# LA GEOMETRIA DE L'ESPAI A LES PAU

Qüestions i problemes resolts utilitzant la calculadora Wiris - Informació

| Jaume Bartrolí Brugués | IES M. Carrasco i Formiguera de Barcelona | http://www.xtec.cat/~jbartrol | jbartrol@xtec.cat |

| | |
|---|---|
| **60 (Set. de 2008) Matemàtiques** [ ] | Les rectes $r_1$: $\frac{x-a}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$ i $r_2$: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-b}{2}=\frac{z-4}{-1}$ són coplanàries (és a dir, estan incloses en un mateix pla).<br>*a*) Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.<br>*b*) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres $a$ i $b$.<br>*c*) Trobeu els valors de $a$ i $b$ si el pla que les conté passa pel punt $P = (2, 4, 6)$.<br>[1,5 punts per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 1,5 punts l'apartat *c*] |
| **59 (Set. de 2008) Matemàtiques** [ ] | Donats el punt $P = (7, 5, 1)$, el pla $\pi$: $x - 2y - 3z = 10$ i la recta $r$: $\begin{cases} 3x-2y+2z=7 \\ x-6y-2z=5 \end{cases}$:<br>*a*) Trobeu la distància del punt $P$ al pla $\pi$.<br>*b*) Trobeu la distància del punt $P$ a la recta $r$.<br>*c*) Trobeu la distància de la recta $r$ al pla $\pi$.<br>[0,5 punts per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 0,5 punts per l'apartat *c*] |
| **58 (Juny de 2008) Matemàtiques** [ ] | Donats el pla $\pi$: $3x - 2y + 5z = 6$ i la recta $r$: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-3}$, busqueu el punt de tall, si existeix.<br>[2 punts] |
| **57 (Juny de 2008) Matemàtiques** [ ] | Donades les rectes $r$: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ i $s$: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z+5}{3}$ i el punt $P = (1, 1, -1)$, volem trobar l'equació de la recta que passa per $P$ i que talla $r$ i $s$. Per aconseguir-ho:<br>*a*) Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla $\pi$ que conté la recta $r$ i el punt $P$.<br>*b*) Trobeu el punt $M$ calculant el punt d'intersecció del pla $\pi$ amb la recta $s$.<br>*c*) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts $P$ i $M$.<br>*d*) Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem.<br>[1 punt per cada apartat] |
| **56 (Juny de 2008) Matemàtiques** [ ] | Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla $\pi$: $2x - y + z + 3 = 0$, que passa pel punt $(-1, 3, a)$ del pla.<br>[2 punts] |

**55 (Set. de 2007) Matemàtiques**

Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre $m$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

***a***) Estudieu-ne el rang segons els valors de $m$.

***b***) Digueu quina és la posició relativa dels plans $\pi_1$: $x + y + 2z = 2$, $\pi_2$: $2x + my + 2mz = 2 + m$ i $\pi_3$: $mx + 2y + (2 + m)z = 0$, segons els valors de $m$.

[1 punt cada apartat]

**54 (Set. de 2007) Matemàtiques**

Una recta $r$ és paral·lela a la recta $s$: $x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt $A$ la recta $t: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$, i en un punt $B$ la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

***a***) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes $r$ i $t$.

***b***) Trobeu el punt $B$ calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta $l$.

***c***) Trobeu l'equació de la recta $r$.

***d***) Trobeu el punt $A$.

[1 punt cada apartat]

**53 (Set. de 2007) Matemàtiques**

Trobeu les equacions dels plans paral·lels a $\pi$: $2x - y + 2z = 3$ situats a 6 unitats de distància d'aquest.

[2 punts]

**52 (Juny de 2007) Matemàtiques**

Discutiu el sistema següent $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+py+2z=10 \\ px+6y+3z=12 \end{cases}$ en funció del paràmetre $p$. Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

[4 punts]

**51 (Set. de 2007) Matemàtiques**

Considereu la recta d'equació $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

***a***) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol $(x, y, z)$ de la recta al punt $P = (1, 2, 5)$ com una funció de la coordenada $x$.

***b***) Trobeu quin valor de $x$ fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt $Q$ de la recta és el més proper a $P$ i calculeu la distància del punt a la recta.

***c***) Escriviu l'equació de la recta que passa per $P$ i $Q$ i comproveu que és perpendicular a $r$.

[1,5 punts l'apartat *a*; 1,5 punts l'apartat *b*; 1 punt l'apartat *c*]

**50 (Juny de 2007) Matemàtiques**

Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla $\pi$: $x + 2y + 6z - 2 = 0$, que talla els eixos $OY$ i $OZ$.

[2 punts]

**49 (Juny de 2007) Matemàtiques**

Considereu els punts de l'espai $P = (-1,\ a - 1,\ 3)$, $Q = (0,\ a - 2,\ 1 - a)$ i $R = (2, -1, 6 - 6a)$.

*a*) Trobeu el valor de $a$ per al qual els tres punts estan alineats.

*b*) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

[1 punt cada apartat]

**48 (Juny de 2007) Matemàtiques**

A l'espai es consideren els tres plans d'equacions:

$\pi_1$: $x + 2y + z = 1$, $\pi_2$: $px + y + pz = 1$ i $\pi_3$: $px + y + 2z = 1$, on $p$ és un paràmetre real.

*a*) Esbrineu per a quins valors de $p$ els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p = 1$.

*b*) Hi ha algun valor de $p$ que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.

*c*) Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = 1/2$.

[2 punts l'apartat *a*, 1 punt l'apartat *b*, 1 punt l'apartat *c*]

**47 (Juny de 2007) Matemàtiques**

Trobeu els punts de la recta $r$: $x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans $\pi_1$: $4x - 3z - 1 = 0$ i $\pi_2$: $3x + 4y - 1 = 0$.

[2 punts]

**46 (Juny de 2007) Matemàtiques**

Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.

[2 punts]

**45 (Set. de 2006) Matemàtiques**

Determineu els extrems d'un segment *AB* sabent que el punt *A* pertany al pla $2x + y + z = 0$, el punt *B* pertany a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ i el punt mitjà del segment és (0,0,0).

[Puntuació: 2 punts]

**44 (Set. de 2006) Matemàtiques**

Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ que passa pel punt (0,1,0).

[Puntuació: 2 punts]

**43 (Juny de 2006) Matemàtiques**

Considereu la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ i el pla $p$: $2x - y + az + 2 = 0$ on $a$ és un paràmetre.

a) Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
b) Quin ha de ser el valor de $a$ per tal que la recta i el pla siguin paral·lels?
c) Esbrineu si existeixen valors de $a$ per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calculeu-los.
d) Esbrineu si existeixen valors de $a$ per als quals la recta i el pla formin un angle de 30º. En cas afirmatiu, calculeu-los.

[Puntuació: cada apartat val 1 punt. Total: 4 punts]

**42 (Juny de 2006) Matemàtiques**

**[ ]**

Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que passa pel punt (1,1,2). Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

[Puntuació: 2 punts]

**41 (Juny de 2006) Matemàtiques**

**[ ]**

Una recta $r$ passa pel punt $A = (3,0,2)$ i té la direcció del vector $(-1,1,4)$.

a) Trobeu quin angle forma $r$ amb el pla horitzontal.
b) Comproveu que no passa pel punt $B = (1,3,10)$.
c) Trobeu l'equació de la recta que passa per $A$ i $B$.

[Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1,5 punts. Total: 4 punts]

**40 (Juny de 2006) Matemàtiques**

**[ ]**

Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x,y,z) = (-1,1,1) + t \cdot (1,2,1)$ que estan a distància 1 del pla $2x + 2y + z = 5$.

[Puntuació: 2 punts]

**39 (Set. de 2005) Matemàtiques**

**[ ]**

Donats els punts $A = (1, 0, 0)$ i $B\ (0, 0, 1)$:

a) Trobeu un punt $C$ sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ que faci que el triangle $ABC$ sigui rectangle en $C$.

b) Trobeu l'àrea del triangle $ABC$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

**38 (Set. de 2005) Matemàtiques**

**[ ]**

Trobeu la distància entre la recta $r$: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$ i el pla $\pi$: $2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

[2 punts]

**37 (Set. de 2005)**
**Matemàtiques**
[ ]

Considereu els vectors de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1=(-1,\ 3,\ 4),\ \ \vec{v}_2=(2,\ -1,\ -3)\quad \text{i}\quad \vec{v}_3=(1,\ 2k+1,\ k+3).$$

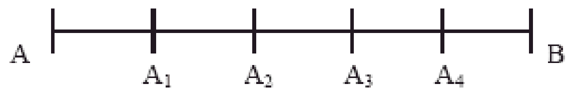
a) Trobeu l'únic valor de $k$ per al qual aquests vectors **no** són una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Per a un valor de $k$ diferent del que heu trobat en l'apartat a), quins són els components del vector $\vec{w}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3$ en la base $\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$?

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

**36 (Juny de 2005)**
**Matemàtiques**
[ ]

Un segment d'origen en el punt $A=(-1,4,-2)$ i extrem en el punt $B$ està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió $A_1$, $A_2$, $A_3$ i $A_4$ (vegeu la figura). Si sabem que $A_2=(1,0,2)$, quines són les coordenades de $B$?




[2 punts]

**35 (Juny de 2005)**
**Matemàtiques**
[ ]

Trobeu la distància entre la recta $r:\ \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{3}$ i el pla $\pi:\ 3x+4y+7=0$.

[2 punts]

**34 (Juny de 2005)**
**Matemàtiques**
[ ]

Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z=3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla $OXY$: $A=(1,0,0)$, $B=(1,1,0)$ i $C=(0,1,0)$.

a) Feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, $D$?

b) Quin és el volum de la piràmide? $\left[\text{Volum} = \dfrac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3}\right]$

c) Si el vèrtex de la piràmide és el punt $V=(a,b,3)$, quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts]

**33 (Set. de 2004)**
**Matemàtiques**
[ ]

Considereu les rectes

$$r:\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}\qquad \text{i}\qquad s:\begin{cases} x = 1+3t\\ y=-1-4t\\ z=5+t\end{cases}$$

a) Estudieu la seva posició relativa.
b) Trobeu l'equació del pla que conté $s$ i és paral·lel a $r$.
c) Calculeu la distància entre $r$ i $s$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1,5 punts. Total: 4 punts]

**32 (Juny de 2004) Matemàtiques**

Considereu els punts de l'espai $A(1, 1, 2)$, $B(0, 1, 1)$ i $C(k, 1, 5)$.

a) Trobeu l'equació de la recta que passa per $A$ i $B$.
b) Per a quins valors de $k$ els punts $A$, $B$ i $C$ formen un triangle?

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

**31 (Juny de 2004) Matemàtiques**

Considereu la recta $r$ d'equació

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

i el punt $M(2, 3, 7)$.

a) Trobeu, en funció de $t$, la distància de $M$ a un punt qualsevol de la recta $r$.
b) Trobeu les coordenades dels punts $A$ i $B$ de $r$ situats a distància $3\sqrt{2}$ del punt $M$.
c) El triangle $\Delta AMB$, és rectangle en $M$?
d) Els punts $A$ i $B$ formen part d'un paral·lelogram de vèrtexs $ABCD$ que té el centre de simetria en el punt $M$. Calculeu les coordenades de $C$ i $D$.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt; apartat d) 1 punt. Total: 4 punts]

**30 (Juny de 2004) Matemàtiques**

Considereu el vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ i la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

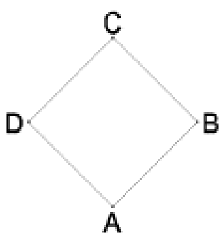
a) Trobeu tots els vectors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que fan que $A \cdot \vec{v} = \vec{w}$.

b) Quina condició han de complir $a$, $b$ i $c$ per tal que $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ no tingui cap vector $\vec{v}$ solució?

[Puntuació: apartat a) 2,5 punts; apartat b) 1,5 punts. Total: 4 punts]

**29 (Juny de 2004) Matemàtiques**

Els punts $A(k-3, 2, 4)$, $B(0, k+2, 2)$ i $C(-2, 6, k+1)$ són tres dels vèrtexs d'un rombe $ABCD$ (vegeu la figura).




a) Calculeu el valor de $k$.
b) Demostreu que el rombe és un quadrat.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

| | |
|---|---|
| **28 (Juny de 2004) Matemàtiques** | Considereu els punts de l'espai $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ i $C(0, -1, -1)$.<br><br>a) Trobeu l'equació del pla $ABC$.<br>b) Si $D$ és el punt de coordenades $(k, 0, 0)$, quant ha de valer $k$ per tal que els quatre punts $A$, $B$, $C$ i $D$ siguin coplanaris?<br>[2 punts] |
| **27 (Juny de 2004) Matemàtiques** | Tenim quatre punts a l'espai: $A(0, 0, 0)$; $B(0, 0, 2)$; $C(0, 2, 0)$ i $D(2, 0, 0)$. Es demana:<br><br>a) representeu gràficament els quatre punts;<br>b) calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular) $ABCD$;<br>c) trobeu l'equació del pla que passa per $B$, $C$ i $D$;<br>d) calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.<br>[Puntuació:<br>apartat a) 0,5 punts; apartat b) 1,5 punts; apartat c) 1 punt; apartat d) 1 punt. Total 4 punts] |
| **26 (Juny de 2004) Matemàtiques** | Considerem els punts de l'espai $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 2)$ i $C(-1, 2, 1)$. Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:<br><br>a) aquests punts, estan alineats?<br>b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?<br><br>Raoneu adequadament les respostes.<br><br>[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total 2 punts] |
| **25 (Set. de 2003) Matemàtiques** | Un segment d'extrems $A = (5, 3, 1)$ i $B = (4, 2, -1)$ es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a aquest segment. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.<br>[4 punts] |
| **24 (Set. de 2003) Matemàtiques** | Considereu els punts de l'espai $A = (0, -2a - 1, 4a - 2)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (3, -5, 3)$.<br><br>a) Comproveu que el triangle de vèrtexs $A$, $B$ i $C$ és rectangle en $B$ per a qualsevol valor de $a$.<br><br>b) Calculeu els valors de $a$ que fan que aquest triangle sigui isòsceles.<br>[2 punts] |
| **23 (Juny de 2003) Matemàtiques** | Determineu l'equació del pla que conté a la recta<br><br>$$x - 1 = \frac{y}{2} = z + 1$$<br><br>i passa per l'origen de coordenades. [2 punts] |

**22 (Juny de 2003)**
**Matemàtiques**

Considereu el punt $P = (5, -2, 9)$ i la recta $r$: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{6}$

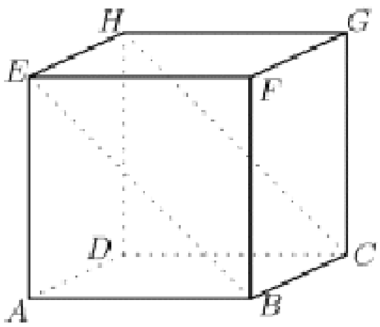
a) Calculeu l'equació de la recta $s$ que talla perpendicularment $r$ i que passa per $P$.

b) Calculeu el punt de tall $T$ entre les rectes $r$ i $s$.

[2 punts]

**21 (Set. de 2002)**
**Matemàtiques**

Considerem el cub de vèrtexs $A, B, C, D, E, F, G, H$ que té l'aresta de longitud 4 dm.




a) Determineu l'equació del pla inclinat $EHBC$ si prenem com a origen de coordenades el vèrtex $D$ i com a eixos de coordenades $DA$, $DC$ i $DH$ en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen $D$ va cap a $A$, $C$ i $H$, respectivament.
b) Calculeu les equacions de les diagonals $CE$ i $AG$ i utilitzeu-les per calcular les coordenades del seu punt d'intersecció.

[4 punts]

**20 (Set. de 2002)**
**Matemàtiques**

Comproveu que la recta que passa pels punts $A = (4, 0, 0)$ i $B = (0, 2, 2)$ és paral·lela al pla d'equació $x - 3y + 5z = 2$, i calculeu la distància entre la recta i el pla. [2 punts]

**19 (Juny de 2002)**
**Matemàtiques**

Considereu les rectes $r$ i $s$ amb les equacions següents:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y + \dfrac{1}{3} = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

a) Calculeu, de cada una de les rectes, un punt i un vector director.
b) Determineu si existeix cada un dels objectes següents i en cas afirmatiu calculeu la seva equació:

i) El pla paral·lel a la recta $s$ que conté la recta $r$.
ii) El pla perpendicular a la recta $s$ que conté la recta $r$.
iii) La recta perpendicular a les rectes $r$ i $s$ que passa per $(0, 0, 0)$.

[4 punts]

**18 (Juny de 2002)**
**Matemàtiques**

Calculeu l'angle que forma el pla $x - 2y + z = 1$ amb la recta determinada per les equacions $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$

[2 punts]

**17 (Juny de 2002)**
**Matemàtiques**

Considereu la recta $r$ d'equacions: $x - 1 = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-7}{-4}$. Calculeu els punts d'aquesta recta situats a una distància 3 del punt $A = (1, 0, 1)$.

[2 punts]

**16 (Juny de 2002)**
**Matemàtiques**

Considereu els plans d'equacions:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3 \quad \text{i} \quad \pi_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4.$$

a) Hi ha algun valor del paràmetre $a$ per al qual la intersecció dels plans $\pi_1$ i $\pi_2$ no és una recta?

b) Calculeu un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de $\pi_1$ i $\pi_2$ per al valor del paràmetre $a = 0$.

[2 punts]

**15 (Set. de 2001)**
**Matemàtiques**

Sigui $\pi$ el pla d'equació $x - y + 2z = 3$ i $P$ el punt (1, 1, 0).

a) Calculeu la distància $d$ de $P$ a $\pi$ .

b) Determineu l'equació de l'altre pla $\pi'$ paral·lel a $\pi$ que també dista $d$ del punt $P$.

c) Determineu l'equació de la recta $r$ perpendicular a $\pi$ que passa per $P$.

d) Calculeu la intersecció de la recta $r$ amb el pla $\pi$.

[4 punts]

**14 (Set. de 2001)**
**Matemàtiques**

Determineu per a quins valors del paràmetre $a$ el pla $\pi : ax + 2y + z = a$ és paral·lel a la recta $r$: $\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax + z = a + 1 \end{cases}$

[2 punts]

**13 (Juny de 2001)**
**Matemàtiques**

Considereu a l'espai la recta $r$ d'equacions $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+1}{-1}$ i la recta $s$ d'equacions $\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+4}{1}$

a) Determineu el punt de tall de la recta $r$ amb el pla $z = 0$.

b) Comproveu que les rectes $r$ i $s$ són paral·leles i calculeu la distància entre elles.

c) Quina és l'equació del pla que conté les dues rectes?

d) Calculeu la distància del pla anterior a l'origen de coordenades.

[4 punts]

**12 (Juny de 2001)**
**Matemàtiques**

Donats els punts de l'espai $A$ = (2, 0, 0), $B$ = (0, 1, 0) i $C$ = (0, 0, 3).

a) Determineu l'equació del pla $\pi$ que els conté.

b) Calculeu l'equació de la recta $r$ perpendicular al pla $\pi$ i que passa per l'origen.

[2 punts]

**11 (Set. de 2000) Matemàtiques**

Considereu la recta $r$ de l'espai que passa pel punt $P = (1, 1, 3)$ i té per vector director $\vec{v} = (1 - a, a, 1)$. Sigui $\pi$ el pla que té per equació $2x + y - z = 1$.

a) Determineu per a cada valor del paràmetre $a$ la posició relativa de la recta $r$ respecte al pla $\pi$ (paral·lela, continguda o amb un punt d'intersecció).
b) Hi ha alguna de les rectes $r$ que sigui perpendicular al pla $\pi$ ?
c) Calculeu la distància que hi ha entre el punt $P$ i el pla $\pi$.

[4 punts]

**10 (Set. de 2000) Matemàtiques**

Calculeu el peu de la recta perpendicular a la recta $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$ traçada des del punt $(1, 0, -1)$. [2 punts]

**9 (Set. de 2000) Matemàtiques**

Considereu la recta

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

i el pla $2x - y + az + 2 = 0$, on $a$ és un paràmetre.

a) Per a quin valor de $a$ la recta i el pla són paral·lels? Quina serà llavors la distància entre el punt $P = (1, 0, -1)$ de la recta i el pla?
b) Existeix algun valor de $a$ per al qual la recta i el pla siguin perpendiculars?
c) Determineu el valor de $a$ perquè la recta i el pla formin un angle de 30º.

[4 punts]

**8 (Set. de 2000) Matemàtiques**

Donats els vectors $\vec{u} = (1, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ i $\vec{w} = (1, 0, 0)$

a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents.
b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de $a$ i $b$ per tal que el vector $(a, 1, b)$ sigui combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

[2 punts]

**7 (Juny de 2000) Matemàtiques**

Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres $P = (3, -2, 4)$, $Q = (a, -1, a + 1)$ i $R = (2, -3, 0)$.

a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre enter $a$.
b) Calculeu l'equació del pla que conté aquest quadrat.
c) Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat.
d) Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.

[4 punts]

**6 (Juny de 2000) Matemàtiques**

Donats el pla $\pi$ d'equació $x + 2y + 3z - 1 = 0$, la recta $r$ d'equacions $\left\{\begin{array}{l} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{array}\right.$ i el punt $P = (2, 1, 1)$, calculeu:

a) Unes equacions de la recta que passa per $P$ i és perpendicular a $\pi$.
b) L'equació del pla que passa per $P$ i és perpendicular a la recta $r$.
c) Unes equacions de la recta que passa per $P$ i talla perpendicularment $r$.
d) Unes equacions de la recta que passa per $P$, és paral·lela al pla $\pi$ i tal que el seu vector director és perpendicular al de $r$.

[4 punts]

| | |
|---|---|
| **5 (Set. de 1999) Matemàtiques** | Donades les rectes $r_1$: $\begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ i $r_2$: $x = \dfrac{y}{3} = z$<br><br>Calculeu l'equació del pla paral·lel a les dues rectes que passa per l'origen. [2 punts] |
| **4 (Set. de 1999) Matemàtiques** | Donats els punts de l'espai $A = (2, 1, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (-3, 0, 0)$ i $D = (0, -1, 0)$<br><br>a) Són coplanaris? Formen un paral·lelogram?<br>b) Calculeu l'àrea del polígon $ABCD$.<br>c) Calculeu el punt simètric del punt $E = (1, 1, 2)$ respecte del pla que determinen $A$, $B$ i $C$.<br>d) Calculeu la distància entre la recta que passa per $E$ i $A$ i la recta que passa per $B$ i $C$.<br>[4 punts] |
| **3 (Set. de 1999) Matemàtiques** | Considereu la recta $r$ de l'espai d'equacions<br>$$\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{2}$$<br>Trobeu l'equació cartesiana del pla que conté $r$ i que passa pel punt $P = (1, 1, 1)$ (equació cartesiana vol dir la de la forma $ax + by + cz = d$).<br>[2 punts] |
| **2 (Juny de 1999) Matemàtiques** | Considereu les rectes $r: \dfrac{x-1}{2} = y = z - 2$ i $s: \begin{rcases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{rcases}$<br><br>Comproveu que aquestes dues rectes són paral·leles i calculeu l'equació del pla que les conté. [2 punts] |
| **1 (Juny de 1999) Matemàtiques** | Donat el tetràedre de vèrtexs $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (3, 0, 0)$ i $D = (0, 3, 0)$<br><br>a) Calculeu l'equació del pla que conté la cara $BCD$ i la del pla que conté la cara $ACD$.<br>b) Calculeu les equacions de dues de les altures del tetràedre, la que passa pel vèrtex $A$ i la que passa pel vèrtex $B$, respectivament. (Nota: altura d'un tetràedre és la recta que passa per un vèrtex i és perpendicular al pla que determina la cara oposada.)<br>c) Comproveu que les dues altures anteriors es tallen en un punt $P$.<br>d) Comproveu si la recta que uneix qualsevol vèrtex del tetràedre amb $P$ és perpendicular a la cara oposada (i és, per tant, una altura del tetràedre).<br>[4 punts] |
| **0 (Set. de 1998) Matemàtiques** | Donat el pla $\pi$ d'equació $2x - y + 2z = 4$ i el punt $H = (1, 3, -2)$, determineu les coordenades de la projecció ortogonal de $H$ sobre $\pi$. (Recordeu que la projecció ortogonal d'un punt $H$ sobre un pla $\pi$ és el peu de la perpendicular a $\pi$ traçada des de H.) [2 punts] |

**–1 (Set. de 1998)**
**Matemàtiques**

Donat el pla $\pi$ d'equació $x + 4y + z = 8$ i sent $A$, $B$ i $C$ els punts d'intersecció d'aquest pla amb els eixos de coordenades $OX$, $OY$ i $OZ$, respectivament:

a) Determineu les coordenades dels punts $A$, $B$ i $C$.
b) Determineu les equacions de la recta perpendicular al pla $\pi$ que passa per l'origen de coordenades.
c) Calculeu el volum del tetràedre determinat per $OABC$, on $O$ és l'origen de coordenades.
d) Calculeu la distància de l'origen de coordenades al pla $\pi$. Determineu l'àrea del triangle $ABC$ (podeu utilitzar el volum calculat en l'apartat anterior).

[4 punts: 1 cada apartat]

**–2 (Juny de 1998)**
**Matemàtiques**

a) Sigui $P$ un punt de l'espai, i $\pi$, un pla. Definiu el concepte de distància del punt $P$ al pla $\pi$.
b) Sigui $P$ el punt de coordenades (1, 1, 0), i $\pi$, el pla d'equació $x + y + z = 5$. Trobeu la distància de $P$ a $\pi$.

[2 punts: 1 cada apartat]

**–3 (Juny de 1998)**
**Matemàtiques**

Sigui $\pi$ el pla de l'espai que passa pel punt (0, 0, 3) i que conté els vectors $\bar{u} = (1, 2, -5)$ i $\bar{v} = (2, 1, -3)$. Sigui $r$ la recta d'equacions:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Escriviu l'equació cartesiana del pla $\pi$ (equació de la forma $ax + by + cz = d$).
b) Estudieu la posició relativa de $r$ respecte a $\pi$ (heu de dir si $r$ és paral·lela a $\pi$, si està continguda en $\pi$ o bé si talla $\pi$).

[2 punts: 1 cada apartat]

**–4 (Juny de 1998)**
**Matemàtiques**

Trobeu les equacions d'un pla paral·lel al pla d'equació $2x - 2y + z - 8 = 0$ i que dista d'aquest sis unitats. N'hi ha més d'un, de pla, que compleixi aquestes condicions? [2 punts]

**–5 (Set. de 1997)**
**Matemàtiques**

Considereu els punts de l'espai O (0, 0, 0), A (1, 1, 2) i B (1, –1, 3). Expresseu el vector OA com a suma d'un vector de la mateixa direcció que OB i d'un vector perpendicular a OB. Calculeu la distància del punt A a la recta determinada per O i per B. [2 punts]

**–6 (Set. de 1997)**
**Matemàtiques**

Un vector $\vec{v}$ de l'espai forma un angle de 60 graus amb l'eix de les $x$ i de 30 graus amb l'eix de les $y$. Sabent que les seves dues primeres coordenades són positives i que el seu mòdul és 7, calculeu les seves tres coordenades.

[2 punts]

**–7 (Set. de 1997)**
**Matemàtiques**

a) Si $A$, $B$ i $M$ són tres punts de l'espai que compleixen la relació

$$\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{AM}$$

digueu quin serà el valor de $r$ a l'expressió

$$\overrightarrow{MA} = r\,\overrightarrow{MB}$$

b) Si la relació anterior entre vectors s'hagués produït al pla i les coordenades de $A$ i $B$ fossin respectivament $(3, -5)$ i $(-5, 7)$, quines serien les coordenades del punt $M$? Justifiqueu la resposta. [2 punts: 1 punt cada apartat]

**–8 (Juny de 1997)**
**Matemàtiques**

Estudieu, segons els diferents valors que pot tenir el paràmetre $m$, les posicions relatives del pla $p$ i de la recta $r$ que es donen a continuació:

$$p:\ mx - 3y + 2z = 1 \qquad r: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$$

[2 punts]

**–9 (Juny de 1997)**
**Matemàtiques**

Estudieu la posició relativa de les dues rectes $r$ i $s$ de l'espai donades per les equacions següents:

$$r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -y \\ 2y + z = -3x + 5 \end{cases}$$

[2 punts]