

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

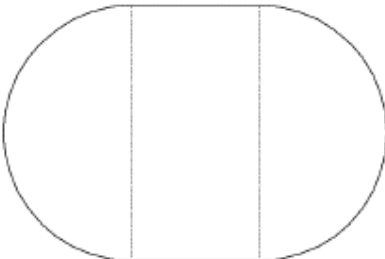
Qüestions i problemes resolts utilitzant la calculadora Wiris - [Informació](#)| Jaume Bartrolí Brugués | IES M. Carrasco i Formiguera de Barcelona | <http://www.xtec.cat/~jbartrol> | jbartrol@xtec.cat |

30 (Juny de 2008) Matemàtiques [1]	De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim. [2,5 punts pel càlcul dels catets; 1,5 punts per la comprovació]
29 (Juny de 2008) Mat. per a les CS [1]	Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300 €. Les despeses derivades de fabricar x televisors són $D(x) = 200x + x^2$, en què $0 \leq x \leq 80$. a) Suposant que es venen tots els televisors que es fabriquen, trobeu la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre x televisors. [1 punt] b) Determineu el nombre d'aparells que convé fabricar per a obtenir el benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim. [1 punt] (2 punts)
28 (Juny de 2008) Mat. per a les CS [1]	Un equip de treballadors ha de fer la collita d'un camp de pomeres a partir de l'1 d'octubre i només pot treballar durant un dia. Si la collita es fa l'1 d'octubre, es colliran 60 tones i el preu serà de 2000 €/tona. Sabem que a partir d'aquest dia, la quantitat que es pot collir augmenta en una tona cada dia, però el preu de la tona disminueix en 20 €/dia. a) Determineu la fórmula que expressa els ingressos que s'obtenen en funció del nombre de dies que es deixen passar des de l'1 d'octubre per fer la collita. [1 punt] b) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin màxims. [1 punt] c) Digueu quin és el valor màxim dels ingressos per la collita. [1 punt] d) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin els mateixos que si es fes el dia 1 d'octubre. [1 punt] (4 punts)
27 (Juny de 2007) Matemàtiques [1]	Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima. [4 punts]

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

26 (Juny de 2007) Mat. per a les CS 11	Els beneficis mensuals d'un artesà expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0,5x^2 + 50x - 800$, en què $20 \leq x \leq 60$. a) Trobeu el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes i en fabricar i vendre 60 objectes. b) Trobeu el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per a obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim. c) Feu un esbós del gràfic de la funció $B(x)$. d) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Digueu quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)
25 (Juny de 2006) Mat. per a les CS 11	El benefici $B(x)$ (expressat en milers d'euros) que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte és representat per la funció: $B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad 50 \leq x \leq 250.$ a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut? b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3.900 milers d'euros? c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues? Puntuació per cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.
24 (Juny de 2006) Mat. per a les CS 11	Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 6 €, hi van 320 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment de 0,25 € en el preu de l'entrada hi van 10 espectadors menys. Trobeu: a) la funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada; b) la funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada; c) el preu de l'entrada per tal que els ingressos del propietari siguin màxims; d) el nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims. Puntuació per cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.
23 (Set. de 2005) Matemàtiques 11	Considereu la funció $f(x) = 3 - x^2$ i un punt de la seva gràfica, M, situat en el primer quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$). Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determina dos punts, A i B, respectivament. a) Feu un gràfic dels elements del problema. b) Trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle $OAMB$ tingui l'àrea màxima. [Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

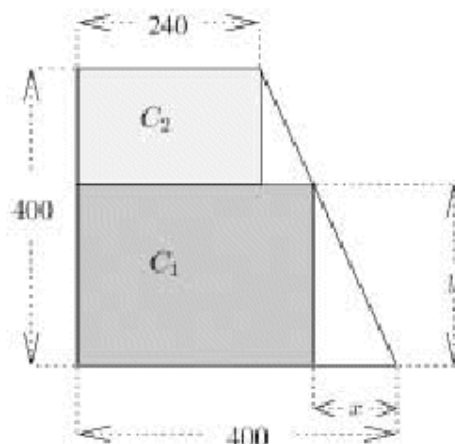
22 (Set. de 2005) Mat. per a les CS. [1]	Si una joguina es ven a 130 €, la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta aquest preu, disminueix en 50, respectivament, el nombre de compradors. a) Feu un gràfic del nombre de joguines que es venen en funció del preu de venda i doneu la fórmula que l'expressa. b) El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Calculeu el preu p, que dona un benefici total màxim. c) Trobeu el nombre de joguines que es venen si el preu és p i calculeu-ne el benefici màxim. Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt. Total: 4 punts.
21 (Juny de 2005) Matemàtiques [1]	La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0, y > 0$), talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B. a) Feu un gràfic dels elements del problema. b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima. [Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]
20 (Juny de 2004) Matemàtiques [1]	Donats la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i el punt $A(2, 0)$ situat sobre l'eix de les abscisses: a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt A a un punt qualsevol de la gràfica de la funció. b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A. [Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]
19 (Juny de 2004) Mat. per a les CS [1]	Es vol construir una piscina que tingui per base un rectangle i dos semicercles adjunts tal com s'indica a la figura següent:  Sabent que el perímetre de la piscina ha de ser de 30 m, calculeu les seves dimensions per tal que la superfície sigui màxima. Puntuació del plantejament: 2 punts; de la resolució: 2 punts. Total: 4 punts.
18 (Juny de 2004) Mat. per a les CS [1]	Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500$. a) Calculeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$. b) En quin punt de la corba és mínim el pendent de la recta tangent? Quin és el valor del pendent mínim? Puntuació: apartat a) 1,5 punts; apartat b) 2,5 punts. Total: 4 punts.

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

17 (Set. de 2003)
Matemàtiques

[1]

Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C_1 i C_2 . Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



- Comproveu que $y = \frac{5}{2}x$.
- Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de x .
- El camp C_1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C_2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m² i amb el blat un benefici de 0,10 € per m². Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim.

[1 punt els apartats a) i b) i 2 punts el c)]

16 (Set. de 2003)
Mat. per a les CS

[1]

Disposem de material per poder impermeabilitzar 200 m² de superfície. Volem fer una bassa de base rectangular en què la llargada mesuri el triple que l'amplada i amb la profunditat adequada per gastar tot el material. Interessa que el volum d'aigua que càpiga a la bassa sigui màxim.

- Escriviu la relació que hi ha entre l'altura i el costat petit de la base de la bassa.
- Escriviu la funció que dona la capacitat de la bassa en funció del costat petit de la base.
- Calculeu les dimensions de la bassa perquè la capacitat sigui màxima. (Els resultats s'han de precisar fins als centímetres.)
- Determineu-ne el volum.

Puntuació de cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

15 (Juny de 2003)
Matemàtiques

[1]

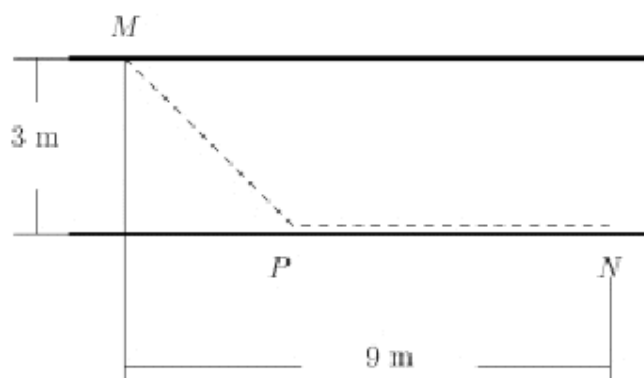
Determineu quin és el punt de la gràfica de $y = \sqrt{x}$ (és a dir, de la forma $(x, \sqrt{x})$), que és més a prop del punt $P = (4, 0)$.

[2 punts]

14 (Juny de 2003)
Matemàtiques

[1]

Volem unir el punt M situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P situat a l'altre costat del carrer i un altre des de P fins a N seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:



El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6 € per metre.

Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

[4 punts]

13 (Juny de 2003)
Mat. per a les CS

[1]

Amb un llistó de fusta de 300 cm de llarg volem fabricar el marc d'un quadre.

- Determineu la relació que hi ha entre la base i l'alçada del marc.
- Determineu la funció que expressa la superfície del quadre en termes de la base del marc.
- Feu un gràfic d'aquesta funció on es posin de manifest els seus intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
- Trobeu les dimensions del marc que fan màxima la superfície del quadre. Trobeu el valor de la superfície.

Puntuació de cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

12 (Juny de 2003)
Mat. per a les CS

[1]

Com a resultat del test efectuat amb un nou model d'automòbil per determinar-ne el consum de benzina, s'ha observat que, per a velocitats compreses entre 25 i 175 km/h, el consum $C(x)$ de gasolina, expressat en litres consumits en 100 km, fets a la velocitat constant de x km/h, es pot aproximar per la funció

$$C(x) = 7,5 - 0,05x + 0,00025x^2.$$

- Determineu el consum a les velocitats de 50 km/h i de 150 km/h.
- A quina velocitat s'obté el mínim consum? Quin és aquest consum mínim?
- Feu un estudi del creixement i decreixement de la funció $C(x)$ a l'interval $[25, 175]$. Determineu les velocitats que corresponen a consum màxim, així com aquest consum.

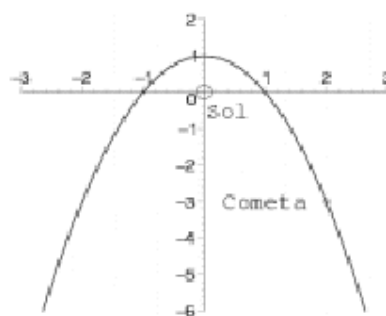
Puntuació: apartat a): 0,5 punts; apartat b): 2 punts; apartat c): 1,5 punts. Total: 4 punts.

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

11 (Set. de 2002)
Matemàtiques



Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal com es veu a la figura següent:



- Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?
- Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?
- Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?
- Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?

Nota:

Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.

[4 punts]

10 (Juny de 2002)
Matemàtiques



S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de $81\pi \text{ m}^3$ de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45 € el m^2 .

- Determineu la relació que hi haurà entre el radi r de les bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost $C(r)$ del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r .
- Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
- Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

[2 punts l'apartat a) i 1 els altres dos]

9 (Juny de 2002)
Mat. per a les CS



El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Venuda a 130 € la compren 1000 persones. Per cada € que augmenta o disminueix aquest preu, el nombre de compradors disminueix o augmenta, respectivament, en 60.

- A quin preu s'ha de vendre la joguina per obtenir un benefici màxim?
- Calculeu també el benefici màxim i el nombre de compradors corresponent.

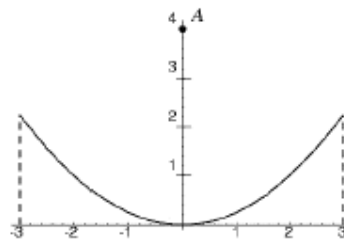
Puntuació: Planteig: 2 punts. Apartats a) i b): 1 punt cadascun. Total: 4 punts.

8 (Set. de 2001)
Matemàtiques



L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

La riba d'un tram de riu descriu la corba $y = \frac{1}{4}x^2$, per a x entre -3 i 3 , i en el punt $A = (0, 4)$ hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:



- Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x .
- Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?
- Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

[4 punts]

7 (Set. de 2001)
Mat. per a les CS

[1]

Una fàbrica de vídeos decideix introduir al mercat un nou model. El departament de màrqueting de l'empresa estima que la relació entre la demanda x del producte, mesurada en unitats, i el preu de venda p de cada unitat, mesurat en milers de ptes., ve donada per l'expressió

$$p = 100 - \frac{x}{12}$$

Els costos de producció estimats responen a la fórmula

$$C(x) = 1250 + 10x$$

Determineu:

- la demanda x en funció de p ;
- els costos $C(p)$ en funció del preu;
- els ingressos $I(p)$ que rep el fabricant per la venda d'aparells, en funció del preu;
- el benefici $B(p)$ del fabricant per la venda dels aparells, en funció del preu;
- el preu pel qual el benefici és màxim, el benefici màxim i el nombre d'unitats venudes corresponent.

Nota: Els apartats a) fins a d) valen 0,5 punts cadascun. L'apartat e) val 2 punts.

[4 punts]

6 (Juny de 2001)
Mat. per a les CS

[1]

En una indústria es produeixen recanvis de peces d'automòbil. S'ha fet un estudi de costos d'un dels recanvis fabricats i ha resultat que el cost diari de producció de x peces (en ptes.) ve donat per la funció

$$C(x) = 3200 + 20x + 2x^2.$$

- Quantes peces d'aquest recanvi s'han de produir diàriament perquè el cost unitari (el cost de cada peça) sigui el mínim possible?
- Quin és el cost diari de fabricar aquest nombre de peces?
- Quin és, en aquest cas, el preu de cost de cada peça?

Nota: L'apartat a) val 3 punts. Els altres dos apartats valen 0,5 punts cadascun.

[4 punts]

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

5 (Set. de 2000)
Matemàtiques
[1]

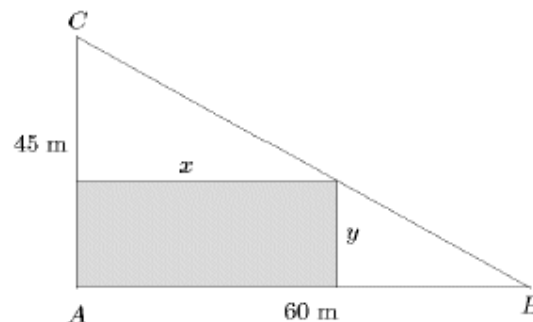
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

- Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.
- Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

[4 punts]

4 (Juny de 2000)
Matemàtiques
[1]

Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren $AB = 60$ m i $AC = 45$ m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:



Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.

- Determineu la relació que hi ha entre l'amplada x i la profunditat y del rectangle que determina la part edificable.
- Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada x del rectangle edificable.
- Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?
- Quin és aquest valor màxim?

[4 punts]

Proposta d'ampliació

3 (Juny de 2000)
Mat. per a les CS
[1]

Una entitat financera llança al mercat un pla d'inversió, la rendibilitat $R(x)$ del qual, en milers de pessetes, ve donada en funció de la quantitat x que s'inverteixi, per mitjà de l'expressió següent:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5$$

- Deduïu raonadament quina quantitat de diners li convé invertir a un client en aquest pla per obtenir rendibilitat màxima.
- Quina rendibilitat obtindria en aquest cas?

[2 punts]

2 (Set. de 1999)
Matemàtiques
[1]

Trobeu l'altura i el radi de la base del cilindre de volum màxim inscrit en una esfera de radi 1.

[4 punts]

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

1 (Juny de 1999)
Mat. per a les CS
[1]

Una empresa que fabrica un determinat producte ha observat experimentalment que la venda de x milers d'unitats diàries d'aquest producte li produeix uns ingressos en milions de pessetes donats per la funció següent:

$$I(x) = -\frac{11}{54}x^2 + \frac{235}{108}x - \frac{28}{27} \quad 2 \leq x \leq 5$$

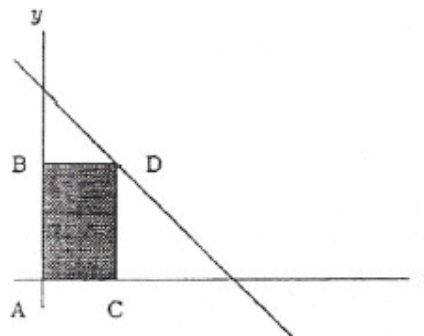
Així mateix el cost de fabricació de x milers d'unitats diàries del producte el dona (també en milions de pessetes) la funció

$$C(x) = \frac{3}{4}x + 1 \quad 2 \leq x \leq 5$$

Determineu quants milers d'unitats hauria de fabricar d'aquest producte per obtenir un benefici màxim. [4 punts]

0 (Set. de 1998)
Matemàtiques
[1]

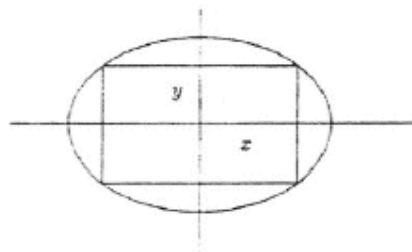
Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs A, B, C i D dels quals compleixen les condicions següents: a) A és l'origen de coordenades; b) B és a sobre del semieix de les $y > 0$; c) C és a sobre del semieix de les $x > 0$; d) D és a sobre de la recta d'equació $2x + y = 1$, tal com es veu en la figura següent:



D'entre tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima. [2 punts]

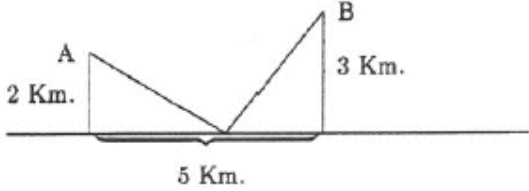
-1 (Juny de 1998)
Matemàtiques
[1]

Trobeu els costats d'un rectangle d'àrea màxima inscrit a l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, tal com s'indica en la figura següent:



[2 punts]

L'OPTIMITZACIÓ FUNCIONAL A LES PAU

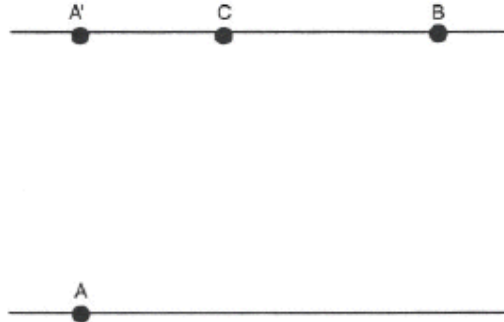
–2 (Juny de 1998) Matemàtiques [1]	Una via de tren passa a 2 km del poble A i a 3 km del poble B, de manera que el tram de via comprès entre ambdós pobles és de 5 km, tal com s'indica en la figura. Volem construir una nova estació ferroviària i una carretera formada per dos trams rectes que uneixi A amb B passant per l'estació. En quin punt del tram de via hem de col·locar l'estació si volem que el recorregut de A a B passant per la nova carretera sigui mínim? Quina serà la longitud total de la nova carretera? [4 punts] 
–3 (Juny de 1998) Mat. per a les CS [1]	En una fàbrica determinada, el cost de producció expressat en pessetes de x unitats d'un producte s'ajusta aproximadament a la funció $C(x) = x^3 + 16000, \quad \text{per a } x \geq 0$ a) Feu un esquema senzill de la gràfica d'aquesta funció (només per a $x \geq 0$). b) Trobeu la funció que representa el cost per unitat fabricada. Trobeu el cost mínim per unitat fabricada. [4 punts: 2 cada apartat]
–4 (Set. de 1997) Matemàtiques [1]	L'ajuntament d'una ciutat que passa greus dificultats pressupostàries ha decidit acceptar l'oferiment d'una coneguda fàbrica de galetes de contribuir a les despeses del parc municipal a canvi d'instal·lar sis metres de tanca publicitària dins del parc. Aquesta tanca encerclaria una zona que passaria a ser per a ús privat del personal de la fàbrica. Per raons estètiques l'empresa vol que la tanca s'instal·li segons una de les tres possibilitats següents: delimitant un recinte quadrat, delimitant un recinte circular o bé dos recintes, un de circular i l'altre de quadrat. Suposant que a l'ajuntament l'interessa preservar el màxim de superfície del parc per a ús públic, decidíu quina de les tres possibilitats és la millor i quina seria l'àrea (mínima) de parc que es perdria per a ús públic. [4 punts]
–5 (Set. de 1997) Mat. per a les CS [1]	Entre tots els rectangles d'un metre de diagonal, calculeu les dimensions (base i altura) d'aquell que té àrea màxima. [2 punts]
–6 (Juny de 1997) Matemàtiques [1]	S'ha d'editar un llibre i cada full ha de contenir 18 centímetres quadrats de text. Els marges superior i inferior de cada full han de tenir 2 centímetres cada un, i els marges laterals, 1 centímetre cada un. Calculeu les dimensions de cada full del llibre per tal que la despesa de paper sigui mínima. [2 punts]

-7 (Juny de 1997)
Matemàtiques

[1]

Una noia vol travessar el riu Ebre des d'un punt A fins a un punt B, tal com ens indica el dibuix adjunt. Per fer-ho anirà nedant fins a un punt C que encara no sabem quin ha de ser, i des d'allí anirà corrent fins a B. Podem considerar que en aquesta zona el riu té una amplada constant de 300 metres i que la distància entre A i B mesurada sobre el mateix marge del riu és de 4 quilòmetres (sobre el dibuix, distància entre A' i B). Aquesta noia sap que durant tota l'estona que vagi nedant podrà mantenir una velocitat constant de 6 km/h, i que tota l'estona que vagi corrent podrà mantenir una velocitat constant de 12 km/h. Fins a quin punt C haurà d'anar nedant per tal d'arribar al més ràpidament possible a B?

[4 punts]



-8 (Juny de 1997)
Mat. per a les CS

[1]

En una fàbrica de roba d'hivern actualment hi ha 3.000 abrics. Un comerciant està disposat a quedar-se tots els abrics de la fàbrica al preu de mercat, que actualment és de 5.000 pessetes, però cada dia que passa aquest preu disminueix en 80 pessetes. La fàbrica produeix 100 abrics per dia. Calculeu quin dia (inclòs avui) és el millor moment per vendre els abrics al comerciant i obtenir el major valor possible, i quin és aquest valor.

[4 punts]