# La travessa com a joc d'atzar


## Josep Lluis Cañadilla

IES Baix Penedès. jcanadil@pie.xtec.es


**Introducció**

Les màquines escurabutxaques, els casinos, els bingos, les loteries,... les mil i una formes de gastar diners i guanyar-ne són molt abundants en la nostra societat. Així ho demostren les dades facilitades pel Ministeri de l'Interior al 1995: a l'estat Espanyol es van gastar en aquests jocs d'atzar 3,1 bilions de pessetes anuals (la meitat que en alimentació); concretament, més d'un bilió de pessetes en màquines escurabutxaques i 62.000 milions de pessetes en la travessa. La gent busca guanyar diners, molts i ràpidament, i no se n'adona de la poca probabilitat que hi ha de guanyar. La qüestió ha arribat a transcendir tant que s'han creat associacions de ludòpates per lluitar contra l'addicció al joc.

El paper que juguen els jocs d'atzar en la nostra societat és força complex. A l'Estat li permeten recaptar diners per la via dels impostos, i també són moltes les persones que viuen del comerç d'aquests productes. En molts casos es crea un hàbit de joc i es converteix en "*la ilusión de todos los dias*". Per Nadal la loteria és objecte de regal i de participació col·lectiva. Es creen penyes futbolístiques per fer travesses. A l'ONCE, i a tota mena de col·lectius i associacions, les loteries els permeten aconseguir diners per a diferents accions socials.

Els jocs d'atzar no són exclusius de la nostra cultura actual. Pensem que hi ha referències històriques molt conegudes. A la Bíblia trobem aquesta frase: "..es van jugar als daus les seves vestidures...". Cap al 1654 el cavaller de Méré va plantejar a Pascal diverses qüestions de probabilitat sobre el joc dels daus, Pascal i Fermat van intercanviar diverses cartes sobre aquest problemes, el contingut de les quals va constituir el punt de partida de la moderna teoria de probabilitats.

A nosaltres, els professors i les professores, els jocs d'atzar ens permeten treballar de forma contextualitzada la combinatòria i la probabilitat. Els daus, les monedes i les cartes són un bon exemple de material manipulatiu per treballar a la classe. Les loteries: el cupó de l'Once, el dècim de la Loteria Nacional, la Loto 6/49, el trio, etc. acostumen a ser objecte d'activitats proposades a l'alumnat. Per exemple, en el cas concret de la travessa de futbol, acostumem a preguntar:

"Quantes travesses diferents de 15 resultats hi ha?", "Quina és la probabilitat que el primer resultat d'una travessa sigui un 2? I que tots 15 resultats siguin dosos?".

Les solucions que donem són:

El nombre de travesses possibles és:
$VR_{3,15} = 3^{15} = 14.348.907$.

P(sortir el primer un 2) =

$$= \frac{CF}{CP} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 \text{ o bé } 33,3\ \%.$$

P(tots dosos) =

$$= \frac{CF}{CP} = \frac{1}{3^{15}} \cong 6,969 \cdot 10^{-8} \text{ o bé el } 0,000007\ \%.$$

La primera solució és un càlcul combinatori. Per a les altres dues estem suposant que:

- les travesses són un joc d'atzar. Ho són en el sentit que no podem predir el resultat d'un partit, el resultat és incert. Però no ho són en el sentit que no podem repetir els partits tantes vegades com nosaltres vulguem amb les mateixes condicions.

- tots els esdeveniments elementals són equiprobables, premissa indispensable per poder aplicar la fórmula de Laplace. És a dir, estem suposant en la segona pregunta que l'1, l'x i el 2 tenen les mateixes possibilitats de sortir, i en la tercera pregunta estem suposant que qualsevol de les travesses possibles té les mateixes possibilitats de sortir que una altra. Però són realment equiprobables aquests esdeveniments elementals? Aquells/es que sapigueu una mica de futbol, sabreu que acostumen a sortir més 1 que x o que 2, per què el fet de jugar a casa comporta una sèrie d'avantatges que facilita guanyar el partit.

**Freqüència relativa i probabilitat**

Suposant que es tracti d'un veritable joc d'atzar, si els esdeveniments no són equiprobables, com podem respondre a les dues preguntes anteriors? Recordem, per un moment, com solucionem el problema de la xinxeta: *"En llançar una xinxeta, aquesta pot caure punxa amunt o de costat. Quina és la probabilitat de caure de costat?"*. No podem aplicar la fórmula de Laplace i dir que la probabilitat és 0,5, perquè els dos esdeveniments no són o no sabem si són equiprobables. No ens queda més remei que llançar la xinxeta moltes vegades i observar la tendència de les freqüències relatives de l'esdeveniment "caure de costat". Aquest nombre al qual tendeixen les freqüències relatives és la probabilitat de l'esdeveniment "caure de costat".

Amb les travesses de futbol podríem utilitzar un procés semblant. He compilat informació sobre els resultats de les travesses corresponents a les deu últimes temporades, des de la 92/93 fins a la 01/02. Les dades les podeu trobar a la pàgina web de l'Organismo Nacional de Loterías y Apuestas del Estado, estan en format pdf. Per al tractament de les dades he utilitzat el full de càlcul Microsoft Excel; he dedicat un full a cada temporada i un altre al resum de les dades obtingudes.

He observat que a la temporada 92/93 es van jugar 41 jornades, el nombre total d'1 va ser 279, el d'x 184 i el de 2 va ser 152; això representa un 45,37%, 29,92% i 24,72%, respectivament. La taula 1 ens mostra els resultat de les deu temporades:

**Taula 1**

| temporada | jornades | 1 | x | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 92-93 | 41 | 45,37% | 29,92% | 24,72% |
| 93-94 | 36 | 47,22% | 29,81% | 22,96% |
| 94-95 | 40 | 45,33% | 31,17% | 23,50% |
| 95-96 | 38 | 43,68% | 28,95% | 27,37% |
| 96-97 | 42 | 47,14% | 26,35% | 26,51% |
| 97-98 | 40 | 46,83% | 29,33% | 23,83% |
| 98-99 | 42 | 45,87% | 28,73% | 25,40% |
| 99-00 | 41 | 45,37% | 29,76% | 24,88% |
| 00-01 | 42 | 48,57% | 27,30% | 24,13% |
| 01-02 | 43 | 44,03% | 29,61% | 26,36% |

He calculat el màxim, el mínim, el rang, la mediana i la mitjana ponderada dels tres valors. El resultat ha estat el següent:

**Taula 2**

| | 1 | x | 2 |
|---|---|---|---|
| mínim | 43,68% | 26,35% | 22,96% |
| mitjana ponderada | 45,94% | 29,07% | 24,99% |
| mediana | 45,62% | 29,47% | 24,80% |
| màxim | 48,57% | 31,17% | 27,37% |
| rang | 4,89 | 4,82 | 4,41 |
| desviació típica | 1,512 | 1,381 | 1,433 |
| coeficient de variació | 0,033 | 0,047 | 0,057 |

Aquests resultats ens mostren que en totes les temporades estudiades el percentatge d'1, d'x i de 2 és pràcticament el mateix, amb un rang de 5 punts percentuals. Sembla raonable suposar que hi ha una certa regularitat i adoptar la hipòtesi que els resultats no depenen de la temporada. A més, els valors estan al voltant de 46%, 29% i 25%, respectivament i podem assignar aquests valor com a probabilitats a posteriori dels esdeveniments elementals 1, x i 2. Una vegada adoptat aquest model teòric tenim que els elementals 1, x i 2 no són equiprobables; per exemple, hi ha el doble de possibilitats que el primer resultat sigui un 1 que sigui un 2. A tall d'anècdota, podem dir que la norma que els partits guanyats valen tres punts, que va entrar en vigor la temporada 95/96, no ha fet baixar el percentatge d'empats dels partits que surten a la travessa.

Tenint en compte aquests resultats, la resposta a la segona pregunta del problema inicial és:

$$\text{P(sortir el primer un 2)} = 0{,}25$$

Suposant que els resultats dels diversos partits són independents entre si, la resposta a la tercera pregunta del problema inicial és:

$$\text{P(sortir tot dosos)} = (\text{P(sortir dos)})^{15} = 0{,}25^{15}$$
$$= 9{,}313 \cdot 10^{-10}$$

**Model probabilístic**

A partir d'ara suposaré que la travessa és de 14 partits, es a dir, no tindré en compte el 15è partit, que en qüestió de premis és un cas especial. Plantegem-nos tres noves qüestions, una mica més complicades:

a) Quantes travesses diferents amb set 1, quatre x i tres 2 són possibles?

b) Quina és la probabilitat que el resultat d'una travessa sigui:

1 1 1 1 1 1 1 x x x x 2 2 2

c) Quina és la probabilitat que el nombre d'1 sigui set, el d'x sigui quatre i el de 2 sigui tres?

La resposta a la primera pregunta ens la dóna la combinatòria:

$$PR_{14}^{7,4,3} = \frac{14!}{7!\cdot 4!\cdot 3!} = 120.120$$

La resposta a la segona pregunta, tenint en compte la independència, és:

$$P(1111111xxxx222) = (0{,}46)^7 \cdot (0{,}29)^4 \cdot (0{,}25)^3$$
$$= 4{,}816 \cdot 10^{-7}$$

La resposta a la tercera pregunta es basa en què els 120.120 esdeveniments tenen la mateixa probabilitat i són incompatibles.

$$P(\text{set 1, quatre x i tres 2}) =$$
$$PR_{14}^{7,4,3} \cdot (0{,}46)^7 \cdot (0{,}29)^4 \cdot (0{,}25)^3 = 0{,}0579$$

Acabem de trobar un model probabilístic del nombre d'1, d'x i de 2 d'una travessa de futbol:

$$\text{P(a 1, b x i c 2)} =$$
$$PR_{14}^{a,b,c} \cdot (0{,}46)^a \cdot (0{,}29)^b \cdot (0{,}25)^c$$

Comparem el nostre model probabilístic amb els resultats de les travesses de les deu últimes temporades. La taula 3 ens mostra les diferents probabilitats en tant per cent segons el nombre d'1 i d'x que obtenim amb el model probabilístic. La taula 4 ens mostra la freqüència relativa en tant per cent segons el nombre d'1 i d'x en les 405 jornades que componen les 10 temporades estudiades.

**Taula 3**

| **P** | | **Nombre d'x** | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** |
| **Nombre d'1** | **0** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| | **1** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | |
| | **2** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | | |
| | **3** | 0,0 | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 1,0 | 0,8 | 0,5 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | | | |
| | **4** | 0,0 | 0,0 | 0,3 | 0,8 | 1,6 | 2,3 | 2,2 | 1,4 | 0,6 | 0,2 | 0,0 | | | | |
| | **5** | 0,0 | 0,2 | 0,8 | 2,1 | 3,6 | 4,2 | 3,2 | 1,6 | 0,5 | 0,1 | | | | | |
| | **6** | 0,0 | 0,4 | 1,6 | 3,8 | 5,5 | 5,1 | 3,0 | 1,0 | 0,1 | | | | | | |
| | **7** | 0,1 | 0,7 | 2,6 | 5,0 | 5,8 | 4,0 | 1,6 | 0,3 | | | | | | | |
| | **8** | 0,1 | 1,0 | 3,0 | 4,6 | 4,0 | 1,9 | 0,4 | | | | | | | | |
| | **9** | 0,2 | 1,0 | 2,4 | 2,8 | 1,6 | 0,4 | | | | | | | | | |
| | **10** | 0,2 | 0,8 | 1,3 | 1,0 | 0,3 | | | | | | | | | | |
| | **11** | 0,1 | 0,4 | 0,4 | 0,2 | | | | | | | | | | | |
| | **12** | 0,1 | 0,1 | 0,1 | | | | | | | | | | | | |
| | **13** | 0,0 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | |
| | **14** | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | |

**Taula 4**

| Fr | Nombre d'x | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre d'1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** |
| **0** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| **1** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | |
| **2** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,2 | 0,0 | 0,2 | 0,2 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | | |
| **3** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,5 | 0,0 | 1,5 | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,0 | 0,0 | | | |
| **4** | 0,0 | 0,0 | 0,5 | 0,5 | 1,2 | 1,5 | 2,7 | 0,5 | 0,7 | 0,0 | 0,0 | | | | |
| **5** | 0,0 | 0,5 | 1,5 | 2,2 | 2,7 | 4,7 | 4,0 | 1,0 | 1,0 | 0,0 | | | | | |
| **6** | 0,0 | 0,2 | 2,0 | 5,4 | 3,7 | 5,4 | 2,2 | 1,5 | 0,0 | | | | | | |
| **7** | 0,0 | 1,2 | 2,0 | 4,2 | 6,2 | 6,2 | 2,2 | 0,0 | | | | | | | |
| **8** | 0,5 | 0,5 | 2,5 | 4,9 | 5,2 | 1,2 | 0,7 | | | | | | | | |
| **9** | 0,0 | 1,2 | 2,2 | 3,5 | 0,7 | 0,2 | | | | | | | | | |
| **10** | 0,0 | 0,7 | 1,7 | 1,0 | 0,7 | | | | | | | | | | |
| **11** | 0,0 | 0,0 | 0,2 | 0,2 | | | | | | | | | | | |
| **12** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | | | | | | | | | | | | |
| **13** | 0,0 | 0,0 | | | | | | | | | | | | | |
| **14** | 0,0 | | | | | | | | | | | | | | |

## Simulació

Arribats en aquest punt, ens podem plantejar com podem fer una simulació del resultat del primer partit de la travessa. Us proposo quatre possibilitats:

- Llançar enlaire un dau A de sis cares amb dos 1, dos x i dos 2. (33%, 33% i 33%)
- Llançar enlaire un dau B de sis cares amb tres 1, dos x i un 2. (50%, 33% i 17%)
- Llançar enlaire un dau C de cent cares amb quaranta-sis 1, vint-i-nou x i vint-i-cinc 2. (46%, 29% i 25%). En aquest cas és millor fer servir la tecla RND de la calculadora i observar les dues últimes xifres.
- Llançar enlaire un dau D de sis cares amb sis 1. (100%, 0%, 0%)

Vists els resultats de les 10 temporades estudiades, el millor dau per fer la simulació seria el C, seguit del B.

La simulació ens permet obtenir tantes travesses com vulguem "en condicions semblants" a la que s'obté els diumenges, setmana darrere setmana, al llarg de totes les jornades de totes les temporades, però sense haver d'esperar tant de temps.

A la taula 5 teniu una simulació feta amb el dau A de 6 cares amb dos 1, dues x i dos 2; el dau B amb tres 1, dues x i un 2; i el dau C (realment ho he fet amb la calculadora observant les dues últimes xifres que surten cada vegada que pitgem la tecla RND; del 01 fins al 46 interpretarem que és un 1, del 47 al 75 interpretarem que és una x i del 76 al 00 interpretarem que és un 2).

**Taula 5**

| Partit | dau A | dau B | dau C (Calculadora) | |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | x | 5 | 1 |
| **2** | 2 | 2 | 25 | 1 |
| **3** | 1 | 1 | 82 | 2 |
| **4** | 1 | 1 | 38 | 1 |
| **5** | 2 | 1 | 21 | 1 |
| **6** | x | 1 | 2 | 1 |
| **7** | 2 | x | 43 | 1 |
| **8** | x | 1 | 13 | 1 |
| **9** | 2 | 1 | 78 | 2 |
| **10** | x | 2 | 85 | 2 |
| **11** | x | 1 | 43 | 1 |
| **12** | 1 | x | 70 | x |
| **13** | x | x | 38 | 1 |
| **14** | x | 2 | 58 | x |

Si utilitzem la simulació per fer una travessa, quina és la probabilitat, amb cadascun dels daus anteriors, d'encertar el primer resultat? Amb el dau A, la probabilitat d'encertar és del 33,33%, amb el dau B és del 36,82% i amb la calculadora és del 35,82%. Les taules 6, 7 i 8 ens mostren aquest resultat teòric. Observeu que si haguéssim fet la simulació amb el dau D (amb tot 1), la probabilitat d'encertar seria del 46%.

### Taula 6

| **simulació dau A** | | **1r resultat travessa** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 46% | 1 | 33% · 46% = 15,18% |
| 33% | **1** | 29% | **x** | |
| | | 25% | **2** | |
| | | | | |
| | | 46% | **1** | |
| 33% | **x** | 29% | **x** | 33% · 29% = 9,57% |
| | | 25% | **2** | |
| | | | | |
| | | 46% | **1** | |
| 33% | **2** | 29% | **x** | |
| | | 25% | **2** | 33% · 25% = 8,25% |
| **Probabilitat d'encertar:** | | | | 33% |

### Taula 7

| **simulació dau B** | | **1r resultat travessa** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 46% | 1 | 50% · 46% = 23% |
| 50% | **1** | 29% | **x** | |
| | | 25% | **2** | |
| | | | | |
| | | 46% | **1** | |
| 33% | **x** | 29% | **x** | 33% · 29% = 9,57% |
| | | 25% | **2** | |
| | | | | |
| | | 46% | **1** | |
| 17% | **2** | 29% | **x** | |
| | | 25% | **2** | 17% · 25% = 4,25% |
| **Probabilitat d'encertar:** | | | | 36,82% |

### Taula 8

| **simulació dau C** | | **1r resultat travessa** | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 46% | 1 | 46% · 46% = 21,16% |
| 46% | **1** | 29% | **x** | |
| | | 25% | **2** | |
| | | | | |
| | | 46% | **1** | |
| 29% | **x** | 29% | **x** | 29% · 29% = 8,41% |
| | | 25% | **2** | |
| | | | | |
| | | 46% | **1** | |
| 25% | **2** | 29% | **x** | |
| | | 25% | **2** | 25% · 25% = 6,25% |
| **Probabilitat d'encertar:** | | | | 35,82% |

Utilitzant un raonament semblant, la probabilitat d'encertar els dos primers resultats és: amb el dau A, del 10,89%, amb el dau B és del 13,55% i amb el dau C és del 12,83%. Observeu que si haguéssim fet la simulació amb el dau D, la probabilitat d'encertar seria del 21,16%. Per tant, el millor dau per simular no ha de ser necessàriament el millor dau per encertar.

El full de càlcul Microsoft Excel incorpora la funció *Aleatorio*() que genera nombres aleatoris entre el 0 i l'1. La fórmula = *Entero (Aleatorio()*N+1)* retorna un nombre natural aleatori entre l'1 i el nombre N. Les dades de la temporada 92/93 estan disposades en 41 files (cada fila és una jornada) i en 14 columnes (cada columna és un resultat de la travessa, no he considerat el 15è partit). A la dreta de les dades he omplert 41x14 cel·les amb la fórmula = *Entero (Aleatorio()*6+1)*. A la dreta d'aquests nombres aleatoris he omplert 41x14 cel·les amb la *fórmula*:

=SI(O(X3=1;X3=2);1;SI(O(X3=3;X3=4);"x";2))

Aquesta fórmula transforma els nombres aleatoris en 1, x i 2, segons el dau A. Acabem de simular els 14 resultats de cadascuna de les 41 jornades de la temporada 92/93 amb el dau A.

Comparant els resultats de la simulació amb els resultats de les travesses de la temporada

92/93 hem obtingut que el nombre màxim d'encerts en una jornada ha estat 8, el mínim d'encerts en una jornada ha estat 1 i la mitjana d'encerts per jornada ha estat 4,8.

D'una forma semblant he simulat els resultats amb els daus B i C. Les fórmules són:

DauB:

*SI(O(X3=1;X3=2;X3=3);1;SI(O(X3=4;X3=5);"x";2))*

Dau C: = *Entero (Aleatorio()*100+1)*

*=SI(DT3<=46;1;SI(DT3<=75;"x";2))*

La simulació amb el dau B, a la temporada 92/93, ha donat millors resultats. El màxim nombre d'encerts en una jornada ha estat 10 encerts i el mínim 2. La mitjana ha estat de 5,49 encerts per jornada.

La taula 9 ens mostra els resultats de les simulacions amb els tres daus en les deu temporades.

**Taula 9**

| | Dau A | | | Dau B | | | Dau C | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Temporada** | **Màxim** | **Mínim** | **Mitjana** | **Màxim** | **Mínim** | **Mitjana** | **Màxim** | **Mínim** | **Mitjana** |
| **92-93** | 8 | 1 | 4,80 | 10 | 2 | 5,49 | 9 | 2 | 5,41 |
| **93-94** | 9 | 1 | 4,17 | 9 | 2 | 5,22 | 9 | 1 | 5,47 |
| **94-95** | 7 | 0 | 4,58 | 9 | 2 | 5,13 | 11 | 2 | 5,18 |
| **95-96** | 9 | 1 | 4,61 | 10 | 2 | 5,13 | 9 | 2 | 5,39 |
| **96-97** | 7 | 1 | 3,76 | 10 | 2 | 5,31 | 9 | 2 | 5,19 |
| **97-98** | 8 | 2 | 4,83 | 11 | 2 | 5,25 | 9 | 2 | 4,95 |
| **98-99** | 9 | 0 | 4,60 | 11 | 1 | 4,90 | 9 | 2 | 5,02 |
| **99-00** | 8 | 1 | 4,88 | 9 | 1 | 5,12 | 9 | 1 | 4,56 |
| **00-01** | 9 | 1 | 5,05 | 9 | 2 | 5,26 | 9 | 2 | 5,33 |
| **01-02** | 11 | 1 | 4,91 | 9 | 2 | 5,14 | 8 | 1 | 4,70 |
| | | | | | | | | | |
| **Màxim** | 11 | 2 | 5,05 | 11 | 2 | 5,49 | 11 | 2 | 5,47 |
| **Mínim** | 7 | 0 | 3,76 | 9 | 1 | 4,90 | 8 | 1 | 4,56 |
| **Mitjana** | 9 | 1 | 4,62 | 10 | 2 | 5,20 | 9 | 2 | 5,12 |

A la taula 9 podem veure que:

- En cap jornada, de les 405 que hi ha a les 10 temporades, haguéssim encertat un 14, 13 o un 12. Quan s'ha encertat un 11 en una temporada, aquest ha estat l'únic encert d'11 de la temporada.
- La mitjana d'encerts ha estat de 5.
- Els pitjors resultats s'obtenen amb el dau A. Curiosament, la majoria d'instruments que venen a les botigues tenen aquesta distribució.
- Els millors resultats en mitjana s'obtenen amb el dau B, és el que té assignada una probabilitat més gran a l'1.

### Observacions

No voldria acabar aquest article sense fer esment a tres qüestions que no he considerat.

- Abans de saber els resultats de la travessa, nosaltres tenim una informació addicional sobre els equips de futbol que fa variar la probabilitat d'alguns resultats. És evident que, si el primer partit de la travessa el juguen un equip molt bo i un de molt fluixet a casa del bo, la probabilitat de l'1 és més del 0,49 que li hem donat.

- El joc de la travessa de futbol consisteix en encertar els 14 més el 15è partit, els 14 resultats, 13, 12 o 11 resultats, altrament no hi ha premi. El premi no és fix, depèn de la recaptació de la jornada i del nombre d'encertants en cada categoria. Per tant, ens interessa que quan nosaltres encertem hi hagi poca gent que encerti. Per exemple, a la 2a jornada de la temporada 00/01 no hi va haver cap encertant de 15 ni de 14, i els 76 encertants de 13 van cobrar 2.510.109 ptes; dues jornades després els encertants de 13 van ser 6.327 i van cobrar 31.643 ptes cadascú. Amb aquest criteri no és tan temerari posar una x o un 2 al partit del punt anterior.
- Tot aquest article es basa en apostes simples. Hi ha altres possibilitat: posar dobles, triples, reduir al 13, etc.

### Activitats per a 2n d'ESO

A l'hora d'omplir una travessa podem tenir en compte els nostres coneixements futbolístics per determinar si posem un 1, una x o un 2. Hi ha dades, com el fet que hi ha equips més bons que altres, amb més possibilitats de guanyar o perdre, o que un equip porti una mala ratxa, o que a aquest equip li tinc simpatia o no el puc veure, etc, que poden determinar quin signe de la travessa cal posar. Sovint els nostres desigs i coneixements es veuen estroncats pels resultats dels partits.

Si volguéssim omplir la travessa a l'atzar, sense tenir en compte aquests factors, com ho faríem?

*Activitat*

**1** Quins d'aquests daus faries servir per omplir una columna d'una travessa, si la volguessis fer a l'atzar? Justifica la teva resposta.

a) Un dau amb dos 1, dues X i dos 2.

b) Un dau amb tres 1, dues X i un 2.

c) Un dau amb tots 1.

**2** a) Hem anotat els resultats de les travesses de la temporada 2001/2002. Escriu a la columnes de la dreta la quantitat d'1, d'x i de 2 que ha sortit a cada travessa. Escriu el total d'1, d'x i 2 de totes les travesses de la temporada.

| Jornada | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | 1 | x | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | X | 1 | X | X | 1 | | | | |
| **2** | 1 | X | 2 | 2 | 2 | X | 1 | 1 | 2 | 1 | X | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| **3** | 1 | X | X | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | X | X | X | X | X | 1 | X | | | | |
| **4** | 1 | 2 | 1 | 2 | X | X | 1 | X | 2 | 2 | 2 | 2 | X | 1 | X | | | | |
| **5** | 1 | 2 | X | X | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | X | X | 1 | | | | |
| **6** | X | 1 | 2 | X | X | 2 | 2 | X | 1 | 1 | X | 2 | X | 2 | 1 | | | | |
| **7** | 2 | 1 | X | 1 | X | X | 1 | 1 | 1 | 2 | X | X | 2 | X | 1 | | | | |
| **8** | 1 | 1 | 1 | X | 1 | 1 | 2 | X | 1 | X | X | X | X | X | 1 | | | | |
| **9** | 1 | 2 | X | 1 | 2 | X | 2 | X | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | X | | | | |
| **10** | X | 2 | X | X | X | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | X | X | 2 | 2 | 1 | | | | |
| **11** | X | 1 | X | 2 | 1 | 2 | X | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | | | | |
| **12** | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | X | X | 1 | 2 | | | | |
| **13** | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | X | 1 | X | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | X | 1 | | | | |
| **14** | 1 | X | X | 1 | 1 | 1 | 1 | X | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | X | 2 | | | | |
| **15** | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| **16** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | X | 1 | X | X | 2 | 2 | 1 | | | | |
| **17** | X | X | 2 | X | X | 1 | 2 | X | X | 1 | X | 1 | X | 1 | X | | | | |
| **18** | 2 | 1 | 2 | X | X | X | 1 | 1 | X | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| **19** | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | X | 1 | 1 | X | X | 2 | 1 | 1 | | | | |
| **20** | 1 | 2 | X | 2 | 2 | X | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| **21** | X | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | X | X | 1 | X | X | 1 | 1 | X | 2 | | | | |
| **22** | X | X | 2 | 1 | 1 | 2 | X | X | 1 | 1 | X | X | 1 | 1 | 2 | | | | |
| **23** | X | X | 2 | X | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | X | X | X | 1 | X | | | | |
| **24** | 1 | 1 | X | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | X | 1 | 1 | X | 2 | 1 | X | | | | |
| **25** | 1 | X | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | X | X | X | X | X | 2 | 2 | X | | | | |
| **26** | 1 | 1 | X | 1 | X | X | X | 1 | X | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | | | | |
| **27** | X | 1 | 2 | X | X | 1 | 1 | 2 | 1 | X | X | 2 | 2 | 1 | 2 | | | | |
| **28** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | X | 1 | 1 | X | 2 | X | 1 | | | | |
| **29** | 1 | 1 | 2 | X | 1 | 2 | 2 | 2 | X | X | 2 | 1 | 2 | 2 | X | | | | |
| **30** | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | X | 1 | 2 | X | X | X | X | 2 | | | | |
| **31** | 2 | 1 | X | X | X | 2 | 1 | 2 | X | 1 | 2 | X | 1 | 1 | X | | | | |
| **32** | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | X | X | 1 | 1 | 2 | X | 2 | 1 | X | 1 | | | | |
| **33** | 1 | 1 | X | X | 2 | X | 2 | 2 | X | 1 | 2 | X | 2 | 1 | X | | | | |
| **34** | 1 | 1 | 2 | X | X | 1 | X | 1 | 1 | 1 | 2 | X | X | X | 2 | | | | |
| **35** | 1 | 1 | X | X | 1 | 1 | 1 | 1 | X | 1 | 2 | 2 | 1 | X | X | | | | |
| **36** | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | X | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | X | | | | |
| **37** | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | X | 1 | 1 | 1 | X | X | 2 | | | | |
| **38** | 1 | 1 | 2 | 2 | X | 2 | 2 | X | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | | | | |
| **39** | X | 1 | 1 | 2 | 2 | X | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | X | 1 | 1 | 1 | | | | |
| **40** | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | X | 2 | 2 | 1 | X | 2 | 1 | | | | |
| **41** | 1 | X | 2 | 2 | X | X | 1 | X | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| **42** | 1 | 1 | X | X | 2 | 2 | X | 1 | 1 | X | X | 1 | 1 | 1 | 2 | | | | |
| **43** | 2 | 1 | X | 1 | X | X | 1 | 1 | X | 2 | 2 | X | X | 2 | 2 | | | | |
| **Total** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

b) Troba la freqüència relativa dels tres resultats possibles (1, x, 2), en tant per cent.

c) Creus que els esdeveniments 1, x i 2 són equiprobables? Justifica la teva resposta.

d) Nosaltres hem fet el mateix amb les 9 temporades anteriors, i hem obtingut un resultat semblant:

| **Temporada** | **1** | **x** | **2** |
|---|---|---|---|
| **92-93** | 45,37% | 29,92% | 24,72% |
| **93-94** | 47,22% | 29,81% | 22,96% |
| **94-95** | 45,33% | 31,17% | 23,50% |
| **95-96** | 43,68% | 28,95% | 27,37% |
| **96-97** | 46,03% | 26,03% | 25,56% |
| **97-98** | 46,83% | 29,33% | 23,83% |
| **98-99** | 44,76% | 28,41% | 24,44% |
| **99-00** | 45,37% | 29,76% | 24,88% |
| **00-01** | 47,14% | 26,98% | 23,49% |
| **01-02** | 42,33% | 27,91% | 25,12% |

Compara aquests resultats amb els que has obtingut per la temporada 2001/2002.

e) Tenint en compte l'apartat anterior, com hauria de ser un dau de sis cares per simular els resultat d'una travessa? Coincideix la teva resposta amb la que has donat a l'activitat anterior.

f) Observa quins articles venen a les botigues per fer les travesses a l'atzar. Descriu com són i digues si donen la mateixa possibilitat a tots tres resultats.

g) Agafa un dau i escriu a les cares tres 1, dos x i un 2. Omple la travessa de la propera jornada amb aquest dau. Quants resultats has encertat? N'haguessis encertat més si l'haguessis omplert amb tots 1?

h) A la temporada 95/96 es va implantar una norma que feia que l'equip que guanyés el partit s'emportaria tres punts en comptes de dos. Creus que aquesta decisió ha fet que els partits empatats disminuïssin?

## Conclusions

En aquest article s'ha proposat: 1) un model probabilístic que permet concloure que, en les travesses, els esdeveniments elementals són independents i no equiprobables i 2) una seqüència didàctica per a treballar aquesta situació a 2n d'ESO. Si volem aprofundir en el tema, pensant en el Batxillerat, podem demanar als alumnes, per exemple, que trobin un model probabilístic escaient o que trobin si hi ha relació entre la quantitat de variants (x i 2) i la quantia dels premis. D'altra banda, cal no oblidar que amb aquest tipus d'activitats, també treballarem aspectes relacionats amb la cultura del joc que són molt importants: mostrar que la probabilitat d'encertar és molt petita i que no podem esperar fer-nos rics jugant als jocs d'atzar.

**Jornada 17    22-12-2002**

| | |
|---|---|
| 1. R.Betis - At.Osasuna | |
| 2. Espanyol - R.Valladolid | |
| 3. Ath.Bilbao - Alavés | |
| 4. At.Madrid - Rac.Santander | |
| 5. R.Celta - Villarreal | |
| 6. Valencia - Dptvo.Coruña | |
| 7. Málaga - R.Madrid | |
| 8. Rec.Huelva - R.Sociedad | |
| 9. R.Mallorca - Barcelona | |
| 10. Rayo Vallecano - Sevilla | |
| 11. Levante - Las Palmas | |
| 12. Tenerife - Salamanca | |
| 13. Compostela - Albacete | |
| 14. R.Zaragoza - Xerez | |
| 15. Almería - Elche | |