

1. Què és un enunciat?

Es distingeix entre quatre tipus d'oracions:

- descriptives. Per exemple: «ara plou», «el sulfúric és un àcid molt corrosiu»
- imperatives. Per exemple: «vine aquí!», «no toquis això»
- interrogatives. Per exemple: «t'agrada la música clàssica?»
- exclamatives. Per exemple: «quin dia tant bonic que fa!»

D'aquestes oracions solament les descriptives (també anomenades declaratives o apofàntiques) poden ser verdaderes o falses, ja que són les úniques que afirmen o neguen alguna cosa. Fixem-nos, doncs, que les ordres, les preguntes i les exclamacions no són mai ni verdaderes ni falses. Així, la pregunta «quin dia és avui?» no és ni verdadera ni falsa. En canvi la resposta «avui és diumenge» sí que pot ser verdadera (si realment és diumenge el dia en que es contesta), o falsa (en cas contrari).

Un **enunciat** (del llatí *enuntiatio*, que tradueix el grec *lógos apofantikós*, oració categòrica, la que pot ser verdadera o falsa) és tota oració gramatical descriptiva, declarativa o apofàntica, és a dir, aquella oració que és capaç de ser verdadera o falsa, atès que tot enunciat expressa -o significa- una *proposició*. Això és així perquè solament les oracions descriptives o declaratives afirmen a neguen alguna cosa, a diferència de les oracions interrogatives, imperatives i exclamatives.

(Una **proposició** és el significat d'un enunciat, tot i que la distinció entre enunciat -cadena de signes que forma l'oració- i proposició -significat d'aquesta cadena de signes- és important, aquí utilitzem les dues expressions com si fossin equivalents)

El **principi de bivalència**, un dels fonaments de la lògica clàssica, estableix a més que tot enunciat, o proposició, ha de ser verdader o fals, i no les dues coses a la vegada.

2. Classes d'enunciat

Els enunciat poden ser **simples** (atòmics) o **compostos** (moleculares) i se simbolitzen mitjançant *lletres d'enunciat* (p , q , r , s ,... minúscules).

- Un enunciat és atòmic o simple quan no es pot descompondre sense perdre sentit. Per exemple, si diem «l'àcid sulfúric és molt corrosiu», aquest enunciat (i és un enunciat perquè és una oració descriptiva) no es pot descompondre, ja que si el "tallem" i, per exemple diem solament «l'àcid sulfúric», deixa de ser un enunciat, ja que aquesta oració no afirma ni nega res; no descriu res. Un enunciat simple es simbolitza per una lletra minúscula (generalment a partir de la p). Així l'enunciat «l'àcid sulfúric és molt corrosiu» es pot simbolitzar per p .
- Un enunciat és molecular o compost quan es pot descompondre en dos o més enunciat simples. Per exemple, si diem «En Joan va al cinema i menja crispetes» es pot descompondre en els dos enunciat següents: «En Joan va al cinema», que podem simbolitzar per p i «en Joan menja crispetes», que podem simbolitzar per q . Així queda com p i q , que en símbols és: $p \wedge q$

Els enunciat es combinen mitjançant **connectives** lògiques, també anomenades *connectors* o *operadors* (perquè operen entre enunciat). Aquests connectors es descriuen més endavant amb més detall, no obstant això, avancem que els principals connectors són:

Nom del connector	Es llegeix....	Símbol	Exemple
negació	«no»	$\neg$	$\neg p$, «no p»
conjunció	«i»	$\wedge$	$p \wedge q$, «p i q»
disjunció no exclusiva	«o»	$\vee$	$p \vee q$, «p o q»
condicional	«si ..., llavors....»	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$, «si p, llavors q»
bicondicional	«si, i solament si»	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$, «p, si i solament si q»

(Aquesta taula es repeteix més endavant i s'explica amb detall)

- Així, doncs, l'oració «les setmanes tenen set dies» és un exemple d'enunciat simple o atòmic, ja que no es pot descompondre en enunciat més senzills i es pot simbolitzar per la lletra p .
- L'oració «els anys de traspàs tenen 366 dies» és un altre exemple d'enunciat simple o atòmic i es pot simbolitzar per la lletra q .
- L'oració «Els anys de traspàs tenen 366 dies i les setmanes tenen set dies» es pot simbolitzar per $(q \wedge p)$
- En canvi l'oració «vine aquí ara mateix!», no és un enunciat, perquè expressa un imperatiu i no és una oració descriptiva. Per tant, no es simbolitza de cap manera en lògica d'enunciats. Igualment passa amb les oracions interrogatives i exclamatives.

3. El llenguatge formal de la lògica d'enunciats

La **sintaxi** del llenguatge formal de la lògica d'enunciats consta de:

1. Símbols.

1.1. Lletres d'enunciats: $p, q, r, s \dots$ (variables d'enunciats)

1.2. **Operadors o connectors:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (que es descriuen més endavant)

1.3. Constants.

1.4. Elements auxiliars, com $(...), [...]$

2. Regles de formació de fórmules.

2.1. Tota lletra d'enunciat és una *fórmula ben formada (fbf)* del llenguatge, i constitueix un enunciat simple.

2.2. Si P és una *fbf*, llavors també ho és $\neg P$

2.3. Si P i Q són *fbf*, també ho són: $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ i $(P \leftrightarrow Q)$

2.4. Cap altre expressió és una *fbf*

Els símbols i les regles de formació de fórmules constitueixen la **sintaxi** del llenguatge formal i, amb aquestes regles o **definicions recursives** de fórmula, és

possible decidir quina expressió pertany a aquest llenguatge i expressar una quantitat indefinida d'enunciats.

- Per exemple $(p \neg q r)$ no és una fórmula, ja que en aquest cas els enunciats no estan degudament units. Com si en matemàtiques escrivim $3+$ (que és incorrecte, mentre que, en canvi, $+3$ sí que té sentit matemàtic). En matemàtiques tampoc no seria correcte escriure $6\sqrt{}$ mentre que sí és correcte escriure $\sqrt{6}$
- Però $(p \wedge \neg q \rightarrow r)$ sí que és una *fbf* (fórmula ben formada). Igualment, en matemàtiques la fórmula $3+2 = 5$ és una fórmula ben formada. Un altre exemple. En castellà la frase "Mancha quiero lugar cuyo en de lugar la un nombre recordar no" no està ben formada perquè no segueix les regles gramaticals o les regles de la sintaxi castellana. En canvi la frase "En un lugar de la Mancha cuyo nombre no quiero recordar", és una frase ben formada en castellà. En els llenguatges *naturals*, com el català, l'anglès, etc., formem **frases**, en canvi en els llenguatges formals (com els de la lògica i les matemàtiques) formem **fórmules**.

3. Valors de veritat.

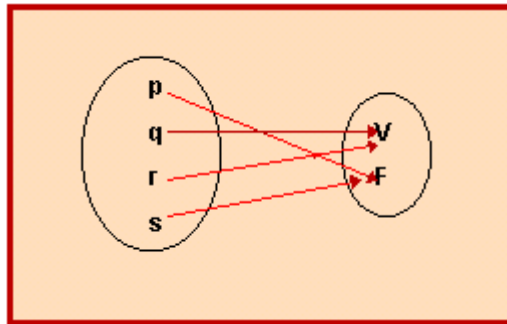
Un llenguatge formalitzat no consta només d'una *sintaxi* (a saber, *símbols* i regles de *formació de fórmules*), sinó també d'una **semàntica**: ha de poder ser *interpretat* (ha de referir-se a alguna cosa). **Interpretar** un llenguatge és atribuir significat a les seves constants (*símbols*) i a les seves variables (lletres d'enunciats). El significat que se li atribueix és el **valor de veritat**.

A tot enunciat descriptiu de caràcter empíric, que tracta de fets, li assignem un valor de veritat *concret* -sabem si és verdader o fals- segons la seva correspondència amb els fets que descriu; a un enunciat lògic, la referència del qual als fets s'ignora metodològicament, només podem assignar-li **valors de veritat possibles**.

És a dir, d'un enunciat lògic no tenim perquè saber si és *realment verdader* o fals, solament ens interessa saber que, ja que és un enunciat, *pot ser* verdader o fals. Exemple, la frase «els núvols són masses de vapor d'aigua» tracta de fets i pot ser una frase verdadera o falsa. És verdadera si es correspon amb els fets, és a dir, si *realment* els núvols són masses de vapor d'aigua. Però si en comptes de tenir la frase escrita o pronunciada en català tenim la seva representació simbòlica com a enunciat, és a dir si tenim "p", llavors no sabem si "p" és verdader o fals, però com que és un enunciat **sabem que pot ser verdader o fals**.

Així, a tota lletra d'enunciat se li assignen dos valors possibles: verdader o fals, que representem per V i F o per 1 i 0 (on $1 = V$, i $0 = F$, per tant, indistintament utilitzarem V o 1 com a "verdader", i 0 o F com a "fals")

Una *assignació* de valors de veritat és una aplicació d'un conjunt de lletres d'enunciat (*argument*: $p, q, r, s, \dots$) a un conjunt de valors de veritat (*valor*: V, F). Apliquem a cada lletra d'enunciat un sol valor de veritat V (1) o de falsedat F (0).



En aquesta figura, a l'enunciat p se li assigna el valor F, a q el valor V, a r el valor V i a s el valor F.

Una assignació és una **interpretació**. Una interpretació és, per tant, una aplicació o una **funció** que assigna a una fórmula, o expressió de lògica d'enunciats, els seus possibles valors de veritat.

Així, doncs, tot enunciat pot ser verdader o fals. Però com que si solament tenim "p" o "q" no sabem si *realment* "p" o "q" són o no veritaders o falsos, hem d'assignar-los tots els possibles valors. Quin és el número de possibles assignacions de valors?

El nombre d'assignacions per a cada fórmula és igual a 2^n , on n és el número de "lletres" d'enunciats.

Així, doncs, per a **una** (1) lletra d'enunciat, "p" la combinació és $2^1=2$ ($p = 1$ o V, $p = 0$ o F), i ho representem així:

p
1 V
0 F

Per a (2) **dues** lletres d'enunciat "p" i "q" el número de combinacions és de $2^2= 4$

p	q	
1 V	1 V	els dos són V
1 V	0 F	el primer és V i el segon és F
0 F	1 V	el primer és F i el segon és V
0 F	0 F	tots dos són F

Per a (3) **tres** lletres d'enunciat, $2^3=8$ possibles combinacions

p	q	r
1 V	1 V	1 V
1 V	1 V	0 F
1 V	0 F	1 V
1 V	0 F	0 F
0 F	1 V	1 V
0 F	1 V	0 F

0 F	0 F	1 V
0 F	0 F	0 F

En general, per tal de no equivocar-se a l'hora **d'assignar valors** es procedeix de la manera següent:

Si, per exemple, tenim **quatre** enunciat el número final és de $2^4=16$ valors. Aquests 16 valors es posen de la manera següent:

- a) a sota les caselles de la columna del primer enunciat es posen la meitat de valors (8, que és la meitat de 16) vertaders (representat per V o per 1), i 8 valors falsos (representats per F o per 0) (Total = 16)
- b) es posen un una segona columna la meitat de la meitat (4 vertaders i 4 falsos) i es torna a repetir (4 vertaders 4 falsos) (Total = 16)
- c) es posen en una tercera columna 2 vertaders, 2 falsos; 2 vertaders i 2 falsos; 2 vertaders i 2 falsos (Total = 16)
- e) es posen en una columna 1 valor de cada: un vertader, un fals, etc, fins al total de 16 valors.

Així:

p	q	r	s
1 (V)	1 (V)	1 (V)	1 (V)
1 (V)	1 (V)	1 (V)	0 (F)
1 (V)	1 (V)	0 (F)	1 (V)
1 (V)	1 (V)	0 (F)	0 (F)
1 (V)	0 (F)	1 (V)	1 (V)
1 (V)	0 (F)	1 (V)	0 (F)
1 (V)	0 (F)	0 (F)	1 (V)
1 (V)	0 (F)	0 (F)	0 (F)
0 (F)	1 (V)	1 (V)	1 (V)
0 (F)	1 (V)	1 (V)	0 (F)
0 (F)	1 (V)	0 (F)	1 (V)
0 (F)	1 (V)	0 (F)	0 (F)
0 (F)	0 (F)	1 (V)	1 (V)
0 (F)	0 (F)	1 (V)	0 (F)
0 (F)	0 (F)	0 (F)	1 (V)
0 (F)	0 (F)	0 (F)	0 (F)

Així, en la primera filera apareixen els quatre enunciats veritaders, en la segona filera els tres primers veritaders i el darrer fals, etc. fins arribar a la darrera filera o els quatre enunciats són simultàniament falsos.

A partir de la noció d'assignació de valors és possible definir cadascuna de les connectives com operadors **veritativo-funcionals**, perquè, aplicades a un enunciat simple (quan es tracta de $\neg$) o a dos enunciats simples (en els altres casos), donen un valor de veritat de l'enunciat compost que és funció del valor dels enunciats que el componen. Per aquesta raó les connectives es defineixen de la manera que s'exposa a continuació.

Indistintament podem utilitzar el número 1 o la lletra V com a símbol de verdader, i el número 0 o la lletra F com a símbol de fals. En els exemple anteriors hem posat tant els números 1 o 0 com les lletres V o F, però no fa falta utilitzar tots els símbols de lletres i números alhora i és millor utilitzar o sempre els números 0 i 1 o les lletres F i V com farem a partir d'ara.

4. Connectives o connectors:

«Una *connectiva veritativo-funcional* és una constant lògica que expressa una manera determinada d'interpretar el valor de veritat d'un enunciat compost a partir del valor de veritat dels components.» Aquests signes connectors enllacen, doncs, els diferents enunciats i segons com s'enllacen (segons quin connector fem servir) es modifiquen els seus valors de veritat.

La lògica defineix *cadascuna d'aquestes maneres* mitjançant una **taula de veritat** pròpia de cada connectiva.

Ja que no interessa el valor de veritat segons el *contingut material* dels enunciats, s'utilitzen lletres d'enunciats (lletres minúscules; $p, q, r, \dots$) en lloc d'enunciats (i per parlar de les lletres d'enunciats s'utilitzen també lletres, aquesta vegada, majúscules: $P, Q, R, \dots$, anomenades variables metalingüístiques).

Nom del connector	Es llegeix....	Símbol	Exemple
negació	«no»	$\neg$	$\neg p$, «no p»
conjunció	«i»	$\wedge$	$p \wedge q$, «p i q»
disjunció no exclusiva	«o»	$\vee$	$p \vee q$, «p o q»
condicional	«si ..., llavors....»	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$, «si p, llavors q»
bicondicional	«si, i solament si»	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$, «p, si i solament si q»

4.1 Negació: $\neg P$

P	$\neg P$
1	0
0	1

«"No P" és fals quan P és verdader i és verdader quan P és fals»

Per exemple:

- Si p («fa sol») és veritat, llavors $\neg p$ es fals («no fa sol» és fals)
- Si es fals que p (es fals que «fa sol»), llavors $\neg p$ es verdader («no fa sol»)

4.2 Conjunció: $P \wedge Q$

Una altra manera de representar-ho és

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

P	$\wedge$	Q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

« $P \wedge Q$ » és verdader només quan els seus enunciats components, P i Q són tots dos veraders».

Per exemple: Si p = «fa fred», y q = «fa vent» és veritat que «fa fred i vent» solament si veritat les dues coses alhora. En qualsevol altre cas és fals.

Fixem-nos que si diem $p \wedge q$ ens estem comprometen amb les dues afirmacions, per això tot el conjunt $(p \wedge q)$ solament serà verdader en el cas que tant "p" com "q" siguin simultàniament veraders. Així, si diem «és de dia i està plovent» aquest enunciat compost es pot simbolitzar per:

- «és de dia» = "p"
- «està plovent» = "q"

I la conjunció serà $(p \wedge q)$, que evidentment solament serà verdadera en el cas que realment sigui de dia i plougui. Si plou però és de nit la frase sencera ja no és verdadera, i tampoc no ho és si és de dia però no plou.

4.3 Disjunció: $P \vee Q$

Una altra manera de representar-ho és

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

P	$\vee$	Q
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

«"P o Q" és verdader quan és verdader P o quan és verdader Q, o ho són tots dos a la vegada»

Per exemple: Si p = «Anna és bona» y q = «Anna sembla bona», l'enunciat «Anna és bona o ho sembla» és veritat si resulta que és bona o si solament ho sembla, o si és bona i, a més a més, ho sembla.

Atenció, fixem-nos que es tracta d'una **disjunció no exclusiva**. Suposem que algú pregunta «On és en Joan?» i diem «és a la cuina o està escoltant música» tindriem que aquesta resposta es podria representar per:

- «(en Joan) és a la cuina» = " p "
- «(en Joan) està escoltant música» = " q "

En aquest cas " p " i " q " no s'exclouen i la disjunció seria ($p \vee q$). Com que ens hem compromès amb ($p \vee q$) tot aquest conjunt serà verdader en el cas que " p " sigui verdader, o en el cas que " q " sigui verdader, o en el cas en que tant " p " com " q " siguin veritats. Així, si en Joan no està a la cuina, però sí que escolta música tindrem que ($p \vee q$) és veritat. Igualment, encara que no escolti música, però sí que està a la cuina, també és veritat. Solament serà fals si no es compleixen cap de les dues afirmacions.

4.4 Condicional : $P \rightarrow Q$

Una altra manera de representar-ho és

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

P	$\rightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

«"Si P, llavors Q" és verdader sempre, menys quan l'antecedent, P, sigui verdader i el conseqüent, Q, fals»

Per exemple:

Si p = «Anna estudia» y q = «Anna aprova», si algú diu «si Anna estudia, aprova», ($p \rightarrow q$) serà verdader en els cassos següents:

- Anna estudia i aprova
- Anna no estudia però aprova
- Anna ni estudia ni aprova

L'enunciat solament és fals quan Anna estudia però no aprova

Segons com pot sembla antiintuïtiu, però el problema procedeix del fet que sovint es dona per suposat quelcom que no s'hauria de donar per suposat. Mirem l'exemple següent:

p = «plou» (que és una versió simplificada de l'enunciat «ara plou», que és un enunciat perquè pot ser V o F.

q = «es mullen els carrers de la ciutat» Examinem l'enunciat «Sempre que plou es mulla el terra dels carrers» ($p \rightarrow q$)

Repetim la taula:

P	$\rightarrow$	Q	
V	V	V	Si plou i es mullen els carrers, es compleix la condició i tot el condicional és V
V	F	F	Si plou i no es mullen els carrers, no es compleix la condició i tot el condicional és F
F	V	V	Si no plou i es mullen els carrers, no sabem què passaria si ploqués, que és el que hem suposat
F	V	F	Si no plou ni es mullen els carrers, no sabem què passaria si ploqués, que és el que hem suposat

Atenció!

El problema d'entendre bé la taula d'aquest exemple procedeix del fet que sovint pensem que la frase «si plou llavors es mullen els carrers de la ciutat» equival a dir «si NO plou llavors NO es mullen els carrers de la ciutat», però, *aquest no és l'enunciat que havíem dit*. Hi afegim subreptíciament una condició nova que no té perquè ser així. Si diem que «si p llavors q » no diem que «si no p llavors no q », que és un enunciat diferent. Per tant, en el que que no es doni p (és a dir, quan p és fals), com que no es dona la condició inicial no podem saber si es compleix la condició, ja que la limitàvem al cas en què p fos verdader.

4.5 Bicondicional: $P \leftrightarrow Q$

Una altra manera de representar-ho és

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

P	$\leftrightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

« P si i només si Q » és verdader quan P i Q són tots dos veritats o els dos falsos; en els altres casos, és fals». És a dir, p és condició de q i q és condició de p .

Per exemple: Si p = «ets feliç» y q = «estimes», l'enunciat «ets feliç si i solament si estimes», o «ets feliç sempre i quan estimes» és veritat quan «ets feliç i estimes» y quan «ni ets feliç ni estimes», però és fals si és veritat una de les coses i no ho és l'altra.

En realitat un bicondicional ($p \leftrightarrow q$) **equivale** a la conjunció dels dos condicionals següents $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. És a dir que $(p \leftrightarrow q)$ passa si passa $(p \rightarrow q)$ i al mateix temps passa també $(q \rightarrow p)$.

4.6. Quadre d'equivalència de notacions lògiques.

En diferents obres i escoles lògiques s'han utilitzat diferents símbols dels connectors. Aquí utilitzem la notació de Hilbert, però exposem la taula d'equivalències entre els diferents sistemes de notacions

Quadre d'equivalències de notacions lògiques			
	Principa matematica	Escola polaca	Hilbert
Negació	$\neg$	N	$\neg$
Conjunció	$\bullet$	K	$\wedge$
Disjunció	$\vee$	A	$\vee$
Condicional	$\supset$	C	$\rightarrow$
Bicondicional	$\blacksquare$	E	$\leftrightarrow$

4.7. Reducció de tots els connectors a dos.

En realitat tots els connectors (o partícules connectives) es poden reduir a una combinació de la negació " $\neg$ " i la conjunció " $\wedge$ ", o a una combinació de la negació " $\neg$ " i la disjunció " $\vee$ ".

Es pot provar que la fórmula condicional $(p \rightarrow q)$ equival a $\neg(p \wedge \neg q)$ i això també equival a $(\neg p \vee q)$

Com que el bicondicional $(p \leftrightarrow q)$ equival a $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$, si apliquem l'equivalència anterior tenim que, com que $(p \rightarrow q)$ equival a $\neg(p \wedge \neg q)$ i, igualment $(q \rightarrow p)$ equival a $\neg(q \wedge \neg p)$, tot el bicondicional

$(p \leftrightarrow q)$ **equivale** a $[\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)]$ i això equival a

$$\neg[(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)]$$

que a la vegada equival a $\neg[\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)]$

però, tot i que el valor sigui el mateix, evidentment és més fàcil escriure $(p \leftrightarrow q)$

Deixem al lector la prova de que aquestes fórmules són equivalents. Per tal de fer-ho primer cal veure la definició d'**equivalència lògica** que fem més endavant i, abans, encara, el concepte de **taules de veritat**.

5. Com afecten els parèntesis a l'assignació de valors?

Fixem-nos en l'exemple següent (que a més és un cas d'**equivalència lògica**)

1ª fórmula			2ª fórmula		
p	q		(p	→	q)
V	V		V	V	V
V	F		V	F	F
F	V		F	V	F
F	F		F	F	F

Cal notar que en el cas de $\neg(p \wedge \neg q)$ els valors de veritat de "p" no varien respecte dels de la fórmula $(p \rightarrow q)$ encara que davant del parèntesi hi hagi un signe de negació " $\neg$ ", mentre que " $\neg q$ " sí que és el contrari de "q". Però quan tot un parèntesi està afectat pel signe de negació " $\neg$ ", llavors el que varia és el valor total del parèntesi.

És a dir, quan p és V $\neg p$ és F; quan q és V, $\neg q$ és F, però quan la negació afecta a tot el parèntesi el que canvia és el valor final. En un altre lloc hem senyalat la semblança entre això i la fórmula matemàtica $(2+3)^2$, ja que també en aquest cas no s'eleva al quadrat ni el 2 ni el 3, sinó la suma, de manera que $(2+3)^2 = 5^2 = 25$ no és el mateix que $2^2 + 3^2 = 16$. Igualment en el cas $\neg(p \wedge q)$ la negació no afecta a p ni a q , sinó a la conjunció de p i de q .

Un altre cas:

1ª fórmula			2ª fórmula		
p	q		(p	→	q)
V	V		V	V	V
V	F		V	F	F
F	V		F	V	F
F	F		F	F	F

Com que aquí la segona fórmula és la negació de la primera, ja que $\neg(p \rightarrow q)$ és el contrari de $(p \rightarrow q)$ evidentment el valor de les dues fórmules és l'invers: quan $(p \rightarrow q)$ és V, llavors $\neg(p \rightarrow q)$ és F. Però veiem que el valor de l'enunciat p , és el mateix en una fórmula i en l'altra (ja que, en el mateix context, es tracta del mateix enunciat). Per altra part, quan q és V el seu contrari que és $\neg q$ és F i a l'inrevés. Finalment, com que tot el parèntesi $\neg(p \rightarrow q)$ està afectat per la negació, s'inverteixen els valors del resultat final.

L'abast de la negació quan afecta a un parèntesi és semblant al cas de les matemàtiques. Així, per exemple, si tenim la fórmula matemàtica $(3+2)^2 = 5^2 = 25$, sabem que **NO** és equivalent a $(3^2+2^2) = 9+4 = 16$, perquè el signe d'eleva al quadrat no afecta als números que hi ha dintre el parèntesi, sinó al resultat de l'operació entre aquests números (en aquest cas, a la suma d'aquests números). Igualment, el signe de negació " $\neg$ " quan està fora d'un parèntesi (que, a diferència de les fórmules matemàtiques es posa abans del parèntesi) no afecta a cada enunciat que hi ha dintre el parèntesi, sinó a la connexió entre aquests enunciats

6. Taules de veritat

Algorisme que permet demostrar si una expressió de lògica d'enunciats és o no una fórmula lògicament verdadera.

La noció de **funció** de veritat, que permet crear taules de tots els possibles valors de veritat d'una fórmula, permet també analitzar el valor de veritat de qualsevol expressió de lògica d'enunciats. Per això, *una taula de veritat és també un mètode o procediment semàntic* que:

1. Permet decidir si una fórmula és una **tautologia**, una **contradicció**, o una expressió **consistent**, i si dues o més fórmules són **lògicament equivalents**. I en connexió amb això, suposat que tot raonament formalment vàlid és una tautologia -una **implicació** sempre verdadera-, i
2. permet decidir si una seqüència d'enunciats, o de fórmules de lògica d'enunciats, constitueix un *raonament vàlid*.

6.1. Fórmules tautològiques

Una fórmula és una tautologia si és verdadera per a qualsevol assignació de valors de veritat. En una taula de veritat, la tautologia dóna sempre valors veraders

Per exemple, si tenim $(p \wedge q) \rightarrow p$ la seva taula de veritat és

p	q		(p	^	q)	→	p
V	V		V	V	V	V	V
V	F		V	F	F	V	V
F	V		F	F	V	V	F
F	F		F	F	V	V	F

Un altre exemple:

1ª fórmula			2ª fórmula						
p	q		(p	^	¬q)	→	¬(¬p	∨	q)
V	V		V	F	F	V	F	F	V
V	F		V	V	V	V	F	V	F
F	V		F	F	F	V	V	F	V
F	F		F	F	V	V	V	F	F

Valor
final

Veiem que els valors de $\neg p$ són els contraris de p ; els valors de $\neg q$ són els contraris dels valors de q i que la negació que afecta tot el parèntesi inverteix el valor de veritat de tot el parèntesi que afecta. Finalment, després de trobar els valors de la 1ª fórmula i de la 2ª fórmula, apliquem la taula de valors del condicional entre les dues fórmules i obtenim el valor final que, com és veu, sempre és V.

6.2. Fórmules contradictòries

Una fórmula és contradictòria si és falsa per a qualsevol assignació de valors de veritat. La negació d'una tautologia és una contradicció. Per exemple, la negació de la primera de les fórmules anteriors.

$\neg[(p \wedge q) \rightarrow p]$ La seva taula de veritat és:

p	q		$\neg[(p \wedge q) \rightarrow p]$
V	V		F
V	F		F
F	V		F
F	F		F

on el valor final és sempre F perquè és la negació del valor de la tautologia

6.3. Fórmules consistentes o neutres

Una fórmula és consistent (o neutre) si hi ha almenys una assignació que la fa verdadera; i no és, per tant, ni tautològica ni contradictòria.

Per exemple: $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$

p	q	r		$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V		V
V	V	F		F
V	F	V		V
V	F	F		V
F	V	V		V
F	V	F		V
F	F	V		V
F	F	F		V

No és, doncs, ni una tautologia ni una contradicció, ja que segons els valors assignats aquesta fórmula pot ser V o F. També s'anomenen fórmules neutres.

Exemple. Sigui la fórmula $\neg(p \wedge q)$, si examinem la seva taula tenim:

p	q		$\neg(p \wedge q)$
V	V		F
V	F		V
F	V		V

F	F		F	V	F
---	---	--	---	---	---

És una fórmula que és falsa quan els enunciats p i q són veritables, en canvi és verdadera en qualsevol altre cas. Suposem que p = "els cargols són vertebrats", i q = "les estrelles de mar són insectes". En aquest cas els dos enunciats són falsos i tota la fórmula "no és veritat que els cargols són vertebrats i les estrelles de mar són insectes", que simbolitzem per $\neg(p \wedge q)$, és una fórmula verdadera. (És el cas de la darrera filera de valors).

Suposem que p = "els cargols són vertebrats", i q = "les estrelles de mar són equinoderms". En aquest cas el primer enunciat és fals i el segon és veritable, i tota la fórmula $\neg(p \wedge q)$ és verdadera. (És el cas de la tercera filera de valors)

Suposem que p = "els cargols són mol·luscs", i q = "les estrelles de mar són aus". En aquest cas el primer enunciat és veritable i el segon és fals, i tota la fórmula $\neg(p \wedge q)$ és verdadera. (És el cas de la segona filera de valors)

Suposem que p = "els cargols són mol·luscs", i q = "les estrelles de mar són equinoderms". En aquest cas el primer enunciat és veritable i el segon també, i tota la fórmula $\neg(p \wedge q)$ és falsa. (És el cas de la primera filera de valors).

Segon exemple:

Sigui la fórmula següent (que té estructura de raonament, ja que és una fórmula condicional l'antecedent del qual està format per enunciats units per conjuncions:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$$

1	V	V	F	F	V	F
2	V	F	F	F	V	V
3	F	V	V	V	F	F
4	F	V	F	V	V	V

Com es pot veure, en les fileres 3^a i 4^a les dues premisses $(p \rightarrow q)$ i $\neg p$ són simultàniament veritables. Això garanteix que el raonament sigui consistent. De fet solament que una vegada totes les premisses siguin veritables ja ho garanteix. Ara bé, tal com també es pot comprovar, en el cas de la 3^a filera, quan les dues premisses són veritables, la conclusió és falsa i, per tant, és fals que es derivi de les premisses. Per això aquest raonament no és una tautologia, tampoc és una contradicció, sinó que és una fórmula consistent neutre. La conclusió no és realment tal, ja que no es dedueix necessàriament de les premisses, tot i que en certs cassos sí que deriva d'elles.

6.4. Fórmules equivalents

Dues fórmules són equivalents si les assignacions de valors que fan verdadera a una d'elles fan també verdadera a l'altra, i viceversa, i si les assignacions de valors que fan falsa a una d'elles fan també falsa a l'altra, i viceversa.

Les taules de dues fórmules equivalents són iguals. Per exemple, donades les fórmules $(p \rightarrow q)$ i $(\neg q \rightarrow \neg p)$ tindrem

p	q		(p	→	q)		(¬q	→	¬p)
V	V		V	V	V		F	V	F
V	F		V	F	F		V	F	F
F	V		F	V	V		F	V	V
F	F		F	V	F		V	V	V

Les dues taules tenen els mateixos enunciats i la mateixa taula de valors (en el mateix ordre), és dir que són lògicament equivalents. Així, doncs, és el mateix dir $(p \rightarrow q)$ que dir $(\neg q \rightarrow \neg p)$. Si ho interpretem i establim que l'enunciat p vol dir "plou" i l'enunciat q vol dir "es mullen els carrers", en aquest cas tindríem que l'enunciat condicional que diu "si plou llavors es mullen els carrers" equival a l'enunciat que diu "si no es mullen els carrers, llavors és que no plou".

Ara bé, fixem-nos que l'enunciat $(p \rightarrow q)$ **NO és equivalent** a $(\neg p \rightarrow \neg q)$

p	q		(p	→	q)		(¬p	→	¬q)
V	V		V	V	V		F	V	F
V	F		V	F	F		F	V	V
F	V		F	V	V		V	F	F
F	F		F	V	F		V	V	V

Per tant l'afirmació que diu "si plou llavors es mullen els carrers", **NO equival** a dir "si no plou no es mullen els carrers", ja que veiem que la taula de valors de les dues fórmules és diferent. El condicional estableix la condició "si plou... etc.", però no ens ofereix cap informació de què passa quan no plou. En canvi, com acabem de veure la fórmula $(p \rightarrow q)$ **Sí equival** a $(\neg q \rightarrow \neg p)$, per tant dir "si plou llavors es mullen els carrers" Sí que equival a dir "si no es mullen els carrers llavors és que no plou"

Segon exemple de fórmules equivalents (que a més demostra que el condicional es pot reduir a negacions i conjuncions):

p	q		(p	→	q)		¬(	p	∧	¬q)
V	V		V	V	V			V	V	F
V	F		V	F	F			V	F	V
F	V		F	V	V			F	V	F
F	F		F	V	F			F	V	V

Cal notar que en el cas de $\neg(p \wedge \neg q)$ els valors de veritat de " p " no varien respecte dels de la fórmula $(p \rightarrow q)$ encara que davant del parèntesis hi hagi un signe de negació " $\neg$ ", mentre que " $\neg q$ " sí que és el contrari de " q ". Però quan tot un parèntesi està afectat pel signe de negació " $\neg$ ", llavors el que varia és el valor total del parèntesi.

Tercer exemple de fórmules equivalents. Tal com he dit més amunt, al parlar del bicondicional senyalàvem que $(p \leftrightarrow q)$ equival a la conjunció dels dos condicionals següents $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Provem-ho:

$$(p \leftrightarrow q) \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow R)$	$\neg R$	P
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0

V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
1 ^r	2 ⁿ	4 ^t	3 ^r			

1. Primer escrivim la taula de veritat del bicondicional ($p \leftrightarrow q$). A partir de l'ordre de valors de "p" i de "q" que hem posat veiem que la taula del bicondicional és **V F F V**
2. Segon, escrivim la taula del primer condicional ($p \rightarrow q$) tenint en compte l'ordre dels valors que hem assignat a "p" i a "q", ja que sempre les fileres horitzontals han de seguir el mateix ordre de valors. Tenim que el valor d'aquesta taula és **V F V V**.
3. Tercer, escrivim la taula del segon bicondicional ($q \rightarrow p$). Apliquem la taula que defineix el condicional (sempre és V excepte quan l'antecedent és V i el conseqüent és F) i tenim que el valor final és **V V F V**
4. Quart. Apliquem la taula de la conjunció " $\wedge$ " entre les dues columnes dels valors dels dos condicionals i obtenim el valor de la conjunció $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. El valor final és **V F F V**
5. Cinquè, comparem aquest darrer valor amb el del bicondicional i veiem que tenen els mateixos valors i en el mateix ordre. Per tant, veiem que $(p \leftrightarrow q)$ i $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ són dues fórmules que tenen els mateixos enunciats i els mateixos valors de veritat en el mateix ordre, per tant, hem demostrat que són equivalents.

Altres exemples que es poden provar:

- la fórmula $\neg(p \wedge q)$ equival a $(\neg p \vee \neg q)$,
- la fórmula $\neg(p \wedge \neg q)$ equival a $(p \rightarrow q)$

6.5. Taules de veritat: conseqüència lògica i independència lògica

Les taules permeten, a més, comprovar la **conseqüència lògica** (**veure exemple**) i la independència lògica entre enunciats o fórmules (**veure exemple**).

Independència lògica

Una fórmula "B" és lògicament independent d'una altra fórmula "A" o d'un conjunt de fórmules " Δ " si i solament si no és una conseqüència lògica d'elles. És a dir, "B" és lògicament independent d'un conjunt " Δ " de fórmules ($\Delta = A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ = premisses) si i solament si hi ha alguna interpretació que fa verdader al conjunt " Δ " però no a la conclusió.

Per exemple, siguin el raonament següent:

- 1^a premissa ($P \rightarrow Q$),
- 2^a premissa ($Q \rightarrow R$),
- 3^a premissa $\neg R$
- Pretesa conclusió P ?

El conjunt Δ en aquest cas és $(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R), \neg R \models P$?

La taula de veritat prova que la pretesa conclusió P és lògicament independent.

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge \neg R \rightarrow P$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Tenim la taula representada tant amb 1 i 0 com amb V i F tenim:

6.6 Prova d'invalidesa, procediment indirecte o reducció a l'absurd

Un altre procediment per provar si un raonament és o no vàlid que també es basa en l'ús de taules de veritat, consisteix en intentar provar si pot ser fals. En el cas que suposem que el raonament és fals, assignem valors als enunciat i llavors poden passar dues coses:

- **a) arribem a una contradicció.** Si arribem a una contradicció, ja que aquesta procedeix de la suposició que el raonament era fals, demostra que no pot ser fals i, per tant, és verdader.
- **b) no arribem a cap contradicció.** Com que hem partit de la possibilitat que el raonament fos fals, si no ens contradiem és que realment pot ser fals i, per tant, la conclusió no és conseqüència lògica de les premisses.

Exemples:

Abans hem provat que el raonament $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ era vàlid i que la conclusió és conseqüència lògica de les premisses.

Provem-ho ara pel mètode indirecte o de reducció a l'absurd. Per fer-ho suposem que tot el raonament és fals. Com que té forma de fórmula condicional suposem que el resultat final és F.

$$\begin{array}{l} 1r \\ pas \end{array} \quad [(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

F

Com que un condicional solament pot ser fals si el seu antecedent és verdader i el seu conseqüent és fals, per ser coherents amb la nostra suposició inicial segons la qual tot el raonament és fals, estem **obligats** a suposar que el valor del conseqüent ($\neg p$) és F i el valor de tot l'antecedent és V

$$\begin{array}{l} 2n \\ pas \end{array} \quad [(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

V F F

Però atès que l'antecedent està format per una conjunció ($\wedge$) i una conjunció solament port ser verdadera si els seus membres són simultàniament veraders, per ser coherents amb la nostra suposició inicial segons la qual tot el raonament és fals, estem **obligats** a suposar que el valor de $(p \rightarrow q)$ i el valor de $\neg q$ són veraders.

$$\begin{array}{c} 3^r \\ \text{pas} \end{array} \quad [(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

V	V	V	F	F
---	---	---	---	---

Ara tenim que, per ser coherents amb la nostra suposició inicial segons la qual tot el raonament era fals, hem hagut d'assignar uns valors. En el cas del condicional $(p \rightarrow q)$ ens hem vist **obligats** a suposar que havia de ser V. Però al mateix temps hem estat **obligats** a assignar el valor F a $\neg p$ (per tant $p = V$) i V a $\neg q$ (per tant $q = F$). Si ara posem aquests valors als membres del condicional "p" i "q" tenim:

$$\begin{array}{c} 4^t \\ \text{pas} \end{array} \quad [(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

V	V	F	V	V	F	F
---	---	---	---	---	---	---

I això no és possible, ja que un condicional amb antecedent verdader i conseqüent fals no pot ser verdader. Per tant, partint de la suposició inicial segons la qual tot el raonament era fals, ens hem vist **obligats** a suposar uns valors que ens han conduït a una contradicció. Com que aquesta contradicció procedeix de la suposició segons la qual el raonament és fals... contradiu aquest supòsit i, per tant, el raonament no pot ser fals. Per tant, és necessàriament verdader.

En canvi, l'exemple següent

Sempre que plou es mullen els carrers de la ciutat
S'han mullat els carrers de la ciutat

Plou

és un cas de l'anomenada fal·làcia de l'**afirmació del conseqüent**.

La seva *forma lògica* és $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$

Si es fa la seva taula de valors es comprova que no és una fórmula vàlida, ja que és possible que les dues premisses $(p \rightarrow q)$, q siguin veraderes i no ho sigui la conclusió (p)

$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$	$\wedge$	q	$\rightarrow$	p
F	V	V	V	F

Es pot veure que **no hi ha contradicció en suposar que és fals**, de manera que és possible que, quan l'enunciat p (ploure) és fals i l'enunciat q (mullar-se els carrers) és verdader el raonament és fals. Evidentment això és així perquè és possible que no plogui (per tant p és fals), però que algú hagi regat, de manera

que q sigui verdader. Partint, doncs, del supòsit que el raonament era fals, arribem a veure que res contradiu aquesta possibilitat, per tant, l'argument pot ser fals.