F. GRAELL I DENIEL

CONSIDERACIONS SOBRE EL LLENGUATGE DEL LLIBRE X DELS *ELEMENTS*

QUADERNS DE FILOSOFIA

7

F. GRAELL I DENIEL

CONSIDERACIONS SOBRE EL LLENGUATGE DEL LLIBRE X DELS *ELEMENTS*

7

QUADERNS DE FILOSOFIA

Barcelona 2023

2ª edició desembre 2023   [1ª edició febrer del 2000]

ISBN: 84-923682-6-8

www.xtec.cat/~fgraell
www.dossier.xtec/graell
www.quadernsdefilosofia.cat

E-mail: fgraell@xtec.cat

Podeu fer ús de l’adreça electrònica per a qualsevol correspondència amb *Quaderns de Filosofia*.

Es prega de tenir en compte sempre de consultar si hi ha una nova edició dels quaderns (que inclou canvis de vegades prou rellevants) en el web esmentat.

CONTINGUT

PRESENTACIÓ

Defensàrem en treballs anteriors que la incommensurabilitat es basaria en una primera accepció en la circumstància de voler cercar el nombre («de coses») d'una magnitud d'acord amb alguna mesura («la cosa») útil per al nombre d'una segona magnitud, quan alhora no podem acomplir la comanda en haver assimilat les relacions entre un nombre i l'altre que se cerca segons les relacions d'altres casos. Els antics grecs comprenent per nombre una pluralitat d'unitats, haurien avaluat que aquella cerca no lliuraria cap nombre per a una de les magnituds: la cerca numèrica fent-se sobre l'anàlisi de magnituds, és natural que parlessin de magnituds incommensurables, malgrat que nosaltres hi afegíssim que hi ha una incommensurabilitat per mor de l'anàlisi numèrica.

En efecte el nombre irracional algèbric (en nosaltres) o la magnitud incommensurable (en els grecs) seria sols una manera de «donar nombre» (eixamplant doncs la noció de nombre), o d'eixamplar l'horitzó del nombre a allò que no es deixaria comptar així (el supòsit grec deia que no era cap nombre: però el seu ús de magnituds incommensurables – una conducta – fóra del tall dels nostres irracionals algèbrics), i precisament a través d'un rodeig: el nombre irracional vindria definit a partir del racional (per exemple per allò que hem de fer per a retrobar-lo), i les magnituds incommensurables gregues sols ho serien perquè l'altra (o una altra) magnitud serviria de referència racional.

L'afer ensenyaria potser que el *nostre* irracional algèbric no tindria res a veure amb cap mena de disfuncionalitat en les relacions d'aritmètica i de geometria (malgrat que la primera es faci ràpidament autònoma), sinó que sols es tractaria d'un perllongament dels afers numèrics per mitjà de la creació de «nombres» (irracionals) que, si més no en els nivells bàsics, podrien simbolitzar coses (es tractaria d'una estratagema numèrica). Certament els grecs euclidians no acceptaren unes tals resultants com a nombres (i tindrien raó en l'accepció que no són nombres racionals), no crearen signes gràfics per a això i s'expressaren per mitjà de magnituds, que per a nosaltres esdevé avui dia una tècnica prou feixuga. Però el seu comportament lingüisticogeomètric palesaria des d'aquest punt de mira, i per contrast, que l'estratagema de la irracionalitat no tindria tampoc en les nostres conductes lingüístiques cap expressió necessària en un càlcul bàsic: tant en l'un cas com en l'altre l'afer rauria en un comportament après, i l'únic a escatir fóra la utilitat i l'agilitat de l'un i de l'altre.

El present treball s'ocupa de l'estudi del nivell de generalització del desè llibre dels *Elements* i de cercar en quina mesura és possible de transcriure les seves diverses proposicions a un llenguatge algèbric sense fer una excessiva distorsió del text grec; es tracta de ponderar l'abast del *llenguatge* dels *Elements* quan parlem de magnituds incommensurables i irracionals, que sembla l'únic camí possible per a comprendre una mica més l'aportació del càlcul amb arrels d'hindús i d'àrabs, i de matisar les relacions entre la matemàtica grega del llibre X i els matemàtics àrabs quan l'estudiaren amb les tècniques hindús dels irracionals. Sens dubte l'afer no se circumscriuria sols al llibre X en tant que el càlcul amb arrels irracionals també afectaria la teoria de les proporcions i les suposades proves del càlcul amb arrels fent ús dels *Elements*: basti ara d'exposar la tesi general que defensaria que el càlcul amb arrels sembla tenir unes bases autònomes, i que el discurs àrab més aviat hauria superposat problemes i llenguatges.

Com exposà J.Tropke, citant el comentari d'Anirici, «*mit Euclids Elementen übernahmen die Araber die griechische Irrationalitätslehre. Eingehend kommentiert Alnairīzī (um 900 n.Chr.) das zehnte Buch Euclids. Diesem wird auch weiterhin regstes Interesse entgegengebracht. Zu besserem Verständnis tragen die Zahlenbeispiele bei, die ein späterer Kommentator Abū Muḥammad ben 'Aldalbākī Albagdādī (um 1100 n.Chr.) den* *einzelnen Eucklidischen Sätzen beifügt: das geometrische Gewand wird allmählich abgestreift und das reine Rechnen mit Wurzelgrössen beginnt*»[1].

També podem afegir, per exemple, els mots d'A.Pringheim i J.Molk, quan afirmaren que «*les arabes ne font que compléter les procédés qu'ils tiennent, soit des grecs, soit des hindous; c'est par eux surtout qu'à partir du 12e siècle, ces procédés sont parvenus jusqu'à nous. Pour juger du peu d'importance des modifications de pure forme que la doctrine des incommensurables a subies depuis Euclide jusqu'au 13e siècle, il suffit de comparer au livre 10 des Eléments d'Euclide, la section 14 du célèbre Traité d'Algèbre de Léonard de Pise, composé en 1202*»[2].

Adhuc en el treball d'A.J.Juschkewitsch, hi podríem trobar un tercer exemple quan se'ns diu que «*Die Theorie der quadratischen (und biquadratischen) Irrationalitäten wird im Buch X der "Elemente" aufgebaut, indem man diese Irrationalitäten durch geometrische Gebilde, d.h. Strecken und Rechtecke, darstellt. Es wird dort eine klassifizierung gegeben, und es werden dort Eigenschaften von Grössen hergeleitet, die man als irrationale Wurzeln allgemeiner quadratischer und biquadratischer Gleichungen auffassen kann. Die gennante Klassifizierung dient im Buch XIII zur Bestimmung und Konstruktion der Kanten der regulären Polyeder. Im Buch X werden u.a. so wichtige Umformungen hergeleitet wie*

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b},$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

[1] *Geschichte der Elementarmathematik,* 7 vols., Berlin i Leipzig, Verneinigung wissenschaftlicher Verleger Walter de Gruyter & Co., 2ª ed. 1921-1924; vol.2, *Allgemeine Arithmetik*, pàg.67.

[2] «Nombres irrationnnels et notion de limite», pàg.138, *Encyclopédie des sciences mathématiques,* tom I, vol. I: fascicle I, pàgs.133-160; fascicle II, pàgs.161-208.

Die arabischen Kommetatoren decken den arithmetischen Gehalt dieser Umformungen auf und erläuterten sie an Zahlenbeispielen»[3].

[3] *Geschichte der Mathematik im Mittelalter* [trad.del rus per Viktor Ziegler, Basilea, Pealz, 1964, pàg.249], Moscou, 1961.

I
LES DEFINICIONS DE COMMENSURABILITAT I D'INCOMMENSURABILITAT

El llibre X s'inicia amb unes definicions generals sobre les magnituds commensurables i incommensurables, que transcrivim tot seguit, per a les quals les primeres proposicions serveixen de guia, i que ens circumscriurem sols a indicar:

«*1. Es diu commensurables* (σύμμετρα) *les magnituds que es mesuren per la mateixa mesura, i incommensurables les que no poden tenir cap mesura comuna.*

2. Les línies rectes són commensurables potencialment (δυνάμει σύμμετροί) *quan es mesura els quadrats sobre seu per la mateixa àrea, i incommensurables potencialment quan els quadrats sobre seu no poden tenir cap àrea com a mesura comuna.*

3. L'anterior ja establert, es prova que hi ha una multitud infinita de línies rectes que son commensurables i incommensurables, respectivament, algunes sols en longitud (=llargada), i d'altres també potencialment, amb una línia recta assignada. Anomenem racional (ῥητή) *la línia recta assignada i racionals les línies rectes que li són commensurables ja en longitud i potencialment o sols potencialment; les que li són incommensurables, però, irracionals* (ἄλογοι).

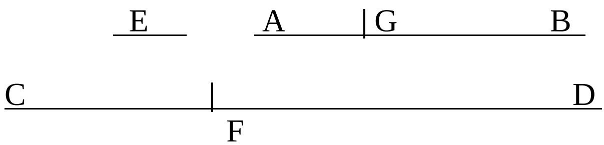
4. Anomenem racional el quadrat sobre una línia recta assignada, i racionals les àrees que li són commensurables; les que li són incommensurables, però, irracionals, i irracionals les línies rectes que les originen (καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι), *això és, els propis costats en cas d'àrees quadrades, però, en cas de quassevol altres figures rectilínies, les línies rectes sobre les quals es descriuen quadrats que els són iguals*».

Hi observem fàcilment que en la terminologia d'Euclides «racional» (ῥητός, literalment «expressable») té un ús una mica més ampli que en la nostra terminologia, perquè dues línies que són sols commensurables potencialment són també racionals.

Després els *Elements* passen a mostrar com és possible d'adonar-nos de la incommensurabilitat: primerament *Eucl*.X,1 estableix que, tenint dues magnituds desiguals, de la més gran sostraient més de la meitat, i de la resta sostraient més de la meitat, etc., hi haurà sempre un sobrant menor que la magnitud més petita; llavors *Eucl*.X,2 fa com segueix:

«En sostreure contínuament i per torns la menor de dues magnituds desiguals de la més gran, si la que sobra no mesura mai la que la precedeix, les magnituds són incommensurables.

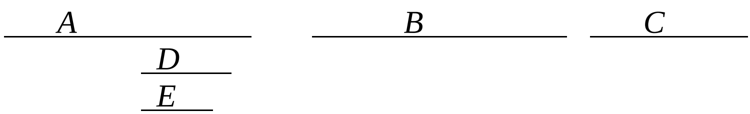
Perquè, tenit dues magnituds desiguals AB, CD, *i* AB *essent la menor, en sostreure contínuament i per torns la menor de la més gran, posem que la que sobri mai no mesuri la que la precedeix: dic que les magnituds* AB, CD *són incommensurables.*



Perquè, si són commensurables, alguna magnitud les mesurarà. Mesuri-les doncs una magnitud − si això és possible −, i sigui aquesta E*;* AB *mesurant* FD, *sobri* CF *menor que* AB*;* CF *mesurant* BG, *sobri* AG *menor que* CF, *i sigui repetit aquest procés contínuament fins que sobri una magnitud menor que* E. *Suposa tot això fet, i que* AG *sobri menor que* E.
Llavors com E *mesura* AB, *mentre* AB *mesura* DF, E *mesurarà també* FD. *Però també mesura tot* CD*; per això mesurarà el sobrant* CF. *Però* CF *mesura* BG*; llavors* E *mesura també* BG.

Però també mesura tot AB*; per això mesurarà també el sobrant* AG*, el major el menor: cosa que és impossible.*
D'aquí que cap magnitud no mesurarà les magnituds AB, CD*; per això les magnituds* AB, CD *són incommensurables. Per això, etc.*»[4]

Després d'*Eucl*.X,3-4 (trobar la mesura comuna més gran de dues magnituds commensurables, i de tres, respectivament), i amb un tal criteri d'incommensurabilitat, *Eucl*.X,5 afirma que dues magnituds que són commensurables tenen l'una respecte de l'altra la raó que un nombre té respecte d'un nombre.



Si A i B són commensurables tenen una mesura comuna: sigui C. Si C mesura tantes vegades A com D la unitat, i C mesura tantes vegades B com E la unitat,

[4] Fent

$$CD/AB = b_0 + CF/AB$$
$$AB/CF = b_1 + AG/CF$$
etc.

i per tant

$$CF/AB = 1/(b_1 + AG/CF)$$
etc.

llavors trobem la fracció contínua regular

$$CD/AB = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ldots}}$$

que en aquest cas és infinita.

«*llavors la unitat mesura el nombre* D *el mateix nombre de vegades que la magnitud* C *mesura* A; *llavors com* C *és a* A, *així la unitat a* D; *llavors, inversament, com* A *és a* C, *així* D *a la unitat*».

Paral·lelament *C* és a *B* com la unitat és a *E*. Per això, *ex aequali*, com *A* és a *B*, així el nombre *D* a *E*.

Apuntem encara d'altres proposicions del llibre X dels *Elements*, per exemple:

Si dues magnituds tenen l'una a l'altra la raó d'un nombre a un nombre, són commensurables (*Eucl*.X,6).

Les magnituds incommensurables no tenen la raó d'un nombre a un nombre (*Eucl*.X,7-8).

Els quadrats sobre línies rectes commensurables en longitud tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, i els quadrats que tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, tenen també els seus costats commensurables. Però els quadrats sobre línies rectes incommensurables en longitud no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat; i els quadrats que no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat no tenen els seus costats commensurables en longitud (*Eucl*.X,9).

II
UNS CRITERIS D'INCOMMENSURABILITAT

Semblaria en principi que no hi hauria massa problema d'acceptar que la *generalització* aconseguida per a les línies que són commensurables entre si sigui aquella que s'ofereix entre a i b (quan són nombres racionals positius), i per tant que en sigui del tot fàcil la transcripció. Veurem, malgrat això, que els afers no són tan senzills.

Quan passem a les línies incommensurables i irracionals trobem de primer la dificultat d'expressar-les amb un llenguatge escaient algèbric: segons la tercera definició hi hauria una línia recta assignada que seria racional, que representaríem per a quan a fos un nombre racional positiu, i llavors $\sqrt{\alpha}, \alpha$ essent un nombre racional positiu no quadrat, representaria la quantitat incommensurable en longitud, i commensurable en el quadrat, i $\sqrt{\alpha}$ seria racional segons el criteri euclidà de racionalitat. I des d'aquest punt de vista una línia irracional, és a dir, aquella que no seria commensurable ni en longitud ni potencialment amb la línia recta assignada seria representada per una expressió algèbrica irracional escaient; per tant seria quelcom que nosaltres sols podríem verbalitzar, però no traduir simplement i eficaçment amb una expressió algèbrica *simple* i *general*, quan:

$$\sqrt[4]{3}$$

$$2+\sqrt{3}$$

$$2-\sqrt{3}$$

foren, segons el patró grec, irracionals amb la línia recta assignada[5].

[5]La traducció algèbrica de la quarta definició (referents a les àrees racionals i irracionals) tindria els pros i els contres de la traducció algèbrica de la incommensurabilitat i irracionalitat de línies: mentre dues àrees commensurables podrien representar-se per a i b (a i b essent nombres racionals positius), on les dues àrees serien racionals; donada una àrea racional a, la irracional

Ara bé, i passant a les proposicions, els afers haurien de prendre algunes variants: per exemple, la presentació d'*Eucl*.X,2 de dues magnituds incommensurables no pressuposa l'assumpció prèvia d'una unitat de mesura per a una de les magnituds de tal manera que fos *l'altra* la incommensurable, i així són *les dues* magnituds entre si que són incommensurables *sense que hi hagi precisament una* que és mesurés en termes numèrics (racionals). Sens dubte una tal concepció fou feta *a posteriori* perquè no hi hauria possibilitat de demostrar des d'*Eucl*.X,2 la incommensurabilitat.

D'altra banda les proposicions dels *Elements* estableixen la commensurabilitat sota el pressupòsit d'una mesura de magnitud que treballa com la unitat (cf.*Eucl*.X,5 i 6), circumstància que no es troba en les magnituds incommensurables (cf.*Eucl*.X,7 i 8), i d'acord doncs amb *Eucl*.X,2.

Certament no es tractaria amb això d'insistir en el fet que *Eucl*.X,2 no pogués demostrar de fet la incommensurabilitat, quan tampoc no ho podrien fer les definicions aritmetitzants del segle XIX (els dos casos foren mètodes d'exposició de cap a cap legítims), sinó de fer veure que des d'*Eucl*.X,2 seria prou difícil de traduir la incommensurabilitat dels *Elements* en nombres o en expressions algèbriques: fins i tot, per exemple, dues línies incommensurables en longitud (i commensurables potencialment) no treballarien tal qual com els nostres símbols a i $\sqrt{b}$ (on b no fos un nombre quadrat) perquè cap d'aquests hauria de servir constantment de referència; d'acord amb *Eucl*.X,2, ho acabem de dir, no es tractaria que una no pogués mesurar-se en els termes de l'altra, sinó que aquesta tampoc no ho podria fer en els termes de la primera: hi hauria un emmirallament de les magnituds que les faria incongruents, i l'exposició es faria segons aquest supòsit; una traducció per a i $\sqrt{b}$ per al cas no expressaria doncs un tal estat dels afers.

s'expressaria per mitjà d'una expressió algèbrica irracional: per tant les arrels quadrades d'uns tals expressions també serien irracionals.

La indicació concloent que el criteri pràctic d'incommensurabilitat dels *Elements* no segueix el patró d'*Eucl*.X,2 es troba, però, en la important proposició d'*Eucl*.X,9, on se'ns diu que els quadrats sobre línies rectes commensurables en longitud tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, i els quadrats que tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, tenen també els seus costats commensurables. Però els quadrats sobre línies rectes incommensurables en longitud no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat; i els quadrats que no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat no tenen els seus costats commensurables en longitud.

L'enunciat d'aquest proposició, que un escoli atribueix a Teetet, expressa perfectament quan podem parlar de línies rectes incommensurables en longitud, això és, que sempre que tinguem dues línies els quadrats sobre les quals no tinguin la relació d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, llavors no és possible òbviament de trobar-hi un nombre per als costats (és a dir, aquell nombre, el quadrat del qual seria el donat); per tant som al pressupòsit que la incommensurabilitat de magnituds és per mor de l'anàlisi numèrica. Des d'aquí hauríem de comprendre doncs *Eucl*.X,5-8, i prendre *Eucl*.X,2 com una prova general posterior que presentaria la incommensurabilitat al marge d'*Eucl*.X,9.

Tanmateix això no salvaria que les *proposicions* del llibre X prou sovint estableixen la incommensurabilitat d'acord amb el patró de «dues línies incommensurables en...», en especial quan són incommensurables en longitud i commensurables potencialment (per tant racionals segons el criteri euclidià), *sense esment de la racionalitat d'una d'aquestes,* cosa que obliga a retocar l'expressió algèbrica de dues línies racionals, però incommensurables en longitud, d'acord amb els símbols $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$, on ara a pot ser un nombre quadrat o no (sense ser $\sqrt{a}$ un múltiple o submúltiple de $\sqrt{b}$, que és un nombre no quadrat), quan l'expressió no ens explicita que hi ha una línia assignada racional.

III
RAONS, PROPORCIONS I MAGNITUDS

1. Quan, per exemple, *Eucl.*X,5 diu que dues magnituds són commensurables si tenen la raó d'un nombre a un nombre (de *a* a *b*, quan *a* i *b* són nombres en sentit grec), i *Eucl.*X,7 afegeix que són incommensurables si no tenen la raó d'un nombre a un nombre, caldria afegir, i pel cantó de les magnituds commensurables, que el fet de la mateixa exemplarització geomètrica de les magnituds commensurables que tenen una raó de nombres pot permetre que les unitats de magnitud, per les quals parlem d'un raó de magnituds, siguin incommensurables amb d'altres magnituds; si ho voleu des d'uns supòsits certament aliens a la intenció narrativa dels *Elements*: les magnituds commensurables podrien permetre una digressió numèrica plural, dins del domini dels nostres nombres reals.

Explicitem tot això una mica més: prenguem dues magnituds commensurables *AB* i *CD*, que tenen doncs la raó d'un nombre a un nombre (dins encara del llenguatge euclidià), la raó – valgui el cas – entre 7 i 3. Llavors sembla fàcil d'adonar-se que un sistema numèric prou desenvolupat, fins i tot al marge d'un seguiment geomètric constant, podria adduir que la commensurabilitat entre *AB* i *CD* pot representar-se per infinites expressions numèriques, no sols pels múltiples i pels submúltiples racionals de 7 i 3, sinó també per la resultant d'operar-los amb quantitats irracionals, per exemple:

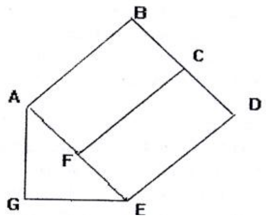
$$7\sqrt{2}\left(=\sqrt{98}\right),\ 3\sqrt{2}\left(=\sqrt{18}\right),$$

etc., de tal manera que aquí hi hauria una commensurabilitat generalitzada.

El grec euclidià faria tres quarts del mateix, però amb algunes matisacions: quan ell estableix la commensurabilitat entre *AB* i *CD* defensa, és obvi, que llur raó és la raó d'un nombre a un nombre, i la commensurabilitat entre *AB* i *CD* rep una expressió general en tant que la unitat-mesura comuna de magnituds pot ser una qualsevol que hi sigui adient, per tant la raó numèrica serà una qualsevol que hi sigui adient (i d'acord amb els supòsits grecs del nombre).

2. Però hi ha un segon nivell que caldria així mateix destacar: car el llibre X no té cap inconvenient a defensar la commensurabilitat entre *AB* i *CD* quan alhora les dues magnituds són incommensurables amb (per exemple) una magnitud racional; per dir-ho així: cada commensurabilitat i cada incommensurabilitat entre magnituds va pel seu cantó, de tal manera que no s'interfereixen, i de tal manera que la incommensurabilitat de les magnituds *AB* i *CD* amb una tercera magnitud no lleva l'aplicació per a les primeres de proporcions provades per a línies commensurables.

A què és degut això? El fet palesaria quelcom que versemblantment es podria extreure de la teoria eudoxiana de les proporcions; és a dir que, en els *Elements*, la teoria (racional) de les proporcions i la incommensurabilitat, com a dues qüestions diverses, *es troben superposades*; prenguem, per exemple, el quadrat *AD* sobre una base *AE*, hipotenusa d'un triangle isòsceles *AEG*, *F* i *C* els punts mitjans d'*AE* i *BD*, per on tracem la recta *FC*: llavors *AE* és a *AF* el que el quadrat *AD* és al paral·lelogram *AC*, i *AE* i *AF* són incommensurables amb *GE*; mentre la proporció està establerta en termes numèrics racionals de magnituds (de dos a un), la incommensurabilitat resta un problema de manca de nombre (racional) per a una magnitud a partir d'una altra.



Aquesta simple remarca faria veure que la commensurabilitat grega se circumscriu a ser aquella que té la raó d'un nombre a un nombre (en l'accepció grega), a la qual raó s’arramba el problema de la incommensurabilitat, cosa que permet la pròpia exemplarització geomètrica. Llavors la mateixa exemplificació geomètrica permetria la generalització de les raons i de les proporcions, d'una banda (valgui el cas, la raó de segments proporcional a la raó de paral·lelograms d'igual amplària); però d'altra banda, a les raons i a les proporcions entre magnituds (d'acord sempre amb criteris numèrics racionals), els importa ben poc quina sigui la unitat-mesura de magnituds, i precisament una tal unitat-mesura pot tenir *en nosaltres* un qualsevol nombre o expressió real: el grec euclidià no acceptant que hi ha d'altres nombres que els racionals, omet aquestes consideracions, mentre accepta les raons i les proporcions (per tant racionals) tot assumint que les magnituds que en són subjectes poden ser incommensurables amb d'altres magnituds. D'aquí que *si ho mirem amb ulls moderns* hi ha de fet també una generalització dins del domini dels nombres i de les expressions reals, sols que l'omissió d'una quaselvol expressió *numèrica* irracional està compensada per l'exemplificació de les magnituds.

3. Podem comprendre que es treballa com en la *nostra* generalització de raons i de proporcions dins del domini dels nombres reals, *pel fet mateix que el grec explicita* que les magnituds que en són subjecte poden ser incommensurables amb d'altres magnituds, sols que no accepta, per exemple, que l'arrel de dos sigui cap nombre.

Basti ara fer observar sols que l'abast de la commensurabilitat és el mateix que el de la proporcionalitat (i de les raons), i que una tal afirmació no és en cap cas una projecció des de temps moderns, quan es bastí tota la teoria eudoxiana precisament per a fer incloure la incommensurabilitat en la commensurabilitat que suposa la proporcionalitat.

4. El llibre X cerca ordres d'incommensurabilitat i les relacions respectives entre ordres i entre incommensurabilitats del mateix ordre, i en tant que el criteri pràctic d'incommensurabilitat és l'ofert en *Eucl.*X,9. Per tant aquí no hi ha dubte que és la impossibilitat de trobar nombre que fa parlar d'incommensurabilitat, amb la qual cosa es palesa que la generalització del llenguatge dels incommensurables és la generalització, en nosaltres, d'un llenguatge (d'una expressió) amb arrels irracionals: que el grec euclidià parla d'una magnitud incommensurable com nosaltres parlem d'una expressió irracional, mentre comença, és obvi, per les expressions més simples d'incommensurabilitat, és a dir, com suggereix ja *Eucl.*X,9, per les raons entre línies els quadrats de les quals no tenen la raó d'un nombre quadrat o un nombre quadrat, i en particular per línies que són racionals (segons el criteri euclidià), però incommensurables en longitud.

IV
ELS LÍMITS DE LA TRANSCRIPCIÓ

La circumstància que el grec no admetés que els quadrats que no tenen la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat no tenen els seus costats commensurables (*Eucl.*X,9), per tant que aitals costats no tenen la raó d'un nombre a un nombre (*Eucl.*X,7), i que calgués *pensar en línies* incommensurables a partir d'una tal impossibilitat; el fet, afegim, que la plasmació gràfica de la línia fes les funcions de la plasmació gràfica de les nostres arrels irracionals i de les nostres expressions reals, comporta d'altres afers prou rellevans que cal si més no indicar.

Car podem transcriure còmodament la incommensurabilitat entre línies racionals, però incommensurables en llargada, per $\sqrt{a}$ i $\sqrt{\alpha}$, on nosaltres hauríem d'afegir que α és un nombre racional no quadrat, i que a és un nombre racional; també podem transcriure, d'acord amb la descripció que se'ns va fent, un bon grapat de proporcions: per exemple la mateixa línia medial (cf.*Eucl.*X,21) per:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\quad ,$$

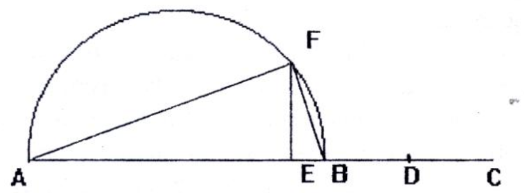
quan sabem que se'ns diu que cal cercar primer un rectangle contingut per línies rectes racionals sols commensurables potencialment (rectangle que és irracional) i que després hem de trobar el costat del quadrat que li és igual, etc. En conjunt podem transcriure amb comoditat una colla de proposicions en tant que se'ns van descrivint les passes des de les línies elementals (racionals, incommensurables en longitud, etc.), els *Elements* fet-ho a través d'àrees de paral·lelograms i de quadrats (quan cal multiplicar), pel perllongament de línies (quan cal sumar), i per l'aplicació d'àrees a línies (quan cal dividir).

Tot i això, àdhuc per a aquestes *fàcils* transcripcions, val la pena d'observar que el grec ho fa per la descripció d'àrees, des de línies racionals o commensurables en longitud o potencialment, «muntant», si podem parlar així, les línies. Sempre, és clar, té en compte si la línia (o l'àrea) guarda amb una altra línia (o àrea) la raó numèrica (o de nombres quadrats) o no per a decidir la commensurabilitat i la racionalitat de línies i d'àrees.

L'advertiment té la seva importància quan es palesa que *per al grec euclidià*, que no creu que hi hagi un nombre per al costat d'un quadrat que no guarda respecte d'un segon quadrat la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat, *la troballa d'una expressió numèrica real per a una qualsevol línia cau fora dels seus interessos*, quelcom que és del tot obvi no havent-hi aquí nombre: *els seus interessos no rauen doncs en la troballa de l'expressió numèrica* (com en nosaltres), *sinó en la cerca de línies de les quals podem dir que mantenen respecte d'altres* (que assumim amb alguna relació numèrica racional o d'incommensurabilitat) *algunes relacions*. Agafem per exemple *Eucl*.X,33, que mana trobar dues línies la suma de les quals és ni més ni menys que la línia major (cf.*Eucl*.X,39).

«*Trobar dues línies rectes incommensurables potencialment que facin racional la suma dels quadrats sobre seu, però medial el rectangle que contenen.*

Establim dues línies rectes racionals *AB*,*BC* commensurables sols potencialment i tals que el quadrat sobre la major *AB* sigui més gran que el quadrat sobre la menor *BC* en el quadrat sobre una línia recta incommensurable amb *AB* [cf.*Eucl*.X,30][6].



[6] Si la línia *BC* és sols commensurable potencialment amb *AB*, diguem que *AB* és $\sqrt{\alpha}$. Llavors el paràgraf demana que $\sqrt{\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2}$, on a és la línia *BC* i b la línia incommensurable amb *AB* (cf. *Eucl*.X,30, que ho explicita que sigui així).

Bisequem *BC* per *D*. Apliquem a *AB* un paral·lelogram igual al quadrat sobre qualsevol de les línies rectes *BD*, *DC* i deficient en una figura quadrada[7], i sigui això el rectangle *AE, EB* [cf.*Eucl.*VI,28][8]. Descriguem el semicercle *AFB* sobre *AB*. Dibuixem *EF* en angle recte respecte de *AB*, i ajuntem *AF, FB*.

Llavors des del moment que *AB, BC* són línies rectes desiguals, i que el quadrat sobre *AB* és més gran que el quadrat sobre BC en el quadrat sobre una línia recta incommensurable amb *AB*[9], mentre s'ha aplicat a *AB* un paral·lelogram igual a la quarta part del quadrat sobre *BC*, això és, al quadrat sobre la seva meitat, i deficient en una figura quadrada, fent el rectangle *AE, EB* – per tot això *AE* és incommensurable amb *EB* [cf.*Eucl*.X,18][10].

I com *AE* és a *EB* així és el rectangle *BA, AE* al rectangle *AB, BE*[11], mentre el rectangle *BA, AE* és igual al quadrat sobre *AF*[12], i el rectangle *AB, BE* al quadrat sobre *BF*; per això el quadrat sobre

---

[7] És a dir: $(AB - EB).EB = \frac{BC^2}{4}$ $(= BD^2)$

[8] Que fa que hi hagi $AB.EB - EB^2$.

[9] Assumpció feta en l'enunciat i d'acord amb la nota nostra anterior.

[10] El rectangle *AE,EB* és igual a BD^2, *BD* sols commensurable potencialment amb *AB*, per tant el rectangle *AE,EB* ha de tenir costats incommensurables en longitud.

[11] Multiplica *AE* i *EB* per *AB*.

[12] $$\begin{aligned} AF^2 = AB^2 - FB^2 &= (AE + EB).AB - FB^2 \\ &= AE.AB + EB.AB - FB^2 \\ &= AE.AB + EB(AE + EB) - FB^2 \\ &. \end{aligned}$$

A partir de $AF^2 = FE^2 + AE^2$

i $FB^2 = FE^2 + EB^2$

és fàcil demostrar que: $EB.AE = FE^2$.

Llavors: $$\begin{aligned} AF^2 &= AE.AB + FE^2 + EB^2 - FB^2 \\ &= AE.AB + FB^2 - FB^2 \\ &= AE.AB. \end{aligned}$$

I quelcom similar es faria per a BF^2.

AF és incommensurable amb el quadrat sobre *FB*[13]; per això *AF, FB* són incommensurables potencialment.

I des del moment que *AB* és racional[14], per això el quadrat sobre *AB* és també racional; de manera que la suma dels quadrats sobre *AF, FB* és també racional [cf.*Eucl*.I,47].

I des del moment que, una vegada més, el rectangle *AE, EB* és igual al quadrat sobre *EF*, i que per hipòtesi el rectangle *AE, EB* és igual al quadrat sobre *BD*, per això *FE* és igual a *BD;* per això *BC* és el doble de *FE*, de manera que el rectangle *AB, BC* és també commensurable amb el rectangle *AB, EF*.

Però el rectangle *AB, BC* és medial[15] [cf.*Eucl*.X,21]; per això el rectangle *AB, EF* és també medial [cf.*Eucl*.X,23, Por.].

Però el rectangle *AB, EF* és igual al rectangle *AF, FB* [Lema immediatament anterior a la proposició]; per això el rectangle *AF, FB* és també medial.

Però s'ha provat també que la suma dels quadrats sobre aquestes línies rectes és racional.

Per això s'ha trobat dues línies rectes *AF, FB* incommensurables potencialment que fan racional la suma dels quadrats sobre seu, però medial el rectangle que contenen.

Q.E.D.».

Respecte de les línies cercades (*AF, FB*), la proposició mostra d'una banda (1) que *AF.FB* és igual a *AB.EF*, per tant la meitat d'*AB.BC*[16] (rectangle que és medial, és clar, segons $\sqrt{a}\sqrt{\alpha}$); (2) que $AF^2 + FB^2 = AB^2$, quan AB és racional per hipòtesi, d'una altra; i (3) que AF^2 i FB^2 no guarden la relació d'un nombre a un nombre (en l'accepció grega) per mitjà de:

[13] Si *AE* i *EB* són incommensurables, també ho són AF^2 i BF^2 perquè:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AE \cdot AB}{EB \cdot AB} = \frac{AF^2}{BF^2}.$$

[14] N'és una hipòtesi inicial.

[15] És a dir, del tipus de $\sqrt{a}\sqrt{\alpha}$.

[16] Recordem que $AE.EB = FE^2$ per construcción geométrica; i $AE.EB = BD^2$ per hipòtesi; per això *FE* = *BD*.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha}$$
$$BC = a$$
$$(AB - EB).EB = \frac{a^2}{4}\left(= BD^2\right)$$

quan *AE* i *EB* són incommensurables (cf.*Eucl*.X,18)[17], i:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AE.AB}{EB.AB} = \frac{AF^2}{BF^2}$$

Es tracta doncs d'una troballa de línies *AF* i *FB que no té cap intenció de lliurar-los una expressió numèrica real*, sinó que se satisfà a fer veure que som capaços de construir línies, de les quals podem dir que, essent incommensurables potencialment, la suma dels seus quadrats és racional i que el rectangle que contenen és medial. *Eucl*.X,33 en té prou a fer veure que unes tals línies existeixen sense que es preocupi de lliurar-hi una expressió numèrica pel fet obvi que unes tals línies no tenen una relació numèrica (en l'accepció grega).

Això fa certament que la descripció de línies es trobi serrada a les construccions geomètriques (i que versemblantment l'estudi de les incommensurabilitats i irracionalitats se circumscrivissin a les solucions d'arrels quadràtiques i biquadràtiques), alhora que palesa els límits d'una qualsevol transcripció.

[17] Hem dit que el quadrat BD^2 té costats incommensurables amb *AB*: el paral·lelogram d'igual àrea *AE.EB* ha de tenir costats incommensurables.

V
EN QUINA ACCEPCIÓ EL LLIBRE X PARTEIX D'UNA INVESTIGACIÓ NUMÈRICA

Cal no interpretar la manca d'interès per a trobar una expressió numèrica real per a la línia a cercar, entenedora quan s'admet que sols hi ha nombre per una relació racional, que es cregués que la voluntat del llibre X no fos l'estudi de relacions numèriques (si ho voleu així: racionals) i de consideracions que se'n derivarien: bastaria, per exemple, un cop d'ull a *Eucl.*X,17 per a confirmar-nos que hi ha aquí la investigació de les condicions per a encalçar arrels racionals (i irracionals, *Eucl.*X,18) d'equacions quadràtiques[18].

Fet i fet, i d'acord amb els grans historiadors de la ciència grega (Zeuthen, Tannery, Heath, etc.), el llibre X és una investigació de les arrels d'equacions de segon grau quan són incommensurables amb magnituds donades, per tant quan no se'ls pot assignar un nombre: en aquest cas el grec euclidià cerca una línia que, per construcció, representi la solució de l'equació, i precisament perquè exerceix una investigació exacta que no se satisfà amb aproximacions. Alhora la manca d'un llenguatge algèbric (numèric) l'obliga a classificar les magnituds irracionals, que aconsegueix en les successives solucions d'equacions de segon grau, perquè les línies tenen el mateix aspecte, no lliuren per si mateixes les seves varietats tal i com ho fa el nostre llenguatge algèbric.

Tot això es veu patentment en l'estudi de les línies binomials (*Eucl.*X,48-53) i de les apòtomes (*Eucl.*X,85-90), que corresponen a dotze possibles casos (sis i sis respectivament) de solucions

---

[18]Cf. per exemple, a propòsit d'*Eucl.*X,17, Heath, T.L., *The thirteen books of Euclid's Elements*, (traduïts a partir del text de Heilberg, vols.I-III), Dover Publications, Nova York, 1956 (1ª, hi ha tanmateix d'altres reimpressions posteriors), vol.III, pàgs.41-45.

(positives) d'equacions de segon grau respecte de les quals, podríem dir, gira la resta del llibre. Fet i fet els *Elements* relacionen llavors les diverses línies binomials amb les línies que representarien les arrels dels seus valors numèrics, que valdrien com les arrels d'una equació biquadràtica (*Eucl.*X,36-41; 54-59; 60--65); i les diverses línies apòtomes amb les línies que representarien també les arrels del seus valors numèrics i que valdrien com les altres arrels d'una equació biquadràtica (*Eucl.*X,73-78; 91-96; 97-102). La resta del llibre lliura les consideracions prèvies per a arribar a unes tals línies, o completa llur investigació en un respecte o un altre.

VI
SOBRE LA TRANSCRIPCIÓ D'ALGUNES PROPOSICIONS DEL LLIBRE X

Dèiem que prou de les proposicions del llibre X estan bastides en termes de raons i de proporcions; que l'admissió que la teoria de les proporcions continguda en el llibre V del *Elements* tingué un motiu intern, dins del propi discurs grec, en l'existència de l'incommensurable; i que tot això no llevaria que l'esclariment de la mateixa proporcionalitat grega menés versemblantment a acceptar que la proporcionalitat sembla ser primerament un afer racional al qual *se superposarien* (en un segon nivell de discurs) els problemes derivats de la irracionalitat numèrica, de tal manera que el criteri primer per a una proporcionalitat continuaria essent el contingut en *Eucl*.VII, def.20 («*els nombres són proporcionals quan el primer és el mateix múltiple, o la mateixa part, o les mateixes parts, del segon que el tercer ho és del quart*») o, si voleu, el contingut en la important proporció d'*Eucl*.VII,19 («*si quatre nombres són proporcionals, el nombre produït pel primer i el quart serà igual al nombre produït pel segon i el tercer*»). En efecte sembla que una investigació *ad hoc*[19] mostraria que la incommensurabilitat grega no seria incompatible amb l'ús d'un tal criteri de proporcionalitat mentre hauria exemplaritzat amb magnituds allò que nosaltres tenim per irracional, i que al capdavall la *nostra* proporcionalitat no en diferiria pas massa si no fos perquè el propi càlcul numèric hauria generalitzat *Eucl*.VII, def.20 i *Eucl*.VII,19. La transcripció dels termes de la raó grega en divisions indicades no sembla trair doncs el seu sentit darrer malgrat, una vegada més, que el grec euclidià no hauria acceptat pas una tal representació numèrica d'afers incommensurables i que mantingués sempre els termes de les raons i de les proporcions de tal manera que la seva argumentació es fes d'acord amb hàbits

[19] Cf. *La proporció d'Èudox i la generalització de la proporció* QF11.

intel·lectuals geomètrics tant per a la proporcionalitat com per a la representació dels irracionals, amb les proves necessàries per a això, i segons un tarannà que li seria propi.

Així mateix la raó entre dues magnituds commensurables no sembla que la puguem descriure més que com una raó entre nombres racionals, amb el ben entès que serien nombres concrets de magnituds, que poden ser incommensurables amb d'altres magnituds; és a dir, la raó *a:b*, on *a* i *b* fossin nombres concrets de magnituds, generalitzaria magnituds en l'escrit del llibre X, i també ho faria la raó *a:b*, quan *a* i *b* fossin nombres (o expressions) reals en la nostra expressió algèbrica, amb el quocient *a:b* racional.

Però quan el grec parlés de dues magnituds racionals incommensurables en longitud el fet semblaria trobar-se a prop de la irracionalitat entre $\sqrt{a}$ i $\sqrt{\alpha}$, on α seria un nombre no quadrat i a un nombres racional qualsevol que no fos la resultant de la multiplicació d' α i el quadrat d'un nombre racional, en el qual cas $\sqrt{a}$ i $\sqrt{\alpha}$ serien commensurables segons una raó numèrica.

Malgrat que el grec *pensés* la incommensurabilitat *des dels* nombres i que no hagués acceptat l'ús de l'arrel d'un nombre no quadrat perquè no ho hauria avaluat com un nombre (i certament no és cap multitud d'unitats), no semblaria que les nostres transcripcions dels enunciats en termes algèbrics fessin aquí res més en principi que l'explicitació d'un llenguatge que no acceptaria que allò que voldria expressar fos res numèric, i ho faríem en un llenguatge que nosaltres tampoc no avaluaríem com de nombres (racionals).

Amb aquests precedents podríem assajar les següents transcripcions d'algunes proposicions del llibre X a propòsit de línies incommensurables i commensarables, amb l'advertiment que les lletres llatines simbolitzen aquí nombres racionals, les gregues nombres racionals no quadrats, i d'acord amb les obsevacions esmentades:

*Eucl.*X,11: «si hi ha quatre magnituds proporcionals, i la primera és commensurable amb la segona, la tercera serà també comensable amb la quarta; i si la primera és incommensurable amb la segona, la tercera serà incommensurable amb la quarta».

*Eucl.*X,12: relacions de commensurabilitat entre magnituds; dues que ho són a una tercera ho són entre si.

*Eucl.*X,13: relacions d'incommensurabilitat entre magnituds; si una és commensurable amb una segona i incommensurable a una tercera, llavors aquestes darreres són incommensurables entre si.

*Eucl.*X,14: conseqüències que s'extreuen quan, en quatre línies proporcionals, les dues primeres mantenen una relació donada. És a dir, per exemple:

«Si quatre línies rectes són proporcionals, i el quadrat sobre la primera és més gran que el quadrat sobre la segona pel quadrat sobre una línia recta commensurable amb la primera, el quadrat sobre la tercera serà també més gran que el quadrat sobre la quarta pel quadrat sobre una línia recta commensurable amb la tercera, etc.»

$$\left.\begin{array}{l} a:b = c:d \\ a^2 = b^2 + e^2 \end{array}\right\rangle \rightarrow c^2 = d^2 + f^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a:b = c:d \\ a^2 = b^2 + \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 \end{array}\right\rangle \rightarrow c^2 = d^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2$$

*Eucl.*X,15: la suma de magnituds commensurables els és commensurable.

*Eucl.*X,16: la suma de magnituds incommensurables els és incommensurable.

Eucl.X,17: condicions per a una arrel commensurable (amb quantitats donades a, b) d'una equació quadràtica. El seu enunciat diu exactament el següent en termes no algèbrics:

$$bx - x^2 = \frac{a^2}{4} \leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2$$

Eucl.X,18: condicions per a una arrel incommensurable d'una equació quadràtica.

$$b\sqrt{\xi} - \left(\sqrt{\xi}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \leftrightarrow b^2 = a^2 + \left(\sqrt{\alpha}\right)^2$$

Eucl.X,19: rectangle racional contingut per línies rectes racionals commensurables en llargada.

$$a \cdot b$$

Eucl.X,20: l'aplicació d'una àrea racional $[a \cdot b]$ a una línia recta racional$[a]$ produeix com a amplada una línia recta racional $[b]$commensurable en llargada amb la primera.

$$(a \cdot b) : a = b$$

Eucl.X,21: el rectangle contingut per línies rectes racionals sols commensurables potencialment és irracional, i el costat del quadrat que li és igual és irracional i s'anomena **medial**[20].

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{\alpha} \ ,$$

$$\text{i } \sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{\alpha}}$$

és la medial[21], perquè:

$$\left(\sqrt{a} : \sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{\alpha}}\right) = \left(\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{\alpha}} : \sqrt{\alpha}\right)$$

---

[20] Cf. la prova d'*Eucl*.X,27.

[21] A més una àrea medial és l'àrea igual a un quadrat sobre una línia recta medial, malgrat que *Eucl*.X,21 no l'esmenti, aquest nom, i sigui sols el porisma d'*Eucl*.X,23 que ho faci per primera vegada.

*Eucl.*X,22: l'aplicació del quadrat d'una línia medial a una línia racional produeix com a amplada una línia racional i incommensurable en llargada amb la primera línia racional.

$$\left(\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\right)^2 = \sqrt{m}\cdot\frac{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{m}}$$

(*m* essent un nombre racional).

*Eucl.*X,23: línia medial commensurable en longitud o sols potencialment amb una medial.

$$\sqrt{b\sqrt{\alpha}\sqrt{a}} \text{ respecte } \sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}$$

*Eucl.*X,24: rectangle medial contingut per línies medials commensurables en longitud.

$$b\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}$$

*Eucl.*X,25: el rectangle contingut per línies medials commensurables sols potencialment és o racional o medial[22].

$$\sqrt{\beta\sqrt{\alpha}\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}$$

*Eucl.*X,26: «una àrea medial no excedeix una àrea medial en una àrea racional»

*Eucl.*X,27: «trobar línies rectes medials commensurables sols potencialment que continguin un rectangle racional».

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}, \left(\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\right)\left[\text{o }\left(\sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\alpha}}}\right)\right]$$

[22] Notem que en la prova d'aquesta proposició («el rectangle contingut per línies rectes medials commensurables sols potencialment o és racional o és medial») Euclides ja admet que $\beta\sqrt{\alpha}$ i $\sqrt{\alpha}$ són commensurables (les dues línies respectives són commensurables en longitud) i hi aplica còmodament *Eucl.*X,19; d'altres commensurabilitats d'aquesta mena se succeeixen en les proposicions següents (cf. per exemple *Eucl.*X,31,32, 61, 66-70, etc.).

*Eucl.*X,28: «trobar línies rectes medials commensurables sols potencialment que continguin un rectangle medial».

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}},\left(\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\right)\left[\text{o}\left(\sqrt{\frac{\beta\sqrt{a}}{\sqrt{\alpha}}}\right)\right]$$

Lema 1: «trobar dos nombres quadrats tals que llur suma també sigui un nombre quadrat».

$$x^2 \cdot y^2 + \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$$

on x i y són alhora parells o senars: llavors cadascun dels sumands de la igualtat, és a dir, $x^2 \cdot y^2$ i $\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2$, és un dels nombres cercats.

Lema 2: «trobar dos nombres quadrats tals que llur suma no sigui un nombre quadrat».

*Eucl.*X,29: «trobar dues línies rectes racionals commensurables sols potencialment i tals que el quadrat sobre la major sigui més gran que el quadrat sobre la menor en un quadrat sobre una línia recta commensurable en longitud amb la major».
Les línies són a i $\sqrt{\alpha}$ quan:

$$a, \sqrt{a^2 - b^2}\,(= \sqrt{\alpha}\,)$$

*Eucl.*X,30: com *Eucl.*X,29, però ara sobre una línia recta incommensurable en longitud amb la major. «Trobar dues línies rectes racionals commensurables sols potencialment i tals que el quadrat sobre la major sigui més gran que el quadrat sobre la menor en un quadrat sobre una línia recta incommensurable en longitud amb la major».

Les línies són $\sqrt{\alpha}$ i a quan:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,(=\sqrt{\alpha}\,),a$$

Eucl.X,31: «trobar dues línies rectes medials commensurables sols potencialment, que continguin un rectangle racional, i tals que el quadrat sobre la major sigui més gran que el quadrat sobre la menor en el quadrat sobre una línia recta commensurable en longitud amb la major».

Les línies són les dues següents, respectant les construccions:

$$\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}},\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}}$$

$$\left(\text{on } \sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}\right).$$

Eucl.X,32: com *Eucl.*X,31, però ara que el rectangle sigui medial.

$$\sqrt{a\sqrt{\alpha}},\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a\sqrt{\alpha}}}$$

$$\left(\text{on } \sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\beta}\right).$$

Eucl.X,33: «trobar dues línies rectes incommensurables potencialment que facin racional la suma dels quadrats sobre seu, però medial el rectangle que contenen».

Euclides agafa les línies trobades a *Eucl*.X,30, és a dir:

$$\sqrt{a^2+b^2} \;\text{ i }\; a.$$

Llavors resol geomètricament (*u* i *v* són dos segments que junts fan la major, és a dir $\sqrt{a^2+b^2}$):

$$u+v=\sqrt{a^2+b^2},$$

(llur producte és la quarta part del quadrat de la menor)

$$uv=\frac{a^2}{4}.$$

Una vegada tenim u i v , per construcció sabíem que:

$$AF^2 = u\sqrt{a^2 + b^2}$$
$$FB^2 = v\sqrt{a^2 + b^2}$$

AF i *FB* són les línies que satisfan el problema, tal com s'ha establert dalt en copiar tot *Eucl*.X.33).

Eucl.X,34: com *Eucl*.X,33, però en aquest cas la suma dels quadrats ha de ser medial, i el rectangle racional.

Eucl.X,35: com *Eucl*.X,33, ara la suma dels quadrats ha de ser medial, i el rectangle també medial, però incommensurable amb la suma dels quadrats.

Eucl.X,36: la suma de dues línies rectes racionals commensurables sols potencialment és irracional, i el tot s'anomena **binomial**.

$$\sqrt{a} + \sqrt{\alpha}$$

Eucl.X,37: la suma de dues línies del tall d'*Eucl*.X,27 és irracional, i el tot s'anomena línia recta **primera bimedial**.

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}$$

Eucl.X,38: la suma de dues línies del tall d'*Eucl*.X,28 és irracional, i el tot s'anomena línea recta **segona bimedial**.

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}$$

Eucl.X,39: la suma de les dues línies trobades a *Eucl*.X,33 és irracional, i el tot s'anomena línea recta **major**.

Eucl.X,40: la suma de les dues línies trobades a *Eucl*.X,34 és irracional, i el tot s'anomena **costat d'una àrea racional més una de medial**.

Eucl.X,41: la suma de les dues línies trobades a *Eucl*.X,35 és irracional, i el tot s'anomena **costat de la suma de dues àrees medials**.

Eucl.X,42: «una línia recta binomial es divideix en els seus termes sols en un punt», és a dir, la línia no es pot dividir per un altre punt en dues parts commensurables sols potencialment. *Eucl*.X,43 ho estableix per a la primera bimedial, *Eucl*.X,44 per a la segona bimedial, *Eucl*.X,45 per a la major, *Eucl*.X,46 per al costat d'una àrea racional més una de medial, *Eucl*.X,47 per al costat de la suma de dues àrees medials.

Eucl.X,48: **primera binomial**, en la qual el quadrat del terme més gran és major que el quadrat del terme més petit en el quadrat d'una línia commensurable en longitud amb el terme més gran, i on el terme més gran és commensurable en longitud[23] amb una línia racional.

$$m\sqrt{c}+\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

on el terme més gran és el primer, també $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}$, condició establerta pel plantejament, i aquesta binomial correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-2m\sqrt{c}x+\frac{b^2}{a^2}m^2c=0\,.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,85.

[23] Cf. dalt l'apartat III.2.

Eucl.X,49: **segona binomial;** com la primera, però quan és el terme menor que és commensurable en longitud amb la línia racional.

$$\frac{a(m\sqrt{c})}{\sqrt{a^2-b^2}}+m\sqrt{c}$$

on el terme menor és el segon, $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-\frac{2ma\sqrt{c}}{\sqrt{a^2-b^2}}x+\frac{m^2cb^2}{a^2-b^2}=0\,.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,86.

Eucl.X,50: **tercera binomial**; com la primera, però quan cap dels termes és commensurable en longitud amb la línia racional.

$$\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\beta}}$$

on el terme més gran és el primer, $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-\frac{2a\sqrt{c}}{\sqrt{\beta}}x+\frac{b^2c}{\beta}=0\,.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,87.

Eucl.X,51: **quarta binomial**, en la qual el quadrat del terme major és més gran que el quadrat del terme menor en el quadrat d'una línia incommensurable en longitud amb el major, i on el terme major és commensurable en longitud amb la línia recta racional.

$$m\sqrt{c}+\frac{m\sqrt{ca}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

on el terme més gran és el primer, $a^2+b^2=\alpha$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-2m\sqrt{c}x+\frac{m^2cb^2}{a^2+b^2}=0.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,88.

Eucl.X,52: **cinquena binomial;** com la quarta, però quan és el terme menor que és commensurable en longitud amb la línia racional.

$$\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2+b^2}}{a}+m\sqrt{c}$$

on el terme més petit és el segon, $a^2+b^2=\alpha$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-\frac{2m\sqrt{c}\sqrt{a^2+b^2}}{a}x+\frac{m^2cb^2}{a^2}=0.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,89.

Eucl.X,53: **sisena binomial**; com la quarta, però quan cap dels termes és commensurable en longitud amb la línia racional.

$$\frac{\sqrt{c}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{\beta}}$$

on el primer terme és el més gran, $a^2+b^2=\alpha$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-\frac{2\sqrt{c}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\beta}}x+\frac{cb^2}{\beta}=0.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,90.

Eucl.X,54: «una línia recta racional i la primera binomial contenint una àrea, el costat de [*el quadrat igual a*] l'àrea és la línia recta irracional que s'anomena binomial» (cf.*Eucl*. X,36).

Se cerca doncs el següent costat:

$$\sqrt{\sqrt{c}\left(m\sqrt{c}+\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}\,.$$

Primerament resol de forma geomètrica, u i v essent els valors del sistema:

$$u+v=m\sqrt{c}$$

(el terme major de la primera binomial dividit en dues parts $u+v$),

$$u.v=\frac{1}{4}\left(\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)^2.$$

(aplicació d'un quart del quadrat del terme menor de la primera binomial sobre el terme major $u+v$ i deficient per una figura quadrada, el quadrat de v).

Per tant u+v el terme major de la primera binomial, u.v un quart del terme menor.

Una vegada tenim u i v fem:

(una part del terme major de la primera binomial u per la línia racional)

$$x^2=u\sqrt{c}$$

$$y^2=v\sqrt{c}$$

(l'altra part del terme major de la primera binomial v per la línia racional)

I la solució serà la línia representada per $x + y$, costat del quadrat final, podent servir com a solució de l'equació biquadràtica de la forma que apuntàvem a la corresponent binomial (cf. *Eucl.*X,48). Un comentari paral·lel valdria per a les diverses proposicions d'*Eucl.*X,55-59.

*Eucl.*X,55: si es tracta d'una línia recta racional i la segona binomial, el costat cercat és la primera bimedial.

*Eucl.*X,56: si es tracta d'una línia recta racional i la tercera binomial, el costat cercat és la segona bimedial.

*Eucl.*X,57: si es tracta d'una línia recta racional i la quarta binomial, el costat cercat és la línia major.

*Eucl.*X,58: si es tracta d'una línia recta racional i la cinquena binomial, el costat cercat s'anomena el costat d'una àrea racional més una de medial.

*Eucl.*X,59: si es tracta d'una línia recta racional i la sisena binomial, el costat cercat s'anomena el costat de la suma de dues àrees medials.

----

*Eucl.*X,60: «el quadrat sobre una línia recta binomial aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària la primera binomial»

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{\alpha}\right)^2}{\sqrt{c}} = \frac{a+\alpha}{\sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{c}}$$

(Fem notar que les proposicions d'*Eucl.*X,60-65 són les converses de les d'*Eucl.*X,54-59).

Eucl.X,61: « el quadrat sobre una línia recta primera bimedial aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària la segona binomial»

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\right)^2}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}+\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{c}}+\frac{2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{c}}$$

Eucl.X,62: « el quadrat sobre una línia recta segona bimedial aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària la tercera binomial»

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\right)^2}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}+\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{c}}+\frac{2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{c}}$$

Eucl.X,63: «el quadrat sobre la línia recta major aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària la quarta binomial».

Eucl.X,64: «el quadrat sobre el costat d'una àrea racional més una de medial aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària la cinquena binomial».

Eucl.X,65: «el quadrat sobre el costat de la suma de dues àrees medials aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària la sisena binomial».

Eucl.X,66: «una línia recta commensurable en longitud amb una línia recta binomial és també binomial i del mateix ordre» (és a dir, primera binomial, segona binomial, etc.). Una binomial seria: $\Phi+\Psi$,

l’ altre: $m(\Phi + \Psi) \quad [= m\Phi + m\Psi]$
(Φ i Ψ essent el primer i el segon membre respectivament d’una qualsevol de les fórmules apuntades a *Eucl*.X,48-53).

Eucl.X,67: «una línia recta commensurable en longitud amb una línia recta bimedial és també bimedial i del mateix ordre» (és a dir, primera o segona bimedial).

$$\Phi + \Psi \quad ,$$
$$m(\Phi + \Psi) \quad [= m\Phi + m\Psi]$$

(Φ i Ψ essent el primer i el segon membre respectivament d’una qualsevol de les fórmules apuntades a *Eucl*.X,37-38).

Eucl.X,68: «una línia recta commensurable amb una línia major és també major».

Eucl.X,69: «una línia recta commensurable amb el costat d’una àrea racional més una de medial és també el costat d’una àrea racional més una de medial».

Eucl.X,70: «una línia recta commensurable amb el costat de la suma de dues àrees medials és el costat de la suma de dues àrees medials».

Eucl.X,71: «Si se sumen plegades una àrea racional i una de medial, sorgeixen quatre línies rectes irracionals; o sigui: una binomial, o una primera bimedial, o una major, o un costat d’una àrea racional més una de medial».
(Es tracta de classificar el costat del quadrat d’igual àrea que la suma d’una àrea racional i d’una de medial, per tant de trobar quina és la línia que representa segons diverses relacions entre el costat de l’àrea racional i el costat de l’àrea medial).

Eucl.X,72: «Si se sumen plegades dues àrees medials incommensurables entre si, sorgeixen les altres dues línies rectes

irracionals; o sigui: o la segona bimedial, o el costat de la suma de dues àrees medials».
(Es tracta de classificar el costat del quadrat d'igual àrea que la suma de dues àrees medials incommensurables l'una a l'altra segons les relacions entre les àrees medials del plantejament inicial).

Eucl.X,73: la resta de sostreure d'una línia racional una línia racional commensurable sols potencialment amb la primera és irracional i s'anomena **apòtoma**.

$$\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}\ \left[\text{o}\ \sqrt{\alpha}-\sqrt{a}\right]$$

Eucl.X,74: la resta de sostreure l'una a l'altra dues línies del tall d'*Eucl*.X,27 és irracional i s'anomena **primera apòtoma d'una línia recta medial** (cf.*Eucl*.X,37).

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\ \left[\text{o}\ \sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}-\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\right]$$

Eucl.X,75: la resta de sostreure l'una a l'altra dues línies del tall d'*Eucl*.X,28 és irracional i s'anomena **segona apòtoma d'una línia recta medial** (cf.*Eucl*.X,38).

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\ \left[\text{o}\ \sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}-\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\right]$$

Eucl.X,76: la resta de sostreure l'una a l'altra dues línies del tall d'*Eucl*.X,33 és irracional i s'anomena **menor** (cf. *Eucl*.X,39).

Eucl.X,77: la resta de sostreure l'una a l'altra dues línies del tall d'*Eucl*.X,34 és irracional i s'anomena **allò que** [és a dir, la suma del quadrat sobre seu] **amb una àrea racional fa un tot**

medial. Seria la contrapart d'*Eucl*.X,40. Com si diguéssim: el costat de l'àrea quadrada després de restar d'una àrea medial una àrea racional.

Eucl.X,78: la resta de sostreure l'una a l'altra dues línies del tall d'*Eucl*.X,35 és irracional i s'anomena **allò que** [ben mirat la suma del quadrat sobre seu] **amb una àrea medial fa un tot medial**. Seria la contrapart d'*Eucl*.X,41. Com si diguéssim: el costat de l'àrea quadrada resultant d'una diferència entre dues àrees medials.

Eucl.X,79: hi ha sols una línia recta racional que es pugui annexar a una apòtoma i que sigui sols commensurable potencialment amb el tot (és a dir, aquí amb la línia racional abans de sostreure-li l'annex).

És a dir, per exemple, si tenim $\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}$, sols hi ha $\sqrt{\alpha}$ que pugui restar-se a $\sqrt{a}$ i que sigui commensurable potencialment amb $\sqrt{\alpha}$. Aquí $\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}$ és l'apòtoma, i $\sqrt{a}$ l'annex.

Eucl.X,80-84 van provant els teoremes paral·lels a *Eucl*.X,79 per a la primera i la segona apòtoma d'una línia recta medial, per a la línia recta menor, per a la línia recta que el quadrat sobre seu amb una àrea racional fa un tot medial, i per a la línia recta que el quadrat sobre seu amb una àrea medial fa un tot medial.

Eucl.X,85: **primera apòtoma**, on el quadrat sobre el tot (és a dir, aquí, i al llarg de *Eucl*.X,86-90, de la línia recta de partida per a l'apòtoma) és més gran que el quadrat sobre l'annex (allò que se sostreu) en el quadrat sobre una línia recta commensurable en longitud amb el tot, i on el tot és commensurable en longitud amb una línia racional establerta prèviament.

$$m\sqrt{c}-\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

on el terme més gran és el primer, també $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}$, una condició del plantejament (cf.*Eucl*.X,48), i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-2m\sqrt{c}x+\frac{b^2}{a^2}m^2c=0\,.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,48.

Eucl.X,86: **segona apòtoma**, quan és l'annex que és commensurable en longitud amb la línia racional.

$$\frac{a(m\sqrt{c}\,)}{\sqrt{a^2-b^2}}-m\sqrt{c}$$

on el terme menor és el segon, també $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-\frac{2ma\sqrt{c}}{\sqrt{a^2-b^2}}x+\frac{m^2cb^2}{a^2-b^2}=0\,.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,49.

Eucl.X,87: **tercera apòtoma**, quan ni el tot ni l'annex són commensurables en longitud amb la línia racional.

$$\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{\beta}}-\frac{\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\beta}}$$

on el terme més gran és el primer, també $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\alpha}$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2 - \frac{2a\sqrt{c}}{\sqrt{\beta}}x + \frac{b^2 c}{\beta} = 0.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,50.

Eucl.X,88: **quarta apòtoma**, on el quadrat sobre el tot és més gran que el quadrat sobre l'annex en el quadrat sobre una línia recta incommensurable amb el tot, i on el tot és commensurable en longitud amb una línia recta racional establerta prèviament.

$$m\sqrt{c} - \frac{m\sqrt{c}a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

on el terme més gran és el primer, també $a^2 + b^2 = \alpha$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2 - 2m\sqrt{c}x + \frac{m^2 c b^2}{a^2 + b^2} = 0.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,51.

Eucl.X,89: **cinquena apòtoma**; com *Eucl*.X,88, però quan és l'annex que és commensurable en longitud amb la línia racional.

$$\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2 + b^2}}{a} - m\sqrt{c}$$

On, com en tots els casos anteriors, el terme major és el primer, també $a^2 + b^2 = \alpha$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2 - \frac{2m\sqrt{c}\sqrt{a^2 + b^2}}{a}x + \frac{m^2 c b^2}{a^2} = 0.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl*.X,52.

*Eucl.*X,90: **sisena apòtoma**; com *Eucl.*X,88, però quan ni el tot ni l'annex són commensurables en longitud amb la línia racional.

$$\frac{\sqrt{c}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\beta}}-\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{\beta}}$$

on el primer terme és el més gran, també $a^2+b^2=\alpha$, i correspon a una de les arrels de l'equació:

$$x^2-\frac{2\sqrt{c}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{\beta}}x+\frac{cb^2}{\beta}=0\,.$$

Per a l'altra arrel, cf. *Eucl.*X,53.

----

*Eucl.*X,91: «una línia recta racional i la primera apòtoma contenint una àrea, el costat de [*el quadrat igual a*] l'àrea és una apòtoma».

Se cerca doncs el següent costat:

$$\sqrt{\sqrt{c}\left(m\sqrt{c}-\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}\,.$$

Primerament resol de forma geomètrica, u i v essent els valors del sistema:

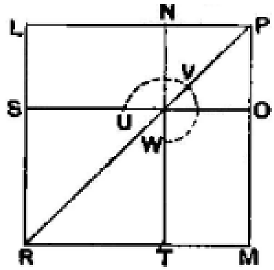
$$u+v=m\sqrt{c}$$

$u+v$ fent el tot, el primer terme de l'apòtoma;

$$u.v=\frac{1}{4}\left(\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right),$$

l'aplicació sobre aquest tot de l'apòtoma $(u+v)$ d'una paral·lelogram igual al quadrat de la meitat de l'annex de l'apòtoma $\left(\frac{m\sqrt{c}\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$ *i deficient* en una figura quadrada de costat *v*.

Per tant $u+v$ essent el terme major de la primera apòtoma, $u.v$ un quart del terme menor.



Una vegada tenim u i v mostra per construcció geomètrica d'un quadrat on l'àrea LM és igual a $u\sqrt{c}$ (una part del tot de l'apòtoma per la línia racional) i on l'àrea NO és igual a $v\sqrt{c}$ (l'altra part del tot de l'apòtoma per la línia racional). Després mostra per mitjà de proporcionalitats geomètriques que $LP - NP$ és el costat cercat. Fent l'àrea $LM = x$, i l'àrea $NO = y$, llavors:

$$x^2 = u\sqrt{c}$$

$$y^2 = v\sqrt{c}$$ [on l'arrel de c simbolitza la línia racional].

I la solució serà la línia representada per $x - y$, costat del quadrat final, podent servir com a solució de l'equació de l'equació biquadràtica de la forma que apuntàvem a la corresponent apòtoma (cf. *Eucl*.X,85; hi ha una similitud amb la relació entre l'equació quadràtica d'*Eucl*.X,48 i la biquadràtica *d'Eucl*.X,54). Un comentari paral·lel valdria per a les diverses proposicions d'*Eucl*.X,92-96.

Eucl.X,92: si es tracta d'una línia recta racional i la segona apòtoma, el costat cercat és la primera apòtoma d'una línia recta medial (és a dir x i y [de $x–y$] són línies commensurables sols en potència i contenen un rectangle racional).

Eucl.X,93: si es tracta d'una línia recta racional i la tercera apòtoma, el costat cercat és la segona apòtoma d'una línia recta medial (x i y són línies commensurables sols en potència i contenen un rectangle medial).

Eucl.X,94: si es tracta d'una línia recta racional i la quarta apòtoma, el costat cercat, del quadrat d'igual àrea, és la línia recta irracional menor (per a $x-y$, cf.*Eucl*.X,76).

Eucl.X,95: si es tracta d'una línia recta racional i la cinquena apòtoma, el costat cercat, del quadrat d'igual àrea, és la línia recta que [és a dir, la suma del quadrat sobre seu] amb una àrea racional fa un tot medial (per a $x-y$, cf.*Eucl*.X,77).

Eucl.X,96: si es tracta d'una línia recta racional i la sisena apòtoma, el costat cercat és el del quadrat d'una àrea igual al format per la línia recta que [el quadrat seu] amb una àrea medial fa un tot medial (per a $x-y$, cf.*Eucl*.X,78).

Eucl.X,97: «el quadrat sobre una apòtoma aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària una primera apotema».

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}\right)^2}{\sqrt{c}}=\frac{a+\alpha}{\sqrt{c}}-\frac{2\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{c}}$$

(Notem que les proposicions d'*Eucl*.X,97-102 són les converses de les d'*Eucl*.X,91-96)[24].

Eucl.X,98: « el quadrat sobre una primera apòtoma d'una línia recta medial aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària una segona apòtoma».

---

[24] A *Eucl*.X,97-99, és clar, podríem sempre permutar les quantitats absolutes del minuend i del subtrahend.

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\right)^2}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}+\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{c}}-\frac{2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{c}}$$

Eucl.X,99: « el quadrat sobre una segona apotema d'una línia recta medial aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària una tercera apòtoma»

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}-\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}\right)^2}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}+\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{c}}-\frac{2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{c}}$$

Eucl.X,100: «el quadrat sobre la línia recta menor aplicat a una línia recta racional produeix com a amplària una quarta apòtoma».

Eucl.X,101: «el quadrat sobre una línia recta que [el seu quadrat] produeix amb una àrea racional un tot medial, aplicat a una línia recta racional, produeix com a amplària una cinquena apòtoma».

Eucl.X,102: «el quadrat sobre una línia recta que [el seu quadrat] produeix amb una àrea medial un tot medial, aplicat a una línia recta racional, produeix com a amplària una sisena apòtoma».

Eucl.X,103: «una línia recta commensurable en longitud amb una apòtoma és una apòtoma del mateix ordre» (cf.*Eucl*.X,66-72).

$$\Phi+\Psi \quad ,$$
$$m(\Phi-\Psi) \quad [=m\Phi-m\Psi]$$

(Φ i Ψ essent el primer i el segon membre respectivament d'una qualsevol de les fórmules apuntades a *Eucl.*X,85-90).

*Eucl.*X,104: «una línia recta commensurable amb una apòtoma d'una línia recta medial és una apòtoma d'una línia recta medial i del mateix ordre».

$$\Phi + \Psi \quad ,$$
$$m(\Phi - \Psi) \quad [= m\Phi - m\Psi]$$

(Φ i Ψ essent el primer i el segon membre respectivament d'una qualsevol de les fórmules apuntades a *Eucl.*X,74-75).

*Eucl.*X,105: «una línia recta commensurable amb una línia menor és també menor».

*Eucl.*X,106: «una línia recta commensurable amb el que produeix [el quadrat sobre seu] amb una àrea racional un tot medial és una línia recta que produeix amb una àrea racional un tot medial».

*Eucl.*X,107: «una línia recta commensurable amb el que produeix [el quadrat sobre seu] amb una àrea medial un tot medial és aquella mateixa també una línia recta que produeix amb una àrea medial un tot medial».

----

*Eucl.*X,108: «si se sostreu una àrea medial d'una àrea racional, el costat de l'àrea restant esdevé una de les dues línies rectes irracional, o una apòtoma o una línia recta menor».
(El costat és aquí el costat d'una àrea quadrada igual a l'àrea resultant de la subtracció).

*Eucl.*X,109: «si se sostreu una àrea racional d'una àrea medial apareixen unes altres dues línies rectes irracionals, o la primera apòtoma d'una línia recta medial o una línia recta que produeix [el seu quadrat] un tot medial amb una àrea racional».

Eucl.X,110: «si se sostreu d'una àrea medial una àrea medial incommensurable amb el tot, apareixen les dues línies irracionals que romanen, o la segona apòtoma d'una línia recta medial o una línia recta que produeix [el seu quadrat] un tot medial amb una àrea medial».

Eucl.X,111: «l'apòtoma no és igual a la línia recta binomial».

$$\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}\ \left(\text{o } \sqrt{\alpha}-\sqrt{a}\right)\neq\sqrt{a'}+\sqrt{\alpha'}$$

«L'apòtoma i les línies rectes irracionals que la segueixen ni són iguals a la línia recta medial ni [ho són] l'una a l'altra».
(Es conclou que hi ha tretze línies rectes irracionals, és a dir, la medial [*Eucl*.X,21] i les indicades a *Eucl*.X,36-41;73-78).

Eucl.X,112: «el quadrat sobre una línia recta racional aplicat a la línia recta binomial produeix com a amplària una apòtoma els termes de la qual són commensurables amb els termes de la binomial i a més a més en la mateixa raó; i ultra això l'apotema sorgida així tindrà el mateix ordre que la línia recta binomial».

$$\frac{\left(\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{\alpha}\quad (\text{o } \sqrt{\alpha}+\sqrt{a})}=b\sqrt{a}-b\sqrt{\alpha}\quad \left(\text{o } b\sqrt{\alpha}-b\sqrt{a}\right).$$

Eucl.X,113: «el quadrat sobre una línia recta racional aplicat a una apòtoma produeix com a amplària la línia recta binomial els termes de la qual són commensurables amb els termes de l'apòtoma i en la mateixa raó; i ultra això la binomial sorgida així té el mateix ordre que l'apòtoma».

$$\frac{\left(\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}\quad (\text{o } \sqrt{\alpha}-\sqrt{a})}=b\sqrt{a}+b\sqrt{\alpha}\quad \left(\text{o } b\sqrt{\alpha}+b\sqrt{a}\right).$$

*Eucl.*X,114: «si una àrea està continguda per una apòtoma i per la línia recta binomial els termes de la qual són commensurables amb els termes de l'apòtoma i en la mateixa raó, el costat de l'àrea [*quadrada igual a l'àrea continguda*] és racional».

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{\alpha}\right)\left(b\sqrt{a}+b\sqrt{\alpha}\right)}=\sqrt{c}\ ,$$

o permutant les quantitats absolutes dels termes de l'apòtoma.

*Eucl.*X,115: «d'una línia recta medial brollen un nombre infinit de línies rectes irracionals, on cap no és la mateixa que una de les precedents»

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\sqrt{c}}$$

on $\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}$ és la línia medial, $\sqrt{c}$ una línia racional, mentre se cerca el costat del quadrat igual a l'àrea del rectangle:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\cdot\sqrt{c}.$$

Prosseguint:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{a}}\sqrt{c}}\sqrt{c}},$$

etc.

VII
RECAPITULACIÓ FINAL

1. Una de les sorpreses de la transcripció del llibre X dels *Elements*, que sols ha provat una traducció algèbrica de les seves resultants (traint tan poc com ha estat possible) rau a comprovar la dificultat de ser «traduïdes» (i «traïdes») degut al propi estil discursiu de l'obra.

Malgrat que la transcripció no ho ha fet palès, les proposicions del llibre X no permetrien de *provar* les operacions del càlcul amb radicals i, en conjunt, del càlcul amb expressions irracionals algèbriques, malgrat que s'haurien *llegit* històricament (des dels àrabs) en uns tals termes.

Tot i això el llibre X estipula incommensurabilitats i irracionalitats d'acord si hi ha raó de nombres o no entre les magnituds, i que la inexistència d'una raó numèrica comença per la inexistència d'arrels quadrades per als nombres no quadrats, cosa que permeté que *a posteriori* (obviant certament llur intenció narrativa) hom hi pogués fer recaure tot l'estudi numèric (descabdellat d'una manera abstracta) de les magnituds, que podia incloure doncs un tractament numèric de les incommensurables i de les irracionals. Aquesta fou la situació, sembla, en què es trobaren els comentaristes àrabs dels *Elements*, que dominaven ja la teoria numèrica hindú i la descabdellaren prou.

2. Com hauríem d'avaluar el nivell de generalització que es troba en el llibre X? La resposta sembla prou difícil en tant que està en funció de les habituacions intel·lectuals del matemàtic grec: *nosaltres* diríem que dues magnituds tenen una mesura comuna quan les dues es poden comptar a partir d'una unitat, afirmació que és una generalització a partir de plurals casos concrets, d'haver-ho fet o resseguit; sense dubte aquesta generalització es troba també en els grecs, i fa parlar, per exemple, de magnituds commensurables.

Nosaltres podríem perfectament abstreure una qualsevol referència a la magnitud (i a la mesura unitària) i expressar en lletres a i b una relació numèrica racional (en l'accepció d'avui); que els grecs també practicaren aquest vessant generalitzador és indubtable atenent els llibres numèrics dels *Elements*, i fet i fet les seves precaucions de diversificar magnituds (commensurables) i nombres serien, des d'aquest punt de mira, afers derivats que al cap i a la fi remetrien a l'estudi dels nombres, quan els nombres es descabdellen a nivell merament abstracte i alhora quan «es retorna» al caràcter exemplar de les magnituds (mantenint la generalització a un tal nivell).

Un tal «retorn», i diversificació entre nombres i magnituds, es degué sens dubte al descobriment de la incommensurabilitat.

Nosaltres acceptem també un qualsevol nombre irracional, afirmació que és també general i que prové de l'experiència numèrica irracional, i a més a més no tenim necessitat d'una qualsevol referència a magnituds, de tal manera que romanem en el mer càlcul, si no en la generalització algèbrica; sabem així que la raó entre $a\sqrt{x}$ i $b\sqrt{x}$ (essent $\sqrt{x}$ una expressió irracional) és la de múltiples de $\sqrt{x}$, i tot això ho podem exemplaritzar, si ho voleu, amb magnituds. Per a com ho fan els *Elements* remetem a III.2.

Si més no s'hi troba en nosaltres una generalització numèrica en l'accepció d'estendre la noció de nombre a l'irracional, que versemblantment comportà aviat un bandeig de les referències a les magnituds, i que possibilità la generalització del llenguatge algèbric.

És respecte de l'incommensurable que l'estil generalitzador (que ho és) grec se separa del nostre, i pel fet que no acceptà que el nostre irracional fos un nombre: el grec euclidià *ha de descriure* a nivell de *generalització* les relacions *des de les magnituds commensurables* (dues magnituds són incommensurables perquè com a mínim hi ha una tercera que és l'assignada), de tal manera que cada descripció general d'una incommensurabilitat o irracionalitat (en l'accepció grega) és un cas general al costat d'un altre, començant els de línies que són racionals o incommensurables en longitud, fins a cadascun dels ordres d'irracionalitat.

Com pot, però, descriure a nivell de generalització, les relacions entre magnituds incommensurables i irracionals, quan no hauria acceptat que fos també una investigació numèrica? Simplement pensant, per exemple, $\sqrt{2}$ o atalaiant-ho (cf.*Eucl*.X,9[25]), precisament per a excloure-ho com a nombre. Es tracta certament d'un comportament del tot singular: els *Elements*, en el seu desè llibre, sempre tenen un referent numèric explícit (sempre hi ha nombres quadrats o no que mantenen una relació), paral·lel a les magnituds, que «va a parar» a quelcom que no té la raó d'un nombre a un nombre, per tant que és quelcom incommensurable o irracional, i és així com el discurs paral·lel de nombres i magnituds es perllonga ara sols per a les magnituds que «no tenen la raó d'un nombre a un nombre». És clar que això no lleva que les magnituds facin les funcions dels nostres nombres irracionals, malgrat que hi ha la conscient voluntat d'excloure un tal pensament, però això mateix explica que sigui irrellevant (per al grec euclidià) una figuració numèrica, i que no importi doncs el camí descriptiu per a palesar que dues línies s'ordenen en una raó de magnituds incommensurables i irracionals de tal o tal ordre.

Hi ha una generalització de la incommensurabilitat i irracionalitat perquè es parla des de nombres sense especificar quins nombres, i llur relació es manté en aquest nivell; perquè la descripció que es fa no val precisament per la construcció particular del cas (hi ha la típica generalització geomètrica), i perquè les línies trobades acompleixen els requisits formulats a un

[25]«Els quadrats sobre línies rectes commensurables en longitud tenen l'un a l'altre la raó que un nombre quadrat té amb un nombre quadrat; i els quadrats que tenen l'un a l'altre la raó que un nombre quadrat té amb un nombre quadrat, tindran també els seus costats commensurables en longitud. Però els quadrats sobre línies rectes incommensurables en longitud no tenen l'un a l'altre la raó que un nombre quadrat té amb un nombre quadrat; i els quadrats que no tenen l'un a l'altre la raó d'un nombre quadrat a un nombre quadrat no tindran els seus costats commensurables en longitud».

tal nivell general. Hi ha, si es vol, una extensió des de les consideracions numèriques als casos que es va circumscrivint.

Des d'aquest punt de vista la magnitud incommensurable o irracional fa les funcions de les nostres expressions algèbriques irracionals, per tant en seria un equivalent a nivell de generalització. Però això s'ha de matisar perquè (1) el grec euclidià arriba en les seves descripcions d'ordres a allò que *nosaltres* esmentaríem com a expressions irracionals; perquè (2) no sempre és possible d'arribar a les línies a descriure continuant un mateix camí, i fet i fet el llibre X assaja aproximacions diverses per a línies diverses, quan el que importa no és pas de trobar una expressió numèrica real (quelcom impensable quan no és un nombre), sinó de trobar quelcom geomètric capaç de tenir una descripció general retòrica que acompleixi els requisits exigits.

Què diferencia un tal comportament del nostre? Sens dubte l'absència d'un llenguatge numèric irracional (i del corresponent descabdellament algèbric), per tant el fet que no hi trobem el perllongament en la direcció generalitzadora extensiva, i la conseqüent generalització algèbrica, manques que condiciona el propi mètode expositiu (i allò que se cerca), i que redueix considerablement l'abast d'un llenguatge en tant que avança tediosament i el fa poc àgil; en tant que necessita de l'exemplarització d'una línia construïda per a plasmar «allò on va a parar» una relació numèrica, i en tant que el llenguatge dels *Elements* no serveix en definitiva per al càlcul.

D'altra banda és fàcil de veure que la generalització de les magnituds commensurables en el grec euclidià quan la unitat de mesura és incommensurable no és res més, com no ho seria en una accepció per a nosaltres, que la juxtaposició de consideracions.

Es tracta d'habituacions intel·lectuals bastant dispars que palesen més aviat la plasticitat de procediments (i de comportaments) de què hem estat capaços en els nostres discursos teòrics.

Sens dubte tot això s'hauria de posar en connexió amb l'extensió de la teoria de la proporcionalitat, però això seria ja motiu d'un nou treball.