels quocients diferencials, i d'aquí ρ .

«És ds l'element d'una línia recta o corba qualsevol, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ són els cosinus de l'angle que aquell element fa amb els eixos de coordenades¹⁴; designem també amb θ l'angle entre la direcció de l'element i la direcció que la força resultant mateixa té; llavors¹⁵:

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} \cdot \cos \alpha + \frac{dy}{ds} \cos \beta + \frac{dz}{ds} \cos \gamma$$

«La força projectada en la direcció de ds és així¹⁶:

$$\rho \cos \theta = \varepsilon \left(\frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\varepsilon dV}{ds}.$$

«Tracem per tots els punts, en els quals el potencial V té un valor constant, una superfície, llavors aquesta superfície, parlant en general, separarà la part de l'espai on V és menor, d'aquella on V és major que

¹⁴ La relació entre el catet adjacent (dx) i la hipotenusa (ds)

¹⁵ Gauss vol ara establir el cosinus de l'angle que la direcció d'una força fa amb algun element lineal d'un espai per tal d'obtenir l'efecte útil de la força en la direcció de l'element.

Fent un mer esbós tindriem:

$$\text{si } \cos \theta = \frac{dF}{ds} \text{ i } \frac{dF_x}{dx} = \cos \alpha, \frac{dF_y}{dy} = \cos \beta, \frac{dF_z}{dz} = \cos \gamma,$$

$$\text{d'on } dF_x = dx \cos \alpha, dF_y = dy \cos \beta, dF_z = dz \cos \gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{Llavors } \cos \theta = \frac{dF}{ds} &= \frac{dF_x}{ds} + \frac{dF_y}{ds} + \frac{dF_z}{ds} = \\ &= \frac{dx}{ds} \cos \alpha + \frac{dy}{ds} \cos \beta + \frac{dz}{ds} \cos \gamma. \end{aligned}$$

Tot seguit ja es troba $\rho \cos \theta = \varepsilon \left(\frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \text{ etc} \right)$, ho resol respecte del nou referent, l'element ds , i gaudirem de la força projectada ($\rho \cos \theta$) sobre la direcció ds .

$$^{16} \cos \alpha = \varepsilon \frac{dV}{dx} : \rho, \cos \beta = \varepsilon \frac{dV}{dy} : \rho, \cos \gamma = \varepsilon \frac{dV}{dz} : \rho,$$

i se substitueix en l'equació anterior, tenint en compte ρ .

aquell valor. Està la línia s en aquesta superfície, o si més no la toca tangencialment amb l'element ds , llavors $\frac{dV}{ds} = 0$.¹⁷ En el cas doncs que, en un tal lloc, no s'hi destrueixin les unes amb les altres les parts constitutives de la força conjunta en un tal lloc, o que ρ sigui igual a 0, en el qual cas no es parlaria més d'una direcció de la força, necessàriament cal que $\cos \vartheta = 0$, d'on conclouríem que la direcció de la força resultant és, en cada punt d'un tal superfície, normal a aquesta mateixa, i certament dirigida a aquell costat de l'espai on estan confinats els valors majors de V , quan $\varepsilon = +1$; dirigida cap al costat oposat, si $\varepsilon = -1$.¹⁸ Anomenem una tal superfície una *superfície d'equilibri*¹⁹. Mentre pot traçar-se una tal superfície per cada punt, la línia trobarà, en el cas que no estigui tota en una superfície d'equilibri, en cadascun dels seus punts, una altra superfície. Talla s totes les superfícies d'equilibri fent angles rectes, llavors una tangent a aquella línia representarà arreu la direcció de la força, i $\frac{dV}{ds}$ la seva intensitat (*Stärke*)²⁰.

«La integral $\int \rho \cos \theta \cdot ds$, estesa per un tros arbitrari de la línia s , és evidentment $= \varepsilon(V' - V^0)$, quan V^0 i V' signifiquen els valors

¹⁷ La derivada d'una constant (ho seria V al llarg de s) és en efecte zero. Deixant aquesta manera d'arribar-hi, i recollint el que va dient Gauss podríem fer:

Sabem que $V = \frac{\mu}{r}$, i que la seva derivada és la força. La superfície amb el mateix potencial (per exemple, els punts d'una esfera respecte d'una massa puntual en el seu centre) separa l'espai en dues parts, aquella amb major potencial (els punts interiors de l'esfera, en l'exemple), i el de menor potencial (espai exterior de l'esfera). Si ds és tangent a aquella superfície, i essent-li ρ perpendicular, $\rho \cos \theta = 0$ (o bé la derivada de V respecte de s val 0).

¹⁸ Gauss ho valora pel signe de les càrregues, i no pel valor absolut del potencial.

¹⁹ Gauss usa el nom *Gleichgewichtsfläche*, literalment vol dir superfície d'equilibri, però se l'anomena superfície equipotencial.

²⁰ Si s (o l'element ds) és perpendicular a les superfícies equipotencial successives (o a una), llavors segueix la direcció de la força, creixent o decreixent, $\rho \cos \theta$, quan $\theta = 0$, i el seu cosinus és 1.

del potencial per al punt inicial i final. Si s és una línia tancada, llavors aquella integral, dirigida a través de tota la línia, és = 0»²¹.

3. Repàs d'alguns fets bàsics.

1. L'exposició de Gauss valdria per a una qualsevol força inversament proporcional a la distància dels elements que es considera, per tant per a la força deguda a la gravetat, per a la força elèctrica i la magnètica, i deu ser la primera vegada que se la presenta d'una manera tan diàfana.

Essent el primer a parlar de potencial (el símbol V , ja l'usà Laplace) és ja il·lustrador que l'anomenés així (Green, independentment i anteriorment de Gauß, l'havia anomenat «funció potencial»).

Sigui com sigui, la funció tindria com a objectiu de facilitar l'estudi matemàtic: s'escapoliria de la fórmula de la força, mentre s'hi troba relacionada. En principi no se li lliuraria una interpretació física,

²¹ $\rho \cos \theta$ expressa la força útil en la direcció de ds . Si ara sols tenim en compte el potencial d'una força útil, llavors si la derivada d'aquest potencial és aquesta força, la integral (que és una suma) d'aquesta força lliurarà el potencial; en concret, si es té en compte una secció de línia, la suma constarà de totes el sumands entre els dos punts finals de la línia.

Val la pena de retenir:

$$\int \rho \cos \theta. ds = \varepsilon(V' - V^0),$$

perquè, en expressions posteriors, equival a dir que el pas d'un potencial V^0 a un V' és la suma dels treballs elementals (o la seva pèrdua) des del punt inicial a final. Notem que no s'explicita cap massa ni cap càrrega en els punts esmentats, malgrat que implícitament se suposa la unitat.

Si el punt inicial i final coincideixen el treball de més o de menys primer és neutralitzat pel treball de menys o de més de la segona part del camí, etc.

sinó que se la defensaria com una funció auxiliar per a facilitar el descabdellament formal.

D'altra banda les fórmules – la de la força expressaria l'acció d'una força inversament proporcional al quadrat de la distància – han perdut una de les magnituds de les dues instàncies on s'apliquen, car la resultant sempre es podria multiplicar per la magnitud que manca, cosa que equival a assumir de punt de partida una magnitud unitària obviada.

Recordem que, la quantificació d'una força *elèctrica*, se la llegeix des del concepte teòric de força.

2. Es lliura la integral lineal de la força respecte del recorregut.

Ho podríem resumir així: sabem que $V = \frac{\mu}{r}$, i que la seva derivada és la força. Prenguem μ com a centre, i llavors els punts d'una esfera respecte aquest centre puntual separa l'espai en dues parts, aquella amb major potencial, i la part de menor potencial.

Recurrent la superfície de l'esfera, V és constant. Si ds és tangent a aquesta superfície, $\frac{dF}{ds} = 0$ [$= \cos \theta$]. Això vol dir que $\rho \cos \theta = 0$; com no suposem que no hi hagi forces, sinó que $\cos \theta = 0$, per tant que θ valgui $\frac{\pi}{2}$, i que la direcció de forces sigui perpendicular en aquest punt a aquella superfície, etc.

Quan la línia s no està en una superfície equipotencial, va trobant-se d'altres en cadascun dels seus punts, mentre $\frac{dF}{ds}$ representa l'angle de la direcció de la força respecte de la línia en cada punt seu.

3. En la integral $\int \rho \cos \theta \cdot ds$, cada sumand conté $\rho \cos \theta$, que expressa la força útil en la direcció ds .

I $\rho \cos \theta \cdot ds$ es comprèn com el factor diferencial de la funció auxiliar V , per tant representa cada quantitat infinitesimal que afecta la funció auxiliar amb cada espai infinitesimal, la suma de totes les quals

expressa la modificació del potencial des de V^0 a V' , i no pot dependre sinó del punt de partida i d'arribada²².

4. Potencial i treball.

1. Acabem de dir que $\rho \cos \theta \cdot ds$ es comprèn com un diferencial sumatori del potencial V : cada força per cada espai infinitesimal se suma en la integral als productes quantitatius de les altres forces per espais infinitesimals, de la qual suma s'ha de restar, si volem saber el creixement o decreixement de la suma de forces per espais infinitesimals en el moment final del recorregut que hi ha des del punt de V^0 fins al punt de V' , les quantitats sumands fins a V^0 (altrament ens lliuraria tota la variació de potencial des de zero).

La integral representa doncs el que s'ha perdut o s'ha guanyat de forces per espais infinitesimals en el punt últim d'un segment.

2. Parlar de $\rho \cos \theta \cdot ds$ com un treball elemental, o del guany o pèrdua de potencial com un treball, no lliura nous aclariments, no seria ben bé una nova interpretació del que s'hi expressa, sinó una nova denominació més curta (treball en lloc de força per recorregut).

Referint-se a forces d'atracció o de rebuig Riemann recull, amb l'ús d'altres lletres que Gauss, que la derivada de la funció auxiliar respecte de l'espai lliura la força; en lloc de $\int \rho \cos \theta \cdot ds$ escriu F , per tant com a suma de sumands de forces, cadascuna representada per ik (r_{ik}), per espais infinitesimals, cadascun dels quals representat per dr_{ik} ; hi hauria de bell nou $F - F_0$; i llavors ens diu:

«La suma $\sum F_{ik}(r_{ik})$ ²³ és la força mecànica potencial P . L'esmentem ras i curt *potencial*. La constant d'integració ha de ser escollida de manera que $P = 0$ quan els punts estan a un distància infinita.

²² Gauss pressuposa que l'estudiós aplicarà els signes positius o negatius a les forces, i a les fórmules com convinguin, segons si es tracti d'una atracció o d'una repulsió. Per tant no explicita com és la força, i deixa la doble possibilitat per a la diferència de potencial.

El potencial és així el treball que s'executaria pel trasllat dels punts des d'una distància infinita al seu lloc actual»²⁴.

3. Riemann permet albirar que la *força potencial* és la suma de forces per espais infinitesimals, i que representa un restant o un guany. Deu ser potser per un motiu semblat que Maxwell anomena força electromotriu la diferència de potencial.

Deixant que Riemann es refereix al potencial de dos punts alhora, i retornant a l'exposició de Gauss, que suposa un lloc amb massa o càrrega elèctrica, l'acció del qual recau en un punt, donant per sobreentès que en aquest punt hi podria haver una massa o càrrega unitària, el potencial seria el d'aquest punt unitari, la diferència de potencial denotaria el que es guanya o es perd de potencial, amb les unitats absolutes dels sumands de forces per espais infinitesimals.

Llavors deu tenir una certa obvietat que un potencial absolut d'aquest punt unitari no podria ser comprès més que com una suma de sumands de forces per espais infinitesimals, i de tal manera que el primer sumand arranqués de zero, i sempre referit a un altre lloc amb massa o càrrega, que seria el causant que hi hagués potencial en algun punt.

Maxwell, que esmenta que es deu a W.Thomson, defineix el potencial de la següent manera, que «evita ambigüitat»:

²³ Aquesta suma, i el símbol $\sum$, es refereix ara al cas que hi hagi diferents masses els efectes de les qual s'han de superposar. $F_{ik}(r_{ik})$ es llegiria com el potencial resultant d'una suma de cadascuna de les forces $ik(r_{ik})$ pel corresponents infinitesimal dr_{ik} . Per tant $F_{ik}(r_{ik})$ és una funció la derivada de la qual respecte de l'espai és una força en algun punt d'aquest espai.

²⁴ Els subratllats són del text original. Simplifiquem la derivació de Riemann, que integra respecte del temps, i explicita la intervenció dels elements que s'atreuen o es repel·leixen, per tal d'assenyalar aquests trets característics. Cf. Bernhard Riemann, Karl Hattendorff, *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*, Carl Rümpler, Hannover, 1880 (2^a edició, 1^a 1875 a partir d'unes lliçons de 1861), pàg.158.

«*Definició de potencial.* El potencial en un punt és el treball que es faria en una unitat d'electricitat positiva, per les forces elèctriques, si estigués col·locada en aquest punt, sense pertorbar la distribució elèctrica, i es portés des d'aquest punt a una distància infinita: o, el que va a parar a la mateixa cosa, el treball que ha de ser fet per un agent extern per tal de portar la unitat d'electricitat positiva des d'una distància infinita (o des de qualsevol lloc on el potencial és zero) al punt donat»²⁵.

Val la pena de conservar que el potencial en un punt denota la suma dels termes constituïts pel producte d'una força i un espai infinitesimal.

5. A propòsit dels signes dels potencials.

1. La definició de Thomson ajuda a superar alguna dificultat a propòsit dels signes en tant que el punt al qual es refereix el potencial és el d'una *càrrega positiva*, la qual cosa simplifica les possibilitats.

Tanmateix convé una nova explicitació dels signes, quan se sap que són convencionals, per tal d'escollir aquella convenció que sigui la més còmoda per a poder-la interpretar físicament sense ambigüitat.

Les càrregues elèctriques s'atrauen o es repel·leixen, en la mesura que no hi entra d'altres forces. Llavors apareix el dubte de si guanyen potencial o en perden, i la solució sembla quelcom resolt físicament: l'allunyament de les que es repel·leixen palesaria una pèrdua de potencial, és a dir, del treball acumulat, però l'apropament de les que s'atrauen incrementaria el potencial, és a dir, el treball acumulat²⁶.

²⁵ James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (1^a edició 1873), vol.I article 70.

²⁶ La noció de treball, el seu nom ho insinua, contindria quelcom antropocèntric, com ho palesaria el fet d'utilitzar-se per primera vegada en un escrit de millora del rendiment de les màquines. La convencionalitat del signe en el potencial elèctric reflectiria aquell punt de mira, que no llevaria ni poc ni molt els canvis en el potencial.

La qual cosa suposa una especificació del que podia estar ja en Gauss i en altres.

2. Sense més forces que les elèctriques, el punt amb una unitat positiva de càrrega gaudeix de *potencial positiu* respecte d'una càrrega positiva.

I gaudeix de *potencial negatiu* davant d'un càrrega negativa.

3. Atenent l'especificació del potencial es copsa l'abast del que la definició de Thomson vol plantejar: en una diferència de potencial hi ha la suma de forces per espais infinitesimals; per tant fent que sigui nul un específic terme de la diferència, i excloent una superposició de càrregues, l'altre denotaria tots els sumands de forces per espais infinitesimals.

Assumint com a positiva la força *elèctrica* que augmenta la distància, la unitat de càrrega positiva respecte d'un càrrega positiva, i mentre un potencial positiu aniria decreixent a mesura que se n'allunyés (decreixements infinitesimals de potencial, el signe de cada decreixement seria negatiu), una força positiva traslladaria la unitat de càrrega des d'un lloc potencial a un lloc nul, fent perdre el corresponent potencial, i caldria un treball d'un *agent extern* per a dur-la des del potencial nul a on es trobés, amb una força creixent igual a l'anterior a través d'un espai, que faria recuperar el potencial positiu elèctric, amb increments de potencial²⁷.

²⁷ Considerant que la càrrega q positiva, i que $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, llavors:

$$\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1)$$

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ seria el potencial elèctric positiu que es perdria. Per tant el potencial en el punt r era $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ quan q és positiu.

També:

$$\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - 0, \quad (2)$$

el potencial elèctric positiu que es guanyaria.

Assumint com a negativa la força *elèctrica* que disminueix la distància, la unitat de càrrega positiva respecte d'una càrrega negativa, i mentre un potencial negatiu aniria creixent a mesura que se n'apropés (creixements de potencial, el signe de cada creixement seria negatiu), una força negativa traslladaria la càrrega des d'un lloc de potencial nul a una posició fent recuperar el corresponent potencial, i caldria el treball d'un *agent extern* per a dur-la des d'on és cap a un lloc on el potencial fos nul, amb una força decreixent igual a l'anterior a través d'un espai, que faria perdre increments infinitesimals de potencial negatiu²⁸.

4. Hi ha un canvi de signes entre forces i les derivades del potencial (*d'aquí les assumpcions del signe de les forces i potencials*) tant per la interpretació física com per la resultant de derivar els components de la força, és a dir, usant les lletres de Gauss

$$\rho \cos \theta = -\frac{dV}{ds}.$$

I en termes dels components d'una força en la direcció dels eixos cartesianes:

$$X = -\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz}.$$

28

$$\int_{\infty}^r -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - 0, \quad (3)$$

el potencial elèctric negatiu que s'ha guanyat fins a r . Per tant el potencial en el punt r és $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ quan q és negativa.

També:

$$\int_r^{\infty} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right), \quad (4)$$

el potencial elèctric negatiu que es perdria seria $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Car a partir de $\pm \rho \cos \theta$ es ressegueix que quan la força és positiva el potencial decreix, i creix quan la força és negativa, com es pot seguir a (1) i a (3)²⁹

6. El potencial com a concepte teòric.

La força essent un model formal, les recerques de Coulomb suggerien una expressió de la força inversament proporcional al quadrat de les distàncies: els experiments foren l'ocasió d'una llei teòricoformal que permetia la conceptualització de la càrrega. La llei és experiencial en l'accepció que l'experiència la suggeria.

Però el treball físic s'oferia així mateix com un model formal (inspirat en l'experiència). La connexió d'un fet i de l'altre ens aconduïx ara a notar a faltar d'altres reflexions.

1. Per exemple, la matemàtica, la geometria a banda, tracta el discriminat o, millor, hauríem d'interpretar-la així quan volem ponderar el que fa: car si en els seu nivells elementals allò que és u ho és particularment de quelcom natural, després aprenem sobre el que hem après les vegades que convingui i amb les complicacions del cas.

Si el fet que això és u , aquest és el dos, etc., són llenguatges, les expressions formals independentment del seu nivell sols poden interpretar-se com a llenguatges.

És així com s'enllaça la llei de Coulomb amb el treball elèctric en la forma de potencial. Hi ha un descabdellament teòric a nivell ideal, mentre la descomposició d'una qualsevol magnitud en la direcció dels eixos, o en qualsevol altra direcció, es comprèn tal i com s'esdevé amb la força³⁰.

2. Quan diem «hi ha una pedra» o «n'hi ha dues» no enunciem sols la quantitat, sinó de què ho és. Es tracta d'un llenguatge que *inclou* quantitat, però no sols això. El llenguatge formal que no es

²⁹ A (3) creix el potencial *negatiu*. (2) i (4) sols reblen (1) i (3), representarien regular respecte (1) i (3), cosa que, quan sols hi ha forces elèctriques, es troba fora de qüestió.

³⁰ Una aproximació a la força. Estudis de filosofia de la ciència QF41.

manté sols en aquest nivell expressa de què es tracta: una força pot gaudir d'una expressió quantitativa, però la seva expressió és de força, etc. El potencial manté una significació teòrica física perquè no s'abandona, des d'un començament, que s'està estudiant les forces elèctriques i els espais compromesos.

Per això com hom es manté en l'expressió formal hi ha sols un llenguatge formal, la qual cos vol dir que, com a llenguatge, és un d'incomplet.

3. El potencial és un concepte teòric en l'accepció d'un exercici de dos models formals que es troben a nivell ideal, i que s'ha descabdellat els entrellaçaments discriminadors entre l'un i l'altre mentre hi ha un llenguatge fisicomatemàtic. Certament no s'hi exclou mer càlcul degut al nostre abast limitat, que es troba subsumit, com els mateixos models formals, dins d'un nivell ideal, que també es pot dir pel que fa al quantitatiu. Al cap i a la fi la formalitat matemàtica convergeix amb la idealitat.

IV

LA INTENSITAT DEL CAMP

Després del potencial la noció bàsica elèctrica és el camp. En direm quelcom en atenció al nostre punt de mira, que tafaneja en allò ja sabut per a anotar alguns afers.

1. L'acció elèctrica en un medi.

El medi separa dos cossos electrificats. Com diu Maxwell, Faraday veia línies de força creuant tot l'espai on els matemàtics veien centres de força actuant a distància; hi veia un medi on els altres sols hi consideraren distàncies; cercava el lloc dels fenòmens en accions reals que pertocaven el medi, mentre els altres els basaven en l'atracció a distància, etc. En efecte, es pot

«explicar la teoria ordinària de l'acció elèctrica, que la considera dependent només dels cossos electrificats, i de la seva posició relativa, sense tenir en compte cap fenomen que pugui tenir lloc en els medis que intervenen. D'aquesta manera establirem la llei del quadrat invers, la teoria del potencial, i les equacions de Laplace i Poisson. A continuació considerarem les càrregues i els potencials d'un sistema de conductors electrificats connectats per un sistema d'equacions, els coeficients de les quals poden ser suposats que són determinats per experiment en aquells casos en què els nostres mètodes matemàtics actuals no són aplicables, i a partir d'aquests [coeficients] determinarem les forces mecàniques que actuen entre els diferents cossos electrificats».

Ara bé:

«Podem concebre la relació física entre els cossos electrificats, ja sigui com a resultat de l'estat del medi que intervé, o com a resultat d'una acció directa entre els cossos electrificats a distància. Si adoptem

aquesta última concepció, podem determinar la llei de l'acció, però no podem anar més enllà especulant sobre la seva causa. Si, d'altra banda, adoptem la concepció de l'acció a través d'un medi, això ens portarà a investigar la naturalesa d'aquesta acció en cada part del medi»³¹.

Es podrà defensar que l'acció elèctrica no és una acció directa entre cossos a una distància, sinó que s'exerceix per mitjà d'un medi entre els cossos. Independentment de com és aquesta acció i, abraçant que matemàticament hi hagi una identitat entre les dues interpretacions, sembla una obvietat que, si un cos amb càrrega és capaç d'afectar-ne un altre, ha d'haver-hi algun tipus d'acció a través del medi (això també valdria per a les forces gravitatòria i magnètica), i que s'hi trobi també una modificació dels efectes elèctrics: d'aquí, per exemple d'això últim, es defineix la rigidesa elèctrica d'un dielèctric o la seva permitivitat relativa respecte del buit.

La simplificació de l'estudi de les forces elèctriques guanya un altre motiu prou important quan es considera que no sols el potencial pot trobar un valor en un qualsevol punt, on hi hagi una càrrega unitària positiva, sinó que, a més de nosaltres ja saber què representa el potencial, es pot establir un model geometritzant pel qual l'acció elèctrica es troba escampada des d'un cos electrificat, de manera que no sols hi trobem un potencial a cada punt, sinó àmbits d'acció elèctrica, en un qualsevol lloc del qual hi ha potencial i per tant també possible força elèctrica. La circumscripció, a efectes del seu estudi, d'aquesta força dugué a la intensitat elèctrica d'un camp, o simplement a parlar del camp.

2. La intensitat de camp.

El treball de Gauss deia:

«Disegnem amb a , b , c , les coordenades rectangulars d'una punt material, des del qual s'exerceix una força repulsiva o atractiva; la

³¹A *Treatise on Electricity and Magnetism*, vol.I, article 59.

força acceleradora mateixa en un punt O indeterminat, les coordenades del qual són x, y, z , amb

$$\frac{\mu}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} = \frac{\mu}{rr} \gg.$$

Suposa un lloc d'origen de la força des de (a,b,c) , amb una massa o una càrrega μ , que actua en un punt (x,y,z) , que se sobreentén d'una massa o càrrega unitària. S'assumeix que la força elèctrica es presenta com una magnitud contínua respecte de càrregues i distàncies.

En Gauss es pot considerar la força elèctrica entre una càrrega i una càrrega unitària, que en el text següent està representada per e , i més enllà ho suposa sense expressar-ho, tal com ho fa Gauss:

«Per simplificar el procés matemàtic, és convenient considerar l'acció d'un cos electrificat, no en un altre cos de forma qualsevol, sinó en un cos indefinidament petit, carregat amb una quantitat indefinidament petita d'electricitat, i col·locat en qualsevol punt de l'espai al qual l'acció elèctrica s'estén. Fent la càrrega d'aquest cos indefinidament petita, fem insensible la seva acció pertorbadora sobre la càrrega del primer cos.

«Sigui e la càrrega del cos petit, i la força que actua sobre seu, quan es col·loca en el punt (x, y, z) , sigui Re , i designem els cosinus de direcció de la força amb l, m, n , llavors podem anomenar R la intensitat elèctrica resultant en el punt (x, y, z) .

«Si X, Y, Z denota els components de R , llavors

$$X=Rl, \quad Y=Rm, \quad Z=Rn.$$

«En parlar de la intensitat elèctrica resultant en un punt, no necessàriament insinuem que s'exerceixi cap força allà, sinó només que si es col·loca un cos electrificat allà, una força Re actuaria sobre seu, on e és la càrrega del cos.

«*Definició.* La intensitat elèctrica resultant en qualsevol moment és la força que s'exerciria sobre un cos petit carregat amb la unitat d'electricitat positiva, si es col·loqués allí sense pertorbar la distribució real de l'electricitat.

«Aquesta força no només tendeix a moure un cos carregat d'electricitat, sinó també a moure l'electricitat dins del cos, de manera

que l'electricitat positiva tendeix a moure en la direcció de R i l'electricitat negativa en la direcció oposada. D'aquí que la quantitat R també s'anomena la Intensitat Electromotriu al punt (x, y, z) »³².

Deu ser la primera vegada que es definia així el que avui s'anomena *intensitat de camp* (Maxwell parla d'intensitat elèctrica i intensitat electromotriu), o simplement *camp*, i que es denota amb E (R en el text). Hi ha l'esment al cos on és la càrrega unitària, i la nota de l'autor fa correspondre E i g . S'hi afegeix que no és necessari que una força s'estigui exercint en un punt amb càrrega unitària i, prou important, explica els fenòmens d'influència elèctrica.

E seria una força que actuaria sobre una càrrega unitària positiva; aquesta força, se l'acceptaria com a mitjà vàlid per a un qualsevol fenomen elèctric.

El camp facilitaria l'estudi en l'acceptació que el fet de denotar-lo per una lletra l'apropa a les forces mecàniques, i fomenta un estudi analític explicatiu i prospectiu més àgil.

Car, amb el camp, com a concepte teòric, es guanya una simplificació de la força entre dos cossos carregats per tal de trobar-la (considerar-la) sense més complicacions arreu del camp elèctric, mentre s'evita un estudi enrevessat des de forces entre cossos col·locats en l'espai. Una creació teòrica reeixida.

3. El camp i el potencial.

1. Seguint el que escriguérem en termes dels components d'una força, la del camp, en la direcció dels eixos cartesianes:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}, \quad E_y = -\frac{dV}{dy}, \quad E_z = -\frac{dV}{dz},$$

per tant:

$$E = \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

³² *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol.I, article 68.

és a dir, hi ha una manera àgil de passar d'intensitats a potencials, i a l'inrevés.

Raonant-hi una mica amb *un model narratiu* és fàcil d'assumir que un conductor elèctricament en equilibri no gaudiria d'intensitat de camp dins seu. Això està d'acord amb la teoria que diu que, si el camp, una força, val zero, la seva integral, el potencial, seria una constant, que fora el potencial del conductor; i la seva superfície es descriuria com una superfície equipotencial.

Repetint el que diguérem, ara des del camp, una unitat de càrrega positiva repel·lida per un centre positiu tendiria a moure's des d'un lloc de potencial positiu més gran (té una suma més gran d'intensitats per espais infinitesimals per a descabdellar) a un de potencial més petit, o a un lloc de potencial negatiu (és a dir, on la intensitat, la força, fos d'atracció).

La unitat de càrrega positiva atreta per un centre negatiu s'assumeix que es mou també des d'un lloc de potencial negatiu més gran (una suma més gran de factors negatius) a un lloc de potencial més petit perquè aniria perdent potencial.

2. Un conductor en equilibri elèctric gaudiria d'un potencial constant. Aquí no hi hauria camp per l'estat elèctric d'equilibri, la diferència de potencial entre dos punts seus seria nul·la, però el conductor respecte un altre cos conductor diferent permet de defensar que s'hi ofereix una diferència de potencials, i interpretaríem aquests potencials com els altres potencials.

En aquests casos hi hauria la particularitat d'un potencial sense camp dins del conductor, però eficient més enllà seu.

Perquè s'establís aquesta relació entre dos conductors diferents en equilibri elèctric, caldria el respectiu potencial i la càrrega corresponent.

4. El potencial degut a un sistema elèctric.

1. Amb tot això s'avança en la direcció de lliurar una expressió formal del potencial complet d'un punt. Una càrrega q com a origen

del camp (x,y,z) , i essent r la seva distància respecte del punt (x,y,z) , tenim (ometent signes i el $4\pi\epsilon_0$ actual):

$$V = \int_{r/\infty}^{\infty/r} E dr = \int_{r/\infty}^{\infty/r} \frac{q}{r^2} dr = \left[\frac{q}{r} \right]_{r/\infty}^{\infty/r}.$$

Car el potencial expressa els sumands de forces i espais infinitesimals, per tant el treball que porta la unitat positiva des de l'infinit (o des del tocar el terra) a r , que equival al que entra en joc per a portar-la des de r a l'infinit (o a toca el terra), tal i com ho hem indicat dalt en parlar del potencial.

Per a portar, q positiva, la unitat positiva de càrrega des de r a ∞ – cas (1) establert dalt –, caldria desfer aquest mateix treball amb forces positives, amb la qual cosa hi hauria una pèrdua de potencial³³.

Quan q fos positiva el treball que aporta la unitat positiva de ∞ a r – cas (2) – seria la resultant de sumes de forces per espais infinitesimals, i llavors es guanyaria treball, potencial³⁴.

Si q fos negativa i calgués passar la unitat positiva de ∞ a r – cas (3) – hi hauria una força negativa que fes passar de ∞ a r , amb el corresponent guany de potencial³⁵.

Si q fos negativa el treball que porta la unitat positiva de r a ∞ – cas (4) – fora el sumatori de forces per espais infinitesimals, s'hauria perdut potencial³⁶.

Es comprèn que sovint no es manifestin els límits de la integració per a deixar oberta la forma d'interpretar-ho.

Per tant un potencial positiu ens diu que la força elèctrica allunyarà la carrega positiva en una raó del que s'expressa quantitativament (i segons els sumands), un potencial negatiu ens diu

³³ El potencial en el punt era doncs $\frac{q}{r}$, si ho ha d'haver perdut, i q és positiva.

³⁴ La seva integral fora llavors el total del potencial positiu que s'ha guanyat, que fora, és clar, $\frac{q}{r}$. Per tant el potencial en un punt és $\frac{q}{r}$, si q és positiva.

³⁵ El potencial que s'ha guanyat seria $-\frac{q}{r}$, la qual cosa vol dir que és $-\frac{q}{r}$ en el punt, si q és negativa.

³⁶ El potencial en el punt seria $-\frac{q}{r}$, és a dir, un potencial negatiu, que s'hauria perdut, si q és negatiu.

que la força elèctrica atraurà la carrega positiva (i segons els sumands) en una raó del que s'expressa quantitativament.

És a dir, un potencial positiu és capacitat de treball en una direcció oposada al seu origen, i un potencial negatiu és capacitat de treball en la direcció del seu origen, en els dos casos respecte de la unitat positiva de càrrega.

I per a arribar a aquest potencial calen forces oposades als respectius casos, el treball per a dur la unitat positiva des de ∞ a r quan el camp és positiu, o de dur-la de r a ∞ quan el camp és negatiu³⁷.

2. El camp, el poden engendrar diferents càrregues, i en diferents disposicions: en tots els casos el potencial del sistema seguirà la suma de les integracions corresponents, que corresponen a les respectives integrals.

El potencial essent un escalar, la suma corresponent de potencials positius i negatius recau on es consideri, la qual cosa no destorba que el camp resultant s'hagi de calcular independentment d'això.

³⁷ Pot semblar una paradoxa que el potencial negatiu vagi augmentant, en apropar-se a l'origen del camp, quan el camp és negatiu i la unitat positiva, per tant que s'atraguin: però es tracta que la força d'atracció augmenta en cada espai infinitesimal. En el cas d'un camp positiu el potencial positiu va creixent gràcies al fet que augmenta la força de repulsió a cada espai infinitesimal, quan s'apropa a l'origen del camp.

V

ALGUNES FÓRMULES CONEGUDES

1. L'article de Gauss esmentat dalt demostra l'equació de Poisson i la de Laplace, primer per a un punt dins d'una esfera, és a dir, quan el punt respecte del qual es considera el potencial es troba enmig d'aquest cos carregat o, en un segon cas, fora, on no hi ha càrrega. Després demostra el teorema de forma general, quan el punt es troba dins de la càrrega actuant o, en un segon cas, fora. En l'equació de Laplace la densitat és zero, en la de Poisson s'hi troba alguna densitat elèctrica. Com diu Gauss abans de demostrar-los en la forma general, i referint-se a la de Poisson:

«El resultat que es troba en l'exemple d'abans és sols un cas individual d'un teorema general, segon el qual, si un punt O es troba en l'interior d'una massa actuant, el valor de $\frac{ddV}{dx^2} + \frac{ddV}{dy^2} + \frac{ddV}{dz^2}$ és igual al producte de -4π per la densitat que hi ha en O . La manera satisfactòria de fonamentar aquest important teorema sembla ser la següent...»³⁸

Parlant d'aquestes equacions, Maxwell indica com cal interpretar-les:

«Podem expressar l'equació de Poisson en paraules dient que la densitat elèctrica multiplicada per 4π és la concentració del potencial. On no hi ha electrificació, el potencial no té concentració, i aquesta és la interpretació de l'equació de Laplace»³⁹.

³⁸ *Allgemeine Lehrsätze*, pàgs.10-11.

³⁹ *A Treatise*, art.77. És a dir, es tracta de la segona derivada del potencial, i expressen (s'interpreten com) la densitat elèctrica quan es considera què és una derivada.

Per això afegeix que, essent constant V dins d'un conductor, la densitat elèctrica de volum dins seu ha de ser zero, i si hi ha càrrega ha de trobar-se a la superfície, afer molt experimentat.

L'exemple palesa que la compatibilitat entre l'expressió teòrica i el que els experiments van ensenyant asseguraria que el camí que s'ha emprès des de Coulomb i d'altres, a propòsit de les forces elèctriques, faria comprendre fets coneguts, i els que es van coneixent, de manera que permetria ajustar experiència, expressió formal i la interpretació, fins i tot anar més enllà.

2. Per exemple, podem provar de demostrar que hi ha un salt, des d'un costat a l'altre d'una superfície carregada elèctricament, del quocient diferencial del potencial respecte de la normal a les dues cares de l'esmentada superfície, que Riemann expressa per:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+\epsilon} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-\epsilon} = -4\pi\rho$$

on ρ és la densitat de càrrega, p la normal en un punt que es considera en un infinitesimal $+\epsilon$ en la direcció positiva de la normal, i $-\epsilon$ en la negativa⁴⁰. El càlcul es feu tenint un medi igual en els dos costats de la superfície, però la fórmula val igual quan es tracta de dos medis, canviant V per V' i V'' respectivament, i p per p' i p'' .

La fórmula s'aplica per al pas d'un cantó a l'altre (excepte per al mateix punt de la superfície).

3. L'estudi de les intensitats respectives, en els dos costats d'una superfície, permet també servir d'exemple d'aquesta manera d'apropar-se als fenòmens elèctrics, que expressen així mateix un càlcul previsor.

Assumim que la càrrega espacial d'un cos amb densitat constant val $\varepsilon = \iiint \rho dx dy dz$.

⁴⁰ És el que més avall Maxwell anomena «equació característica». La negació del diferencial $\left[-\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-\epsilon}\right]$ rau que Riemann explicita el signe de les forces (intensitats).

Volem saber, amb les consideracions formals, quina és la força que actuaria en la superfície del cos electrificat.

Prenem la normal a un punt donat de la superfície⁴¹ com l'eix de les x (els altres dos components del camp no són discontinus), component que faria

$$F_x = \iiint \rho E_x dx dy dz;$$

després aïllem ρ de l'equació de Poisson, i operant una mica amb dos valors de x , des de $x = x_1$ a $x = x_2$, cadascun a un cantó oposat de la superfície, assumint com si E no fos discontinu en la superfície mentre passa de x_1 a x_2 , de manera que l'estudi lliuraria un resultat que podríem establir correcte quan $x_1 = x_2$, i la superfície no tingués gruix. S'arriba a:

$$F_x = \iint \frac{1}{2} (E_{x_1} + E_{x_2}) \sigma dy dz$$

on $dy dz$ és l'element de la superfície, σ la densitat superficial (un límit a partir de la de volum), i E_{x_1} i E_{x_2} denoten els camps en les dues cares de la superfície, fent atenció que la suma els pren com a quantitats positives.

Per tant sobre un element de la superfície carregada actua una força, el seu component normal a la superfície integra la mitjana aritmètica de la intensitat elèctrica en la normal dels dos costats de l'element de la superfície.

4. L'anàlisi, per exemple, permet aplicar-lo a la superfície d'un conductor quan ha rebut una càrrega, que es troba en la seva superfície (dintre no en pot tenir, el seu camp és nul i gaudeix d'un potencial constant).

Per tant la intensitat fora del conductor és en la direcció de la normal i igual a $4\pi\sigma$, i actuant cap a fora, cosa que és coneguda com a llei de Coulomb, que en va fer la descripció dels seus elements (però la relació $E = 4\pi\sigma$ és de Poisson).

⁴¹ Es parla de punts carregats, àdhuc de línies, per a cossos de dimensions, o de secció, menyspreables.

Així la intensitat elèctrica en un punt exterior al conductor ha de ser normal i, seguint l'equació de Poisson, igual a $4\pi\sigma$.

El conjunt admès, la fórmula anterior, i que $\sigma = \frac{E_x}{4\pi}$, restaria:

$$F_x = \iint \frac{1}{2} E_{x_1} \sigma dydz = \iint \frac{1}{8\pi} E_{x_1}^2 dydz,$$

per on podem estudiar la intensitat en un punt al llarg de la normal externa a la superfície d'un conductor, ja sigui la càrrega positiva o negativa.

5. La constant dielèctrica a tenir en compte.

En aquestes reflexions elementals, no hi ha de faltar un apunt a propòsit del medi dielèctric, que modifica totes les fórmules que expressen algun fenomen que es mou en medis que no són el buit. Com diu Maxwell a l'article 83a del *Treatise*, de títol «*Sobre la capacitat inductiva específica*»:

«En la investigació anterior de les integrals de superfície hem adoptat la concepció ordinària d'acció directa a una distància, i no hem tingut en compte cap efecte dependent en la naturalesa del medi dielèctric en el qual les forces són observades.

«Però Faraday ha observat que la quantitat d'electricitat induïda per una força electromotriu donada en la superfície d'un conductor que un dielèctric limita no és la mateixa per tots els dielèctrics. L'electricitat induïda és més gran per a la majoria de dielèctrics sòlids i líquids que per a l'aire i els gasos. Per tant, es diu que aquests cossos tenen una major capacitat inductiva específica que l'aire, que es va adoptar com a medi estàndard.

«Podem expressar la teoria de Faraday en llenguatge matemàtic dient que en un medi dielèctric la inducció a través de qualsevol superfície és el producte de la intensitat elèctrica normal pel coeficient de capacitat inductiva específica d'aquest medi. Si denotem aquest coeficient per K , llavors en cada part de la investigació de les integrals de superfície hem de multiplicar X , Y , i Z per K , de manera que l'equació de Poisson es converteixi en

$$\frac{d}{dx} \cdot K \frac{dV}{dx} + \frac{d}{dy} \cdot K \frac{dV}{dy} + \frac{d}{dz} \cdot K \frac{dV}{dz} + 4\pi\rho = 0.$$

«A la superfície de separació de dos medis les capacitats inductives dels quals són K_1 i K_2 , i en els quals els potencials són V_1 i V_2 , es pot escriure l'equació característica així

$$K_1 \frac{dV_1}{dv_1} + K_2 \frac{dV_2}{dv_2} + 4\pi\sigma = 0$$

on v_1 , v_2 , són les normals dibuixades en els dos medis, i σ és la veritable densitat de superfície en la superfície de la separació ; és a dir, la quantitat d'electricitat que de fet hi ha en la superfície en forma de càrrega, i que pot ser alterada només pel transport d'electricitat a o des del lloc».

El que Faraday anomenà la capacitat inductiva específica K , o la constant dielèctrica (cf. *Treatise* §52), i avui també permitivitat relativa ε_r (l'absoluta $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, ε_r sempre més gran que la unitat), es pot definir com la raó de la capacitat d'un condensador quan el dielèctric entre les plaques és una substància determinada, respecte quan el medi és el buit.

Totes les fórmules es veuen afectades per una tal permitivitat, que les multiplica o les divideix, i que s'aconsegueix mesurar per mitjà de l'experimentació. La de l'aire és pràcticament la unitat, la de la mica, paper, parafina, vidre, porcellana, etc., totes valen més.

La cerca d'aquests valors assenyalava que les consideracions que s'han dut a terme des d'unes nocions de força elèctrica amb una expressió matemàtica proporcional a certes quantificacions s'ajusten a través de noves observacions que permeten estendre l'expressió formal a allò experimentat o interpretat d'una observació.

VI UNA DIGRESSIÓ. LA INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

Les fórmules elementals de l'electricitat s'obtenen per camins diferents.

Agafarem pel seu interès la integral de superfície, resolta per Gauss, tal i com Riemann-Hattendorff la presenten.

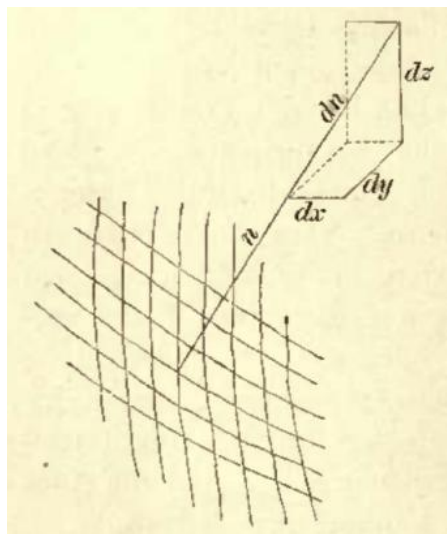
Es tracta de la integral de superfície d'una força que segueix la llei del quadrat invers de la distància i, com va fer Gauss, val per la gravetat, l'electricitat i el magnetisme.

«§11.

La integral de superfície $\int \frac{1}{r^2} \cos(rn) d\sigma$. Proposició de Gauss.

Denotem amb T un espai arbitrari, però limitat completament, i amb $d\sigma$ un element de la seva superfície. En un qualsevol punt d'aquest element superficial aixequem, cap a dins de l'espai T , la normal, i assenyallem un punt seu (x, y, z) , a una distància n del peu de la normal. Sigui permès d'escollir unes tals dues quantitats q i s que tenen un valor i sols un en un qualsevol punt de la superfície, i que, al revés, una qualsevol combinació de valors de q i s sols pertany a un punt determinat de la superfície. La situació del punt (x, y, z) deixa lliurar-se doncs pel fet que es digui quins valors tenen les quantitats q i s en el peu de la normal i quina és la llargada n per la normal. Per tant s'ha de mirar cadascuna de les tres coordenades x, y, z com una funció de tres variables independent q, s, n . Conservem els valors de q i s , i concedim a la tercera variable l'increment dn , llavors s'obté un segon punt sobre la mateixa normal, les coordenades rectangulars del qual són $x + dx, y + dy, z + dz$ (cf. el gràfic), i especialment $dx = \frac{\delta x}{\delta n} dn$, $dy = \frac{\delta y}{\delta n} dn$, $dz = \frac{\delta z}{\delta n} dn$. Fàcilment es reconeix que dx, dy, dz , són les projeccions de dn sobre els eixos coordinats rectangulars. Denoten amb $(xn), (yn), (zn)$, els angles que la direcció

de la normal tanca amb les direccions positives de x , de y i de z , llavors es dona



$$\frac{\delta x}{\delta n} = \cos(xn), \frac{\delta y}{\delta n} = \cos(yn), \frac{\delta z}{\delta n} = \cos(zn).$$

Ara assumim tota la massa atractiva, que es pot prendre igual a la unitat, concertada en un punt (a, b, c) , que ha d'estar dins o fora, o en la superfície, de l'espai T . El punt (a, b, c) exerceix sobre el punt (x, y, z) una atracció, els components de la qual, en la direcció de n creixent, poden ser designats amb N . Es troba

$$N = \frac{1}{r^2} \cos(rn). \quad (1)$$

on r designa la distància del punt (x, y, z) al punt (a, b, c) , per tant

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2. \quad (2)$$

La línia r va del punt (x, y, z) al punt (a, b, c) , i amb (rn) es comprèn l'angle que aquesta direcció tanca amb la del creixent n . Per al cosinus d'aquest angle s'obté

$$\cos(rn) = \frac{\delta r}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\delta r}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta n} + \frac{\delta r}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta n} = \frac{\delta r}{\delta n}.^{42}$$

Amb $d\sigma$ es designa un element de la superfície de T , i el punt (x, y, z) ha de trobar-se en la línia que limita aquest element, quan per a aquest punt $n = 0$. Es tracta de calcular el valor de la integral

$$\int N d\sigma = \int \frac{1}{r^2} \cos(rn) d\sigma \quad (3)$$

quan la integració s'estén per tota la superfície de T ⁴³. Amb aquesta finalitat considerem $d\sigma$ com la superfície que fa de base d'un conus, la punta del qual rau en el punt (a, b, c) . La superfície cònica es produeix quan es deixa lliscar un radi vector mòbil que surt de (a, b, c) al llarg del límit $d\sigma$. Descriguem ara amb (a, b, c) com a punt mitjà, amb radi r , una superfície esfèrica; llavors el conus construït en tallarà un element superficial, que pot veure's com la projecció rectangular de $d\sigma$. Llavors, donada la dimensió infinitament petita, s'ha d'estimar tant $d\sigma$, com l'element de la superfície esfèrica, com a superfícies planes. Els productors del conus són doncs els radis projectors. Com a radis són totalment rectangulars a la superfície esfèrica. Mantenim llavors l'element de la superfície esfèrica, mentre multipliquem $d\sigma$ pel cosinus de l'angle agut⁴⁴ que les normals dreçades a l'esfera en el punt (x, y, z) i a l'element superficial $d\sigma$ formen, és a dir, pel valor absolut de $\cos(rn)$. L'element que el conus talla de la superfície esfèrica de radi r és consegüentment

$$\pm d\sigma \cdot \cos(rn),$$

⁴² Establert, per exemple, que $\frac{\delta x}{\delta n}$ és $\cos(xn)$, etc., llavors es troba $\cos(rn)$ seguint les passes de la nota 15.

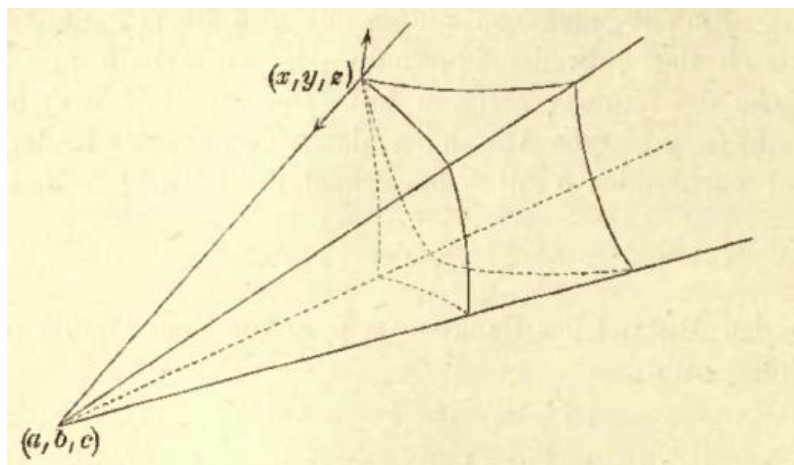
⁴³ La integral mereix alguna observació. Es tracta de la superfície del límit de T , de la qual forma part $d\sigma$.

Per a comprendre ben bé el que es fa, s'ha de tenir present que hi ha un canvi de punt de vista: fins ara era el punt (x, y, z) a n , en la direcció cap a dins de l'espai T , una normal.

Tanmateix la integral agafa el punt de vista de (a, b, c) , i ara es demana el valor de les forces que afecten tota la superfície. En aquest cas és millor imaginar-se per començar (hi haurà d'altres supòsits) que (a, b, c) està dins de l'espai T , i n un normal a la superfície i (x, y, z) un punt en la normal.

Des d'aquí se segueix el que continua.

⁴⁴ De seguida es veurà que aquest angle pot ser agut o obtús.



i hi ha signe negatiu o positiu segons si el radi vector que va des de (a, b, c) cap al lloc (x, y, z) entra en l'espai T o en surt. La correcció d'una tal determinació de signes és fàcil de copsar-la. La direcció de n creixent forma un angle agut amb totes les línies rectes que es tiren des del punt (x, y, z) cap a l'interior de l'espai T , i un angle obtús amb totes les línies que van des del punt (x, y, z) cap a fora⁴⁵. El radi vector tirat des de (a, b, c) cap a (x, y, z) és, però, directament contraposat a la direcció de r ⁴⁶.

⁴⁵ D'una banda el punt (a, b, c) pot estar dins de l'espai, i dur endavant les consideracions anteriors. En aquest cas el radi vector, que és normal a l'esfera, i n , que és normal a la superfície, formen un angle agut.

D'una altra, en iguals circumstàncies (una superfície de l'espai T , una n normal cap a dins, (x, y, z) un punt seu), ara es considera que el punt (a, b, c) és fora de l'espai: en aquest cas n és la normal a la superfície $d\sigma$ en la direcció cap a dins de l'espai T . I el radi vector prové de fora i és normal a l'esfera, per tant r i el radi vector formen un angle obtús.

⁴⁶ Abans s'havia dit «la línia r va del punt (x, y, z) al punt (a, b, c) ».

Col·loquem ara en el punt (a, b, c) , com a punt central, una segona superfície esfèrica amb la unitat de llargada com a radi⁴⁷, llavors el conus en talla, d'aquesta segona esfera, un element $d\Sigma$, el contingut del qual es calcula

$$d\Sigma = \pm \frac{1}{r^2} \cos(rn) d\sigma. \quad (4)^{48}$$

El conus tot just tractat pot trobar més vegades la superfície de l'espai T . Llavors $d\Sigma$ és la projecció central de tots els elements-superfícies retallats, i en l'equació (4) val el signe negatiu o positiu segons si l'element $d\sigma$ ragui en un lloc d'entrada o de sortida.

El punt (a, b, c) es troba primer a dins de l'espai T . Llavors el conus surt més vegades que una.

Cada lloc de sortida i d'entrada lliura una aportació a la integral (3), i veiem per l'equació (4) que aquesta aportació és igual a $+d\Sigma$ en cada lloc de sortida, i igual a $-d\Sigma$ en tots els llocs d'entrada⁴⁹. El conjunt de totes les aportacions que els elements-superfícies retallen per mitjà del conus és doncs

$$= d\Sigma.$$

⁴⁷ L'interès d'aquesta esfera de radi unitari es deu al comportament de les forces que són inversament proporcionals al quadrat de la distància dels punts on s'apliquen.

El valor de la inducció, per exemple, en un punt és inversament proporcional al quadrat de la distància del seu origen, i alhora una qualsevol àrea superficial és una funció directament proporcional al quadrat de la distància; per tant la inducció correspon a la part que pertoca de 4π . Al cap i a la fi és el que també es desprèn de Maxwell, *A treatise*, vol.1 §76.

⁴⁸ Si el conus tallava, de la superfície esfèrica de radi r , $\pm d\sigma \cdot \cos(rn)$, la mateixa part diferencial des del punt de mira d'un radi r vegades més petit és el que diu el text, que es troba per una simple regla de tres. Notem que ens apropem a solucionar (3), i que el conjunt s'ha de considerar sobretot una resolució *matemàtica* de la integral de superfície..

⁴⁹ (a, b, c) es troba «dins», i la línia que l'uneix a (x, y, z) es tira cap a l'exterior de l'espai, «surto», mentre r i n fan un angle agut.

(a, b, c) es troba «fora», i la línia que l'uneix a (x, y, z) es tira cap a l'interior de l'espai, «entra», i r i n fan un angle obtús.

car l'aportació de cada lloc d'entrada lleva l'aportació del lloc de sortida previ, i roman sols l'aportació del darrer lloc de sortida. El valor de la integral (3) és doncs

$$= \int d\Sigma, \quad (5)$$

quan estenem això darrer sobre tots els llocs de l'esfera de radi 1, que són projeccions dels elements-superfície de l'espai T . Mentre el punt ragui a l'interior de l'espai T , el conus elemental no pot travessar cap element de la superfície de l'esfera de radi 1 sense retallar també en algun lloc la superfície de T . Això és, la integral (5) s'ha d'estendre per tota la superfície de l'esfera, i per consegüent tenim

$$\int \frac{1}{r^2} \cos(rn) d\sigma = 4\pi, \quad (6)$$

quan el punt (a, b, c) rau a l'interior de l'espai T .

Segonament prenem el punt (a, b, c) fora de l'espai T , llavors el conus elemental, o no abasta la superfície de T , o hi entra tantes vegades com en surt. Cada lloc d'entrada lliura a la integral (3), també aquí, l'aportació $-d\Sigma$, i cada lloc de sortida l'aportació $+d\Sigma$. Per tant es lleven les aportacions que pertoquen a cada particular conus elemental, i tenim

$$\int \frac{1}{r^2} \cos(rn) d\sigma = 0, \quad (7)$$

quan el punt (a, b, c) rau a l'exterior de l'espai T ⁵⁰.

Tercerament quan el punt (a, b, c) està pres en la superfície de l'espai T , i en un lloc contínuament corbat, llavors el pla tangencial d'aquest punt talla la superfície esfèrica de radi 1 en dues semiesferes. L'una semiesfera, l'abasten totes els conus elementals, els engendrators dels quals inicialment recorren l'interior de l'espai T . L'altra semiesfera, l'abasten tots els conus elementals, els engendrators dels quals inicialment rauen a l'exterior de l'espai T . En consideració de la primera el punt (a, b, c) s'ha de mirar com estant a

⁵⁰ S'ha resolt la integral per a una esfera de radi unitari. La qual cosa implica que s'ha resolt la integral (6) per a un qualsevol afer independentment de com l'hem trobada.

l'interior de l'espai T , en consideració de la darrera com estant a l'exterior. Per consegüent obtenim

$$\int \frac{1}{r^2} \cos(rn) d\sigma = 2\pi, \quad (8)$$

quan el punt (a, b, c) es troba en un lloc contínuament corbat de la superfície de l'espai T .

Finalment, si el punt (a, b, c) rau en una vora o en una punxa de la superfície de T , és fàcil de veure que la integral (3) és igual a aquella part de la superfície esfèrica de radi 1 respecte de la qual els conus elementals que tallen rauen inicialment a l'interior de l'espai T . Per a trobar el límit d'aquest part superficial cal sols construir en el punt (a, b, c) el conus tangencial a la superfície de T . Aquesta superfície cònica talla l'esfera en la línia límit cercada.

La proposició d'aquest paràgraf procedeix de Gauss. El que hi ha en les equacions (6), (7), (8) forma el teorema 4 del tractat: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata* (en nota: Commentationes Societ. reg. Gotting. recent. vol 2. Gottingae 1813.- Carl Friedrich Gauss'Werke. Bd.5. Göttingen 1867). El darrer afegit, l'ha fet Gauss en l'article 22 del tractat: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehung- und Abstossungskräfte* (en nota: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839. Herausgegeben von Gauss und Weber. Leipzig 1840.- Gauss'Werke. Bd.5. Göttingen 1867)».

1. El paràgraf següent (§12) generalitza el resultat, i s'assumeix fàcilment que, si en lloc de tractar-se d'un element puntual que fa atraure n'és un que val M , bastarà de substituir 4π i 2π per $4\pi M$ i $2\pi M$.

La demostració exposada pren la massa que atrau com una unitat, i hipotèticament se suposa que té efecte en el punt atret, que es consideraria també unitari.

Com la demostració és vàlida per a un qualsevol punt que atrau basta de tenir en compte, com acabem de dir, la quantitat que atrau per a fer-ho extensible d'una manera general.

2. Si ho traduïm en termes del camp elèctric la força de (a,b,c) sobre (x,y,z) valdria $\frac{1}{r^2}$, i es denotaria avui per E , amb una càrrega atraient que es consideraria unitària; llavors tindríem una integral del tipus $\int E \cos \alpha d\sigma$.

El paràgraf traduït cerca l'acció que una massa exerceix en una superfície en principi tancada, que equival a dir, ja en termes de camp elèctrics, la inducció que hi ha en tota una superfície.

D'altra banda la derivada de $E \cos \alpha$, els components representats per E_x, E_y i E_z , denotaria la seva variació d'acord amb els valors x, y, z . Llavors la resultant de tots els sumands que afecten una superfície, és a dir, la inducció total, seria, atenent el seus components:

$$\iint E \cos \alpha d\sigma = \iiint \left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \right) dx dy dz$$

Una exemplarització del conegut com a teorema de la divergència o de Gauss.

3. Des d'aquí es pot també extreure l'equació de Poisson. A grans trets faríem: e essent la càrrega total del cas estudiat, $4\pi e$ igual al primer terme de la fórmula de dalt, ρ la densitat elèctrica, escrivim:

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho dx dy dz.$$

Llavors prenent com a superfície tancada la de l'element de volum $dx dy dz$, igualant els elements a integrar de les triples integrals de dalt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \right) = 4\pi\rho \\ \text{o} \quad & \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right) = -4\pi\rho. \end{aligned}$$