LA GEOMETRIA PLANA A LES PAU

(incloent circumferències i còniques)

Qüestions i problemes resolts utilitzant la calculadora Wiris - Informació

| Jaume Bartrolí Brugués | IES M. Carrasco i Formiguera de Barcelona | http://www.xtec.cat/~jbartrol | jbartrol@xtec.cat |

28 (Set. de 2004) **Matemàtiques**	Donats els vectors $\vec{u} = (1, 2)$ i $\vec{v} = (-3, 1)$: a) comproveu que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla; b) trobeu els components del vector $\vec{w} = (-1, 5)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. [Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]
27 (Set. de 2003) **Mat. per a les CS**	a) Dibuixeu el gràfic de les rectes $3x - y - 1 = 0$ i $x + 3y - 12 = 0$. b) Demostreu que les dues rectes anteriors són perpendiculars. c) Calculeu el punt d'intersecció de les dues rectes. d) Considereu el triangle format per les dues rectes anteriors i per l'eix d'ordenades. Calculeu-ne l'àrea. Puntuació de cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.
26 (Juny de 2003) **Mat. per a les CS**	Considereu els punts del pla $A(2,-1)$ i $B(0,3)$ i la recta r d'equació $x + y - 2 = 0$. Calculeu les coordenades d'un punt C de r que estigui alineat amb A i B. Puntuació: 2 punts.
25 (Juny de 2003) **Mat. per a les CS**	Un triangle rectangle té el vèrtex A, corresponent a l'angle recte, a l'origen de coordenades. Un altre dels seus vèrtexs és el punt $B(2,4)$, i la hipotenusa té per equació la recta $x = 2$. Calculeu: a) les equacions dels costats AB i AC; b) el tercer vèrtex C; c) l'àrea del triangle. Puntuació: apartat a): 2 punts; apartats b) i c): 1 punt cadascun. Total: 4 punts.
24 (Juny de 2003) **Mat. per a les CS**	Expliqueu quina condició han de verificar A i B si les rectes d'equacions $Ax + By + C = 0$ i $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$ a) són paral·leles; b) són perpendiculars. Puntuació de cada apartat: 1 punt. Total: 2 punts.
23 (Set. de 2002) **Mat. per a les CS**	El costat *BC* d'un triangle està sobre la recta d'equació $3x - 2y + 1 = 0$. El vèrtex *A* té coordenades (2, –1). Determineu el peu de l'altura relativa a *A*. Puntuació: Planteig: 1 punt. Determinació del peu de l'altura: 1 punt. Total: 2 punts.

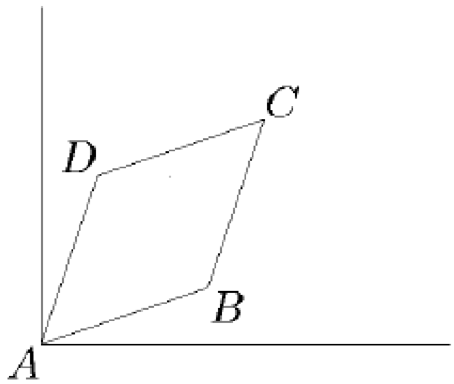
22 (Juny de 2002) **Mat. per a les CS**	a) Determineu l'equació de la recta paral·lela a la bisectriu del segon i quart quadrant que passa pel punt $(0, a)$. b) Determineu el valor de a perquè la recta anterior determini en el primer quadrant un triangle d'àrea 8 amb els eixos. c) Quina és la distància d'aquesta recta a l'origen de coordenades? d) Quina és la distància d'aquesta recta al punt $(-4, 0)$? Puntuació: Cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.
21 (Juny de 2002) **Mat. per a les CS**	Considereu els punts del pla $A(3, 2)$, $B(-1, 8)$ i $C(k, k + 4)$, k real. Calculeu el valor de k perquè A, B i C estiguin alineats. Puntuació: Planteig: 1 punt. Determinació de k: 1 punt. Total: 2 punts.
20 (Juny de 2002) **Mat. per a les CS**	Un triangle té dos vèrtexs A i B en els punts $A = (0, 0)$ i $B = (2, 0)$. L'àrea val 3. Sabent que el tercer vèrtex C té ordenada positiva i està situat sobre la recta $2x - y - 5 = 0$, calculeu les coordenades de C i el perímetre del triangle. Feu-ne la gràfica corresponent. Puntuació: Planteig: 1 punt. Determinació del vèrtex C: 1 punt. Perímetre: 1 punt. Gràfica: 1 punt. Total: 4 punts.
19 (Set. de 2001) **Mat. per a les CS**	Sigui r la recta d'equació $6x - 15y + 4 = 0$. Trobeu les equacions de les rectes paral·lela i perpendicular a r que passen pel punt $(4, 1)$ i feu un esquema gràfic. [2 punts]
18 (Juny de 2001) **Matemàtiques**	La circumferència C passa pel punt $A = (4, 0)$ i és tangent a la recta $y = x$ en el punt $B = (4, 4)$. a) Determineu l'equació de la recta que passa per B i pel centre de la circumferència C. b) Trobeu el centre de C i calculeu el seu radi. [2 punts]
17 (Juny de 2001) **Mat. per a les CS**	Els punts $A = (2, 5)$, $B = (6, 8)$ i $C = (22, d)$ estan alineats. Calculeu d. [2 punts]
16 (Juny de 2001) **Mat. per a les CS**	Sigui r la recta d'equació $3x - 5y + 2 = 0$. Trobeu les equacions de les rectes paral·lela i perpendicular a r que passen pel punt $(-15, 4)$. [2 punts]
15 (Juny de 2001) **Mat. per a les CS**	Al triangle de vèrtexs $A = (0, 3)$, $B = (3, 7)$ i $C = (6, 0)$ determineu a) el perímetre; b) l'equació de la recta perpendicular al segment BC que passa per A, és a dir, l'altura del triangle des del vèrtex A; c) la distància del punt A a la recta que conté el segment BC; d) la superfície. Nota: Cada apartat val 1 punt. [4 punts]

14 (Juny de 2001) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Siguin r i s les dues rectes del pla d'equacions $r:\ 2x - y - 3 = 0, \qquad s: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{2}$ Calculeu l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de r i s i que és paral·lela a la recta d'equació $3x + 5y - 1 = 0$. [2 punts]
13 (Set. de 2000) **Matemàtiques** **[ ]**	Considereu la circumferència del pla d'equació $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$. a) Calculeu-ne el centre i el radi. b) Comproveu que el punt (4, 0) pertany a la circumferència i determineu l'equació de la seva tangent en aquest punt (la recta tangent en un punt d'una circumferència és la que és perpendicular al radi que passa per aquest punt). [2 punts]
12 (Set. de 2000) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Determineu el valor que ha de tenir el paràmetre a perquè les tres rectes d'equacions $3x + y = 5$, $x - 3y = -5$ i $x + ay = a$ es tallin en un punt. [2 punts]
11 (Set. de 2000) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Considereu la recta d'equació $4x + y - 3 = 0$. a) Calculeu l'equació de la recta paral·lela i de la recta perpendicular a l'anterior que passen pel punt $A = (3, -1)$. b) Dibuixeu la gràfica de la recta $4x + y - 3 = 0$ i de les que heu trobat a l'apartat a). [2 punts]
10 (Juny de 2000) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Considereu la recta d'equació $y = -2x + 2$. Trobeu les coordenades del punt d'intersecció d'aquesta recta amb la recta perpendicular a ella que passa pel punt (6, 3). [2 punts]
9 (Juny de 2000) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Determineu el valor de a perquè la recta $x - 2ay = 1$ i la recta $x + 3y = 8$ siguin: a) paral·leles b) perpendiculars [2 punts]
8 (Juny de 2000) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Considereu dos eixos perpendiculars de coordenades. Considereu els punts O i A de coordenades $O = (0, 0)$ i $A = (9, 12)$. Una persona situada al punt O inicia un viatge en línia recta cap a A. a) Quina distància haurà de recórrer per anar de O a A? b) Escriviu l'equació de la recta que haurà de seguir per anar de O a A. c) Digueu quines seran les coordenades del punt P on es trobarà la persona quan hagi recorregut la tercera part de la distància de l'apartat anterior (sempre sobre la recta que uneix O amb A). d) Si després d'haver recorregut el segment OP, quan arribi a P decideix dirigir-se cap al punt $Q = (7, 1)$, quin angle haurà de girar cap a la dreta? (Angle respecte a la trajectòria OP que havia seguit fins ara.) [4 punts]

7 (Juny de 2000)
Mat. per a les CS

D'un rombe *ABCD* coneixeu les coordenades de tres vèrtexs. *A* és l'origen de coordenades, $B = (4, 1)$ i $D = (1, 4)$.

a) Calculeu les coordenades del quart vèrtex *C*.
b) Comproveu analíticament que les diagonals són perpendiculars i que es tallen en el seu punt mitjà.



[4 punts]

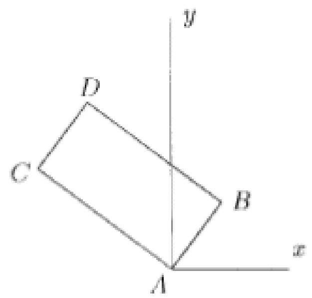
6 (Set. de 1999)
Matemàtiques

Una circumferència del pla passa pels punts (1, 3) i (3, 5) i té el centre sobre la recta $x + 2y = 3$. Trobeu el centre, el radi i l'equació d'aquesta circumferència.

[2 punts]

5 (Set. de 1999)
Mat. per a les CS

Considereu el rectangle del pla representat en el dibuix (recordeu que rectangle és un quadrilàter en què els quatre angles són rectes).



a) Sabent que les coordenades de *A* són (0, 0) i les de *B* són (3, 4), calculeu la longitud del costat *AB*.
b) Escriviu l'equació de la recta determinada per *C* i *A*.
c) Determineu les coordenades del vèrtex *C* sabent que la longitud del costat *CA* és doble de la del costat *AB*.
d) Calculeu les coordenades del vèrtex *D*.

[4 punts]

4 (Set. de 1999)
Mat. per a les CS

a) Considereu el triangle de vèrtexs $A = (2, 1)$, $B = (4, 3)$ i $C = (0, 3)$. Dibuixeu-lo. Comproveu després per algun raonament matemàtic (no només gràficament) que és un triangle rectangle.
b) Calculeu la seva àrea.

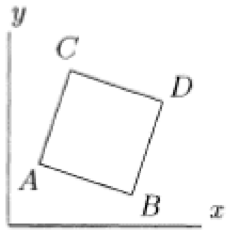
[2 punts]

3 (Juny de 1999)
Matemàtiques

Calculeu el radi i les coordenades del centre de la circumferència que té per equació $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$. [2 punts]

2 (Juny de 1999)
Mat. per a les CS

Els punts $A = (1, 2)$ i $D = (5, 4)$ representen els vèrtexs oposats d'un quadrat, tal com s'indica a la figura.

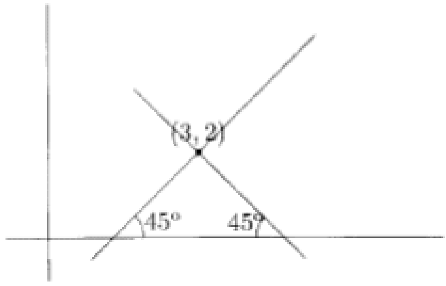


a) Calculeu el punt mitjà M de la diagonal AD del quadrat (M serà el centre del quadrat).
b) Escriviu l'equació de la recta que passa per M i és perpendicular a la diagonal AD (aquesta recta serà l'altra diagonal del quadrat).
c) Calculeu les coordenades dels altres dos vèrtexs B i C del quadrat.

[4 punts]

1 (Juny de 1999)
Mat. per a les CS

Escriviu l'equació de les dues rectes que passen pel punt (3, 2) i formen un angle de 45º amb l'eix de les x tal com s'indica en el dibuix següent:

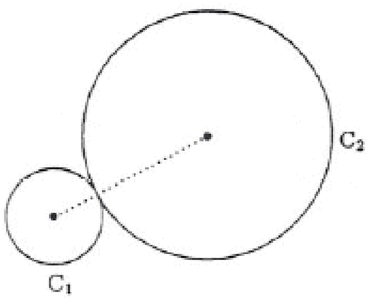


[2 punts]

0 (Set. de 1998)
Matemàtiques

Considereu dues circumferències C_1 i C_2 del pla que compleixen les condicions següents:

- C_1 passa pel punt $P = (2, 0)$ i en aquest punt té per tangent la recta $y = x - 2$.
- El centre de C_1 és a sobre de la recta $y = x$.
- C_2 té per equació $x^2 + y^2 - 8x - 8y = k$, on k és una certa constant.
- Les circumferències C_1 i C_2 són tangents exteriors, tal com s'indica en la figura següent:



a) Calculeu el centre i el radi de C_1 i escriviu l'equació de C_1.
b) Calculeu les coordenades del centre de C_2.
c) Calculeu les coordenades del punt d'intersecció de C_1 amb C_2.
d) Calculeu el valor de la constant k de l'equació de C_2.

[4 punts: 1 cada apartat]

–1 (Set. de 1998)
Matemàtiques.

Siguin $\bar{u}$ i $\bar{v}$ els dos vectors del pla:

$$\bar{u} = (1,\ 1) \qquad \bar{v} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3})$$

Calculeu l'angle que formen $\bar{u}$ i $\bar{v}$. [2 punts]

–2 (Set. de 1998)
Mat. per a les CS

Sigui $\bar{v}$ el vector de components (1, 0). Considereu els punts del pla que tenen per coordenades $A = (-2, 9)$ i $B = (4, 7)$.

a) Calculeu els components del vector $\bar{u}$, que va del punt A al punt B.
b) Calculeu el valor del producte escalar $\bar{u} \cdot \bar{v}$.
c) Calculeu el valor de l'ordenada x del vector $\bar{w} = (2, x)$, de manera que el vector $\bar{u} + 3\bar{v}$ sigui perpendicular al vector $\bar{w}$.

[2 punts: 0,5 els apartats a) i b) i 1 l'apartat c)]

–3 (Set. de 1998)
Mat. per a les CS

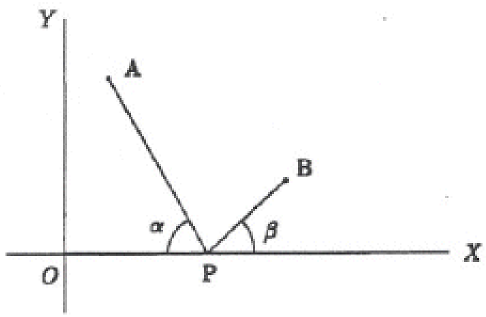
Un triangle ABC té els vèrtexs A i B situats respectivament en els punts de coordenades (1, 3) i (3, 1). El vèrtex C està situat sobre la recta d'equació $2x - y = 4$. Sabent que el triangle ABC és isòsceles i que AC i BC són els costats iguals, trobeu les coordenades de C i l'àrea del triangle. [4 punts]

–4 (Set. de 1998)
Mat. per a les CS

Trobeu les coordenades del punt simètric de $P = (3, -4)$ respecte a la recta $2x - 3y + 6 = 0$ (el punt simètric de P respecte a la recta r és el punt P', que té la propietat que la recta determinada per P i P' talla perpendicularment r en el punt mitjà del segment PP'). [2 punts]

–5 (Juny de 1998)
Matemàtiques

L'eix OX representa la banda d'una taula de billar. Una bola que està situada al punt $A = (1, 6)$ ha de tocar una bola situada al punt $B = (5, 2)$ després d'haver rebotat a la banda (quan una bola de billar rebota a la banda, els angles α i β de la figura són iguals).



Determineu:

a) El punt exacte P on la bola hauria de topar amb la banda.
b) L'equació de la trajectòria inicial que ha de seguir la bola.
c) L'equació de la trajectòria que segueix la bola després d'haver topat amb la banda, fins a tocar la bola en el punt B.
d) L'angle entre les trajectòries AP i PB. [4 punts: 1 cada apartat]

–6 (Juny de 1998)
Mat. per a les CS

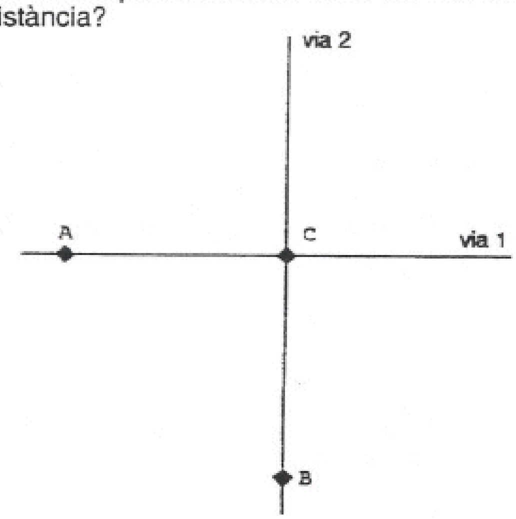
Considereu els punts $A = (-1, 3)$, $B = (5, 4)$, $C = (4, 1)$ i $D = (-2, 0)$. Comproveu que el quadrilàter $ABCD$ és un paral·lelogram i calculeu-ne les coordenades del centre (és a dir, del punt mitjà de qualsevol de les dues diagonals). [2 punts]

–7 (Juny de 1998) **Mat. per a les CS**	Comproveu que les rectes d'equacions $x - \sqrt{3}y = 1 - \sqrt{3}$ i $\sqrt{3}x - y = \sqrt{3} - 1$ es tallen en el punt (1, 1). Calculeu l'angle que formen. [2 punts]
–8 (Juny de 1998) **Mat. per a les CS**	Considereu el parell de rectes donades per les equacions $ax + (a+2)y = a - 2$ i $x + ay = 3$, on a és un paràmetre. a) Calculeu un vector director de cadascuna d'aquestes. b) Calculeu els valors de a per als quals les rectes són paral·leles. c) Calculeu els valors de a per als quals les rectes són perpendiculars. d) Calculeu la distància que hi ha entre les dues rectes quan $a = 2$. [4 punts: 1 cada apartat]
–9 (Set. de 1997) **Matemàtiques**	Quantes rectes del pla passen pel punt (1, –2) i formen un angle de 45 graus amb la recta d'equació $4x - 3y + 2 = 0$? Doneu les equacions de totes les que hi hagi. [2 punts]
–10 (Set. de 1997) **Matemàtiques**	Considereu les tres rectes del pla d'equacions $-x + y = 4$, $y = 1$ i $ax + y = 1$. Digueu per a quins valors del paràmetre a formen un triangle. Digueu per a quins valors de a formen un triangle d'àrea 2. Expliqueu en general com es pot saber si tres rectes del pla determinen un triangle. [4 punts]
–11 (Set. de 1997) **Mat. per a les CS**	Busqueu tots els vectors $\vec{v}$ del pla que tenen mòdul 5 i que són perpendiculars al vector $\vec{a} = (3, -4)$. [2 punts]
–12 (Set. de 1997) **Mat. per a les CS**	Un vèrtex d'un paral·lelogram és el punt A de coordenades (3, 2). Dos dels seus costats estan respectivament sobre les rectes r: $2x + 3y - 7 = 0$ i s: $x - 3y + 4 = 0$. Comproveu que A no està sobre les rectes r i s, i busqueu els vèrtexs restants. [2 punts]
–13 (Set. de 1997) **Mat. per a les CS**	Calculeu el punt d'intersecció i l'angle que formen les dues rectes d'equacions $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$ i $y = \sqrt{3}(x - 2)$ [2 punts]
–14 (Set. de 1997) **Mat. per a les CS**	Els punts $B = (3, 4)$ i $C = (1, 0)$ són vèrtexs d'un triangle isòsceles que té el tercer vèrtex a la recta $\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$ Sigui A el tercer vèrtex. Sabent que AB i AC són els costats iguals, calculeu les coordenades del punt A. [2 punts]
–15 (Juny de 1997) **Matemàtiques**	Calculeu un punt P de coordenades $(a, 0)$, amb $a > 0$, tal que les dues tangents a la circumferència $x^2 + y^2 = 4$ traçades des del punt P formin un angle de 60 graus. [2 punts]

–16 (Juny de 1997) **Matemàtiques** **[ ]**	Expliqueu raonadament algun mètode per decidir si tres punts del pla donats per les seves coordenades, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ i $C = (c_1, c_2)$, estan alineats o no ho estan. Decidiu, tot aplicant el mètode que hagueu explicat, si els punts $(-2, -3)$, $(-3, 0)$ i $(6, 2)$ estan alineats o no. [2 punts]
–17 (Juny de 1997) **Matemàtiques** **[ ]**	D'una circumferència representada en uns eixos cartesians de coordenades sabem que té el centre sobre l'eix de les x, i que és tangent a la recta $x + y - 8 = 0$ en el punt $(6, 2)$. Quines són les coordenades del centre? Quina és la longitud del radi? [2 punts]
–18 (Juny de 1997) **Matemàtiques** **[ ]**	Considereu els dos punts del pla P $(2, 5)$ i Q $(6, -1)$ i la recta d'equació $y = x - 3$. Digueu quants punts hi ha sobre aquesta recta que equidistin de P i de Q. Calculeu les coordenades de tots aquests punts. [2 punts]
–19 (Juny de 1997) **Matemàtiques** **[ ]**	De la representació d'un rombe en uns eixos cartesians en sabem que té dos vèrtexs situats en els punts $(3, 1)$ i $(-2, 1)$, i que una de les diagonals està sobre la recta d'equació $x - 2y - 1 = 0$. Determineu les coordenades de tots els vèrtexs del rombe. Justifiqueu la resposta. [4 punts]
–20 (Juny de 1997) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Calculeu l'equació de la recta r que passa pels punts $(2, -1)$ i $(1, 3)$. Quantes rectes hi ha que siguin paral·leles a r i distin 3 unitats de r? Escriviu l'equació d'aquestes rectes. [2 punts]
–21 (Juny de 1997) **Mat. per a les CS** **[ ]**	Donats els punts del pla $A = (4, 0)$, $B = (0, 1)$ i $C = (2, 3)$, calculeu l'angle ABC i l'àrea del triangle format pels tres punts. [2 punts]
–22 (Juny de 1997) **Mat. per a les CS** **[ ]**	

Dues vies de tren, 1 i 2, són perpendiculars entre elles i es tallen en el punt *C*, tal com indica el dibuix. A la via 1 hi ha la ciutat *A* i a la via 2, la ciutat *B*. Ambdues es troben a una distància de 100 km de *C*. Dos trens surten simultàniament de *A* i de *B* en sentits *AC* i *BC*, i amb velocitats constants de 30 km/h i de 50 km/h respectivament.

a) Quan el tren que va per la via 2 passa per *C*, a quina distància de *C* es troba l'altre tren?
b) Al cap de tres hores d'haver sortit, quines són les coordenades de les posicions dels trens (si s'agafa com a origen i com a eixos de coordenades els del dibuix) i quina és la distància entre ells?
c) Deduïu la fórmula de la distància *d* que separa els dos trens, en funció del temps transcorregut des que han sortit.
d) En quin instant de temps la distància entre els dos trens és mínima i quina és aquesta distància?



[4 punts]

–23 (Juny de 1997)
Mat. per a les CS

En el pla, donades les rectes d'equacions $ax + by = c$ i $a'x + b'y = c'$, expliqueu com es pot saber la seva posició relativa (si es tallen, si són paral·leles, si coincideixen). Calculeu la recta paral·lela a la recta d'equació $2x + y = 4$ que passa pel punt (1, 1). [2 punts]

–24 (Juny de 1997)
Mat. per a les CS

Els campanars *A*, *B*, *C* de tres esglésies dels Pirineus estan alineats de manera que la distància entre *B* i *C* és el doble de la distància entre *A* i *B*. Calculeu les possibles coordenades de *C* en un cert sistema de coordenades en el qual *A* és el punt (1, 0) i B el punt (3, 2). [2 punts]