EL NOMBRE D'OR

Rosa García, Glòria Gonzàlez, Laia Riera.
Col·legi Badalonès. Tutores: M. Bolart, T. Fluvià. 2n de Batxillerat.

OBJECTIUS

El món de les matemàtiques sempre ha semblat distant, abstracte i fins i tot aïllat del món real, però si analitzem alguns aspectes matemàtics podem observar l'íntima relació del càlcul amb la vida quotidiana.

El nombre d'or n'és l'exemple més clar. La importància d'aquest nombre irracional, desconegut per la majoria, radica en les seves aparicions en tots els àmbits, ja que, com analitzarem més endavant, el trobem principalment a la geometria, a la natura, a la música, a l'arquitectura, i a l'art, que és on ens aturarem per analitzar obres i comprovar-ne la presència. Aquest nombre, fruit de la proporció considerada més harmoniosa, posseeix les propietats més curioses i inversemblants que només un nombre irracional pot aspirar a tenir.

Aquest nombre ha estat estudiat des de l'antiguitat, i en aquest treball es realitza una recopilació d'aquests estudis, principalment en el capítol 3. Posteriorment, en el capítol 3(, es fa una pràctica minuciosa sobre l'aparició de la secció divina en les pintures artístiques, tot intentant d'esbrinar una de les incògnites més importants: Aquesta divisió tan perfecta sorgeix d'una manera espontània o els artistes en feien un estudi previ?

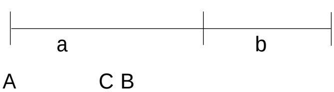
En aquests objectius d'analitzar matemàticament l'anomenat nombre d'or i estudiar-ne les aplicacions es basa aquest projecte, que d'una manera sorprenent ens ha desbordat d'informació, ja que aquest desconegut i misteriós nombre ha tingut durant segles milers d'admiradors que hi han fixat els seus propòsits intel·lectuals.

EL NOMBRE D'OR

Alguns nombres, com el 3 o el 7, han acumulat significats religiosos i apareixen amb gran freqüència en teologia o en les especulacions cabalístiques. És menys freqüent que els nombres que desperten aquest interès estètic, màgic, religiós, místic, siguin nombres irracionals, però l'escala pitagòrica no va trigar a acceptar amb entusiasme el nombre d'or o la secció àuria (Leonardo Da Vinci) o la proporció divina (Fra Luca di Pacioli). Alguna cosa deu tenir aquest nombre que es defineix a través d'aquests noms; en canvi els grecs no acceptaven el nombre $\sqrt{2}$ pel seu caràcter irracional. Així doncs, cal aclarir la classificació del nombre d'or com un nombre irracional, tal com són també l'arrel de dos, el nombre Pi i el nombre e.

La secció àuria representa la proporció més harmònica entre dues divisions, i la podem definir de la següent manera: Perquè un espai dividit en II parts iguals resulti agradable i estètic, haurà de mantenir entre la part petita i la gran la mateixa relació que entre la gran i la totalitat.

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$$



Les corresponents construccions geomètriques de la proporció àuria són molt senzilles.

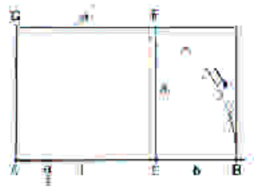
1.- Donat un segment AB, de longitud c, es pren sobre BY (perpendicular a AB) un segment BD= AB/2, unint A i D obtenim DE=DB=C/2.

Llavors, amb centre a A i radi AE, s'obté el punt c, que és el punt tal que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$$

2.-Si el segment donat és AC=a, es construeixen b i c sobre AC, es dibuixa el quadrat ACFG, es traça la recta OF que uneix F amb el punt mitjà 0 de AC i, amb O com a centre, es descriu l'arc de la circumferència FB. La longitud buscada b és el segment CB.

Sobre la línia AB estudiada es pot construir un rectangle, de tal manera que el costat més gran sigui tota la línia, i el costat més petit el segment més gran. Aquest rectangle pot descompondre's, alhora, en un quadrat de costat igual al menor del rectangle, i en un rectangle de costat més gran, igual al del quadrat, i de costat menor al segment d'aquesta recta.



Aquest rectangle, considerat com el més harmoniós, té una gran presència en la vida quotidiana. N'és un exemple molt clar la utilització en els carnets d'identitat.

En el món matemàtic, pot constituir un plaer per als especialistes que el nombre d'or pugui expressar-se com la fracció contínua més simple, on només aparegui l'1, o que sigui solució d'una equació algebraica de 2n grau. Així doncs, si considerem novament la igualtat $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$, i dividint per b els dos termes del segon membre (que no altera el valor), posem a/b=x, d'on:

$X= \frac{x + 1}{x}$

És a dir: $x^2= x+1$ o $x^2-x-1=0$

Equació de 2n grau en x, les arrels de la qual són: $x= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

És a dir, una arrel positiva: $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (que s'anota amb el nom Phi=1.618)

Una arrel negativa: $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (que s'anota amb el nom de Phi i agafem el valor absolut (0.618), ja que és igual a l'invers de l'arrel positiva perquè $x_1 * x_2 = -1$. Així doncs, Phi correspon a una posició de c, exterior al segment AB).

El nombre Phi, com ja hem mencionat, és irracional. No el podem expressar a través d'una fracció, ja que té infinits decimals no periòdics, però sí que podem trobar-hi molt bones aproximacions.

Una d'aquestes aproximacions la trobem a través de la propietat: Phi=1 + 1/Phi

Si tornem a substituir Phi per (1+1/Phi) successivament arribem a:

$$\boxed{\text{Phi}= 1+ \lim \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} = 1+1/(1+1/(1+1/(1+\ldots)))}$$

També podem trobar el nombre d'or a través del límit: $\text{Phi}=\lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ }}}$

I finalment podem trobar una aproximació del nombre Phi com a límit de dos termes consecutius de la sèrie de Fibonacci, és a dir, com a límit del quocient dels termes de la sèrie on un terme és igual a la suma dels dos anteriors. Per exemple: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{F_n+1}{F_n} = M$$

La importància de la successió de Fibonacci és la seva extensa aparició en tots els àmbits, i per tant, l'aparició del nombre d'or. Aquesta peculiar sèrie està íntimament relacionada amb la natura, ja que la podem observar en les pinyes dels pins, o en les espirals dels grans gira-sols, o fins i tot en l'espiral logarítmica de la closca del "Nautilius" o en la distribució de bifurcacions de branques en els arbres.

La raó àuria apareix també de forma ben diferenciada en geometria, tant en figures planes com tridimensionals. Respecte els polígons, cal dir que els pitagòrics van utilitzar com a emblema un estel de cinc puntes o pentagrama pístic, on la raó àuria apareix repetidament. El rectangle auri (altura 1 i base M) o el triangle auri (triangle isòsceles de costat 1 i base M) han estat en la base de construccions arquitectòniques emblemàtiques. Entre les més importants, la Gran Piràmide de Gizeh o el Partenó d'Atenes o, més recentment, en molts treballs que es deuen a Le Corbusier. Respecte a figures en l'espai, hem d'esmentar entre els cinc políedres regulars el dodecàedre, format per dotze cares pentagonals on apareix la proporció àuria. El coneixement d'aquest políedre semblava perillós als pitagòrics. El sòlid estava relacionat místicament amb el cosmos. Els quatre políedres van ser identificats d'alguna manera amb els quatre elements que suposaven que constituïen el món: terra, foc, aire i aigua. Van pensar doncs, que el cinquè sòlid regular només podia correspondre a la substància dels cossos celestials, i per aquest motiu s'havia d'ocultar a les persones vulgars la seva existència.

Altres aparicions del nombre d'or que hem de destacar és en la matemàtica analítica, on podem observar-ne la relació amb el triangle de Pascal, amb la trigonometria, i la seva aparició en l'espiral logarítmica.

Finalment, cal destacar que és present en el cos humà, ja que el melic de tota persona divideix en proporció àuria el seu cos. També en la música, on els acords perfectes es situen en posicions de termes de la successió de Fibonacci.

El capítol II d'aquest treball es centra en l'estudi d'obres pictòriques al llarg de la història de l'Art. La nostra intenció és esbrinar si en aquest sector artístic apareix la secció àuria, i si ho fa de manera intencionada o espontània. Per aquest motiu, hem fet un estudi canònic i iconològic de les obres, amb la finalitat de comprovar si els elements que es volen destacar són situats en proporció àuria.

CONCLUSIONS

Una vegada estudiades les obres, durant l'evolució de la pintura al llarg de la història, hem pogut apreciar que la divina proporció estava ben diferenciada, és a dir, era visible en algunes èpoques com el Renaixement, on la perfecció anava a parar a aquest nombre auri. En altres casos, percebem que aquesta proporció és espontània, és a dir, suposem que prèviament no s'ha fet un estudi canònic, sinó que l'harmonia que comporta aquesta proporció, ha fet als artistes pintar les obres o situar els elements destacats segons el nombre d'or, d'una manera innata. És el cas, per exemple, de l'impressionisme o la pintura contemporània.

Així doncs, una vegada analitzada la presència de la proporció àuria en les pintures artístiques, i ja vistes les múltiples aparicions i aplicacions del nombre d'or, podem afirmar que és omnipresent en el món quotidià. En llocs inesperats podem trobar aquesta magnitud i la seva proporció. N'és un exemple el nostre carnet d'identitat, construït a partir d'un rectangle auri.

Però el nombre d'or és molt més que el que s'ha exposat; no s'esgota en els pocs decimals amb què pot aproximar-lo l'arquitecte; tampoc no s'acaba en els primers termes de la sèrie de Fibonacci, sinó que segueix fins a l'infinit sempre divers. I si, per exemple, alcem la mirada i reflexionem més enllà fins a l'univers, trobem la proporció àuria, ja que si col·loquem els planetes en línia recta, la terra es troba en proporció àuria de la resta. Quina casualitat!, l'únic planeta on la vida és present.