EL LLENGUATGE DELS SUMATORIS

| Jaume Bartrolí Brugués | IES M. Carrasco i Formiguera de Barcelona | http://www.xtec.es/~jbartrol | jbartrol@pie.xtec.es |

El símbol $\sum$, anomenat **sumatori** i que correspon a la lletra grega **sigma** majúscula, s'utilitza per expressar en forma breu sumes amb molts termes.

1.- EXEMPLES

2.- TRES OBSERVACIONS SOBRE ELS SUMATORIS

3.- EXERCICIS AMB SUMATORIS

4.- CÀLCUL DE SUMATORIS UTILITZANT LA CALCULADORA WIRIS

1.- EXEMPLES

1) La suma dels primers 100 nombres naturals s'expressa utilitzant un sumatori

$$1+2+3+\ldots+99+100=\sum_{i=1}^{i=100} i$$

i es llegeix *"suma de i des de i=1 fins a i=100"*

2) La suma dels primers 25 nombres naturals parells es pot expressar

$$2+4+6+\ldots+48+50=\sum_{i=1}^{i=25} 2i$$

i es llegeix *"suma de 2i des de i=1 fins a i=25"*

3) La suma dels múltiples de 5 compresos entre 5 i 900 es pot expressar

$$5+10+15+\ldots+895+900=\sum_{i=1}^{i=180} 5i$$

i es llegeix *"suma de 5i des de i=1 fins a i=180".* Per què *"fins a i=180"?*

4) La suma dels quadrats dels primers 36 nombres naturals es pot expressar

$$1+4+9+16+\ldots+1225+1296=\sum_{i=1}^{i=36} i^2$$

i es llegeix *"suma de i^2 des de i=1 fins a i=36".* Per què els últims termes de la suma són 1225 i 1296?

5) La suma dels 25 primers nombres naturals imparells es pot expressar

$$1+3+5+\ldots+47+49=\sum_{i=1}^{i=50}(2i-1)$$

Com es llegeix?

6) Un sumatori es pot desenvolupar i obtenir l'expressió com a suma de termes

$$\sum_{i=1}^{i=100}(3i+5)=8+11+14+\ldots+302+305$$

7) Alguns termes d'un sumatori poden ser negatius, per exemple

$$\sum_{i=1}^{i=100}(3i-30)=-27-24-21-\ldots-3+0+3+6+\ldots+267+270$$

8) O tots negatius, com per exemple

$$\sum_{i=1}^{i=32}(1-2i)=-1-3-5-\ldots-59-61-63$$

9) O alternadament positius i negatius

$$\sum_{i=1}^{i=10}(-1)^i 2i=-2+4-6+8-10+12-14+16-18+20$$

10) Els termes també poden ser fraccions, per exemple

$$\sum_{i=1}^{i=20}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$$

$$\sum_{i=1}^{i=75}\frac{1-i}{1+i}=0+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{74}{76}$$

Quins seran els termes penúltim i antepenúltim del desenvolupament del sumatori anterior?

11) Els termes també poden ser irracionals, per exemple

$$\sum_{i=1}^{i=10}\sqrt[i]{2}=\sum_{i=1}^{i=10}2^{\frac{1}{i}}=2+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}+\ldots+\sqrt[10]{2}$$

12) La mitjana aritmètica de N valors X_1, X_2, X_3, ..., X_N, es pot expressar

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_N}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{i=N}X_i}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}X_i$$

13) Un polinomi de grau n, amb la indeterminada X i amb coeficients a_0, a_1, a_2, ... , a_n es pot expressar

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_iX^i$$

2.- TRES OBSERVACIONS SOBRE ELS SUMATORIS

OBSERVACIÓ 1

En els exemples anteriors la lletra *i* s'anomena **índex del sumatori**. És important saber que es pot utilitzar qualsevol lletra com a índex. Així alguns dels sumatoris anteriors també s'haurien pogut escriure

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \sum_{j=1}^{j=100} j \qquad 2 + 4 + 6 + \ldots + 48 + 50 = \sum_{k=1}^{k=25} 2k$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + 1225 + 1296 = \sum_{m=1}^{m=36} m^2 \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + 47 + 49 = \sum_{n=1}^{n=50} (2n-1)$$

$$\sum_{n=1}^{n=10} (-1)^n 2n = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 - 14 + 16 - 18 + 20$$

$$\sum_{n=1}^{n=20} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} \qquad \sum_{n=1}^{n=75} \frac{1-n}{1+n} = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{74}{76}$$

$$\sum_{n=1}^{n=10} \sqrt[n]{2} = \sum_{n=1}^{n=10} 2^{\frac{1}{n}} = 2 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \ldots + \sqrt[10]{2}$$

Les lletres més utilitzades com a índexs als sumatoris són i, j, k, n,...; són lletres que normalment s'utilitzen per indicar nombres naturals. En canvi, no s'acostuma utilitzar lletres, com x, y, z, que normalment s'utilitzen per indicar nombres reals.

OBSERVACIÓ 2

En els exemples anteriors, el primer valor que pren l'índex ha sigut sempre 1 (0 en l'exemple 13, cas dels polinomis). No té per que ser sempre així; poden donar-se sumatoris de la forma

$$\sum_{n=0}^{n=11} (n^2 + 1) = 1 + 2 + 5 + 10 + \ldots + 101 + 122$$

$$\sum_{k=5}^{K=12} \frac{k^2+1}{k} = \frac{26}{5} + \frac{37}{6} + \frac{50}{7} + \ldots + \frac{122}{11} + \frac{145}{12}$$

$$\sum_{j=-5}^{j=10} \frac{j-1}{j^2+1} = -\frac{6}{26} - \frac{5}{17} - \frac{4}{10} - \frac{3}{5} - 1 - 1 + 0 - \frac{1}{5} + \frac{2}{10} + \frac{3}{17} + \frac{4}{26} + \frac{5}{37} + \frac{6}{50} + \frac{7}{65} + \frac{8}{82} + \frac{9}{101}$$

Els valors extrems dels índexs s'anomenen **extrems o límits del sumatori**.

OBSERVACIÓ 3

Us trobareu sumatoris escrits sense tants detalls, per exemple:

a) per indicar l'extrem superior de l'índex i, no es posa *i=100* (o el valor que sigui), només es posa un *100*:

$$\sum_{i=1}^{100} i = \sum_{i=1}^{i=100} i \qquad \sum_{n=1}^{75} \frac{1-n}{1+n} = \sum_{n=1}^{n=75} \frac{1-n}{1+n} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{i=n} a_i X^i$$

b) en ocasions ni s'expressen els extrems inferior i superior de índex (per ser coneguts, suposadament coneguts, per mandra, ...); així una expressió com:

$$\sum_i a_i$$

voldrà dir *"sumar tots els ai"*, siguin els que siguin i valguin el que valguin.

c) finalment, quan és evident l'índex respecte del que es fa la suma, pot ser que no es posi aquest índex al sumatori:

$$\sum a_i$$

3.- EXERCICIS AMB SUMATORIS

Exercici 1

Desenvolupeu i calculeu els sumatoris:

$$\sum_{n=0}^{5} (3n+2) \qquad \sum_{n=0}^{5} (3n+2)^2 \qquad \sum_{n=0}^{5} (3n^2+2)$$

$$\sum_{i=0}^{6} 10^i \qquad \sum_{i=0}^{6} 10^{-i} \qquad \sum_{n=1}^{7} 3^n$$

$$\sum_{i=1}^{6} (2^i+10) \qquad \sum_{i=1}^{5} \frac{1-i}{1+i} \qquad \sum_{n=0}^{10} (-1)^n n$$

$$\sum_{i=1}^{10} 13 \qquad \sum_{n=1}^{10} 13 \qquad \sum_{i=1}^{10} 13n$$

Exercici 2

Desenvolupeu els següents sumatoris posant els tres primers termes, punts suspensius i els tres últims termes. Per exemple:

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{98}{99}+\frac{99}{100}+\frac{100}{101}$$

$$\sum_{n=0}^{60} (2n-3) \qquad \sum_{n=0}^{50} (2n-3)^2 \qquad \sum_{n=0}^{40} (2n^2-3)$$

$$\sum_{i=-6}^{6} 10^i \qquad \sum_{i=-6}^{6} 10^{-i} \qquad \sum_{n=1}^{60} 2^{-n}$$

$$\sum_{i=10}^{100}(2^i+10) \qquad \sum_{i=1}^{500}\frac{1-i}{1+i} \qquad \sum_{n=0}^{100}(-1)^n n$$

Exercici 3

Trobes alguna cosa estranya en els sumatoris següents?

$$\sum_{n=0}^{n=20}\frac{1}{n} \qquad \sum_{i=1}^{i=75}\frac{1+i}{1-i} \qquad \sum_{j=-5}^{j=10}\frac{j^2+1}{j-1} \qquad \sum_{k=-5}^{k=10}\frac{k^2+1}{k^2-1}$$

Exercici 4

Poseu en forma de sumatori les següents sumes:

$$2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\ldots+2\cdot 3^{31}+2\cdot 3^{32} \qquad 2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\ldots+2\cdot 3^{31}+2\cdot 3^{32}$$

$$2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+99\cdot 100 \qquad 2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+\ldots+100\cdot 101$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{30}{31}+\frac{31}{32} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{49}}+\frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$9+17+25+33+\ldots+153+161 \qquad 5+8+11+\ldots+89+92$$

4.- CÀLCUL DE SUMATORIS UTILITZANT LA CALCULADORA WIRIS

http://calculadora.edu365.com

WIRIS té tres formes possibles de calcular sumatoris: la instrucció **sigma** i els dos botons i de la pestanya **Operacions**. Explicarem com funcionen amb exemples. Seguidament tens una graella on hi ha sumatoris, obtindràs les tres formes de calcular-los amb la WIRIS clicant sobre els botons :

1	$1+2+3+\ldots+99+100=\sum_{i=1}^{i=100} i$
2	$2+4+6+\ldots+48+50=\sum_{k=1}^{k=25} 2k$
3	$1+4+9+16+\ldots+1225+1296=\sum_{m=1}^{m=36} m^2$
4	$1+3+5+\ldots+47+49=\sum_{n=1}^{n=50}(2n-1)$
5	$\sum_{i=1}^{i=32}(1-2i)=-1-3-5-\ldots-59-61-63$

6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=10}(-1)^n 2n = -2+4-6+8-10+12-14+16-18+20$

7 $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=20}\frac{1}{i} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$

8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{n=75}\frac{1-n}{1+n} = 0+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{74}{76}$

9 $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=10}\sqrt[i]{2} = \sum_{i=1}^{i=10}2^{\frac{1}{i}} = 2+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}+\ldots+\sqrt[10]{2}$

El límit inferior dels sumatoris de la graella anterior sempre és 1, però també amb la calculadora WIRIS es poden calcular sumatoris amb límit inferior diferent de 1. Per exemple:

10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=11}(n^2+1) = 1+2+5+10+\ldots+101+122$

11 $\displaystyle\sum_{k=5}^{K=12}\frac{k^2+1}{k} = \frac{26}{5}+\frac{37}{6}+\frac{50}{7}+\ldots+\frac{122}{11}+\frac{145}{12}$

12 $\displaystyle\sum_{j=-5}^{j=10}\frac{j-1}{j^2+1} = -\frac{6}{26}-\frac{5}{17}-\frac{4}{10}-\ldots+\frac{6}{50}+\frac{7}{65}+\frac{8}{82}+\frac{9}{101}$

Exercici 5

Planteja i calcula amb la WIRIS tots el sumatoris de l'**exercici 2**.

$$\sum_{n=0}^{60}(2n-3) \qquad \sum_{n=0}^{50}(2n-3)^2 \qquad \sum_{n=0}^{40}(2n^2-3)$$

$$\sum_{i=-6}^{6}10^i \qquad \sum_{i=-6}^{6}10^{-i} \qquad \sum_{n=1}^{60}2^{-n}$$

$$\sum_{i=-10}^{100}(2^i+10) \qquad \sum_{i=1}^{500}\frac{1-i}{1+i} \qquad \sum_{n=0}^{100}(-1)^n n$$

Exercici 6

Intenta calcular amb la WIRIS els sumatoris de l'**exercici 3** i observa els missatges d'error que surten.

$$\sum_{n=0}^{n=20}\frac{1}{n} \qquad \sum_{i=1}^{i=75}\frac{1+i}{1-i} \qquad \sum_{j=-5}^{j=10}\frac{j^2+1}{j-1} \qquad \sum_{k=-5}^{k=10}\frac{k^2+1}{k^2-1}$$