FUNCIONS EXPONENCIALS I LOGARÍTMIQUES

1 Escriviu els següents nombres en forma de potència de base 2:

A/ 8 B/ 16 C/ 4^{-3} D/ $(¼)^3$ E/ $(½)^{-1}$ F/ $4^{½}\cdot 16^{¼}$

2 Amb la calculadora trobeu dos enters consecutius de manera que:

A/ $2^m < 100 < 2^{m+1}$ B/ $2^n < 1/100 < 2^{n+1}$

3 Feu una taula de valors, compresa entre -5 a 5, de les següents funcions, i representeu-les en un mateix diagrama:

A/ $y = 2^x$ B/ $y = 2^{-x}$ C/ $y = (½)^x$ D/ $y = (½)^{-x}$

4 Dibuixeu de manera aproximada el gràfic de $y = 1'1^x$ i calculeu l'enter més petit que verifica $1'1^n < 1'5$.

5 S'ha establert que la funció de població d'un país determinat serà, al cap de t anys, $P(t) = 20\cdot e^{0'01t}$ on P s'expressa en milions d'habitants.

Calculeu quina és la població actual i quina serà al cap de 50 anys.

6 Resoleu les equacions següents:

A/ $2^X = 16$ B/ $4^{X^2} = 64$ C/ $625 = 5^{2X-1}$ (3,-1) D/ $5^{x^2-2x} = 125$ E/ $1 = 7^{x^2-5x-6}$ (6,-1)

F/ $3^{2-x^2} = \frac{1}{3}$ (+-sqrt3) G/ $\frac{1}{3^{2x-1}} = 27$ H/ $4^{2x+1} = 8^{x+1}$ (1) I/ $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$ (3)

J/ $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$ K/ $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^x = 1093$ L/ $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$ (2)

M/ $4^x - 5 \bullet 2^x + 4 = 0$ (0,2) N/ $4^{x-1} - 4^{x-2} - 4^{x-3} = 2816$ (7) O/ $7^{2x+3} - 8 \bullet 7^{x+1} + 1 = 0$ (-1,-2)

P/ $9^x - 90 \bullet 3^x + 729 = 0$ (2,4) Q/ $16^x + 16^{1-x} = 10$ (1/4,3/4) R/ $5^{x-1} = 2 + 3 \bullet 5^{2-x}$ (2)

7 Resoleu els següents sistemes d'equacions:

A/ $\left.\begin{array}{r} 5^{x+y} = 15625 \\ 7^{x-y} = 49 \end{array}\right\}$ (4,2) B/ $\left.\begin{array}{r} 3 \bullet 2^x - 2 \bullet 3^y = -6 \\ 4 \bullet 2^x - 3 \bullet 3^y = -11 \end{array}\right\}$ (2,2) C/ $\left.\begin{array}{r} 3 \bullet 2^x - 5 \bullet 3^y = 3 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 59 \end{array}\right\}$ (4,2)

D/ $\left.\begin{array}{r} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \bullet 3^y = 712 \end{array}\right\}$

8 La demanda d'un nou producte creix molt ràpidament quan surt al mercat i després ho fa lentament, fins que arriba gairebé a estabilitzar-se. La funció de demanda és:

$$f(t) = 100 - 90(\frac{1}{3})^t$$

Quina és la demanda inicial? Quina és quan t=3? Quan és 90 la funció de demanda? (Per a t=3, 96'7)

9 Calculeu els logaritmes que s'indiquen a continuació:

A/ $\log_3 81 =$ B/ $\log_{1/3} 81 =$ C/ $\log 81 =$ D/ $\ln 81 =$

10 Feu la representació gràfica de les següents funcions:

A/ $f(x) = \log_2 x$ B/ $y = \log_3 x$ C/ $g(x) = \log_{1/2} x$ D/ $y = \log_{1/3} x$

11 Aplicant-hi les propietats dels logaritmes, expressa d'una altra manera:

A/ $\log \sqrt{\dfrac{a^3 \_ \sqrt{b}}{\frac{1}{c}}} =$ B/ $\log(\sqrt[5]{\dfrac{a^4 \_ \sqrt{a}}{\frac{1}{a^2}}}) =$ C/ $\log(\sqrt[2]{\dfrac{a^4 - a^2}{1 - a^2}}) =$

12 Indiqueu quines de les expressions següents són correctes i quines no:

A/ $\log a - 2 = \log \dfrac{a}{100}$ B/ $3 + \ln a = \ln \dfrac{e^3}{a}$ C/ $\log 3 + \log 5 = \log 8$

D/ $\log 5 + \ln 2 = \log 10$ E/ $\log a - \log b + 2\_ \log c = \log \dfrac{a\_ c^2}{b}$ F/ $\ln \sqrt{\dfrac{1}{e^3}} = -\dfrac{3}{2}$

13 Sabent que log 2 = 0'3010 i log 3 = 0'4771, calculeu els logaritmes seguents:

A/ $\log \dfrac{1}{27} =$ B/ $\log 12 =$ C/ $\log 150 =$ D/ $\log 125 =$ E/ $\log \dfrac{4}{9} =$

14 Desenvolupeu aquestes expressions:

A/ $\log 23^2 \_ \sqrt{0'01} =$ B/ $\log_2 \dfrac{1}{2^{3x}} =$ C/ $\log e^{\ln 7} =$ D/ $3^{\log_3 10} =$ E/ $\log_x 1 =$

15 Calculeu **x** en les següents expressions:

A/ $\log_5 x = 2$ B/ $\log_b x = 0$ C/ $\log_4 x = \dfrac{1}{2}$ D/ $\log_4 2 = x$ F/ $\log_8 \dfrac{1}{2} = x$

G/ $\log_x 16 = 2$ H/ $\log_x 10 = \dfrac{1}{4}$ I/ $\log_x 1331 = 3$ J/ $\log_x 0'001 = 3$ K/ $\log_\pi x = 1$

M/ $\log_2 10ver8 = x$ N/ $\log_x 81 = 2$ O/ $\log_x 81 = -2$ P/ $\log_{125} \dfrac{1}{\sqrt{5}} = x$ R/ $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

16 Per a quins valors és enter $\log_4 x$? Resoleu la doble inequació 1< $\log_4 x$ <3.

17 El creixement de dos tipus diferents de bacteris es regeix respectivament per aquestes funcions: $c_1(t) = 6'2 \cdot 1'18^{3t}$ i $c_2(t) = 4'1 \cdot 1'72^t$ (t expressat en hores i c(t) en milers)

a) Feu la representació gràfica de les dues funcions.

b) Al cap de quant de temps coincidirà el nombre d'individus de cada espècie? (9'02 h)

c) A partir d'aquest moment, quin cultiu creixerà més de pressa?

18 Si en la progressió geomètrica de raó 2: ... ¼, ½, 1, 2, 4, 8,... prenem logaritmes en base 2, obtenim una progressió aritmètica. a) Determineu-la. b)Determineu la suma dels 100 primers termes de les dues successions.

19 Calculeu els següents logaritmes:

A/ $\log_2 16 =$ B/ $\log_{16} 2 =$ C/ $\log_3 9 =$ E/ $\log_9 27 =$

20 Trobeu els següents logaritmes:

A/ $\log_2 3 =$ B/ $\log_2 6 =$ C/ $\log_9 e =$ E/ $\log_\pi 27 =$ (2'8791)

21 Sabent que log 2 = 0'3010 i log 3 = 0'4771, calculeu els següents logaritmes:

A/ $\log 6^3 =$ B/ $\log \sqrt{6} =$ C/ $\log \sqrt[5]{81} =$ D/ $\log 2.500 =$ E/ $\log 270 =$

22 Resoleu les següents equacions:

A/ $3 = 10^x$ B/ $6^3 = 2^{x+1}$ (6'76) C/ $3^{x-1} = 4^{x-3}$ (10'64) D/ $5^{2x-3} = 2^{5x+1}$ (-22'3684)

E/ $6^{x^2-1} = 60$ F/ $3\,y_0 = y_0 \cdot e^{5x}$ G/ $2a = a \cdot 3^{x+1}$ H/ $10^{x-1} = e^{x-3}$ I/ $4^{2x+1} = 3^{5x^2+1}$

J) $3 \bullet 4^x = 2 \bullet 5^{2x}$ (0'2215) J/ $\log_x 10 = 2$ K/ $\log x = \log 8 - \log 3$

L/ $\log x = \log 16 - \log(9x)$ (6'5,2'4) M/ $2 \log x = 2 - \log 2 + \log x$ N/ $\log x = \log 6 - \ln x$

O/ $\log (2x) = \log_2 8 - \log_9 3$

23 Resoleu els sistemes següents:

A/ $\left.\begin{array}{r} xy = 1000 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$ B/ $\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 3 \\ \dfrac{x}{y} = 100 \end{array}\right\}$ C/ $\left.\begin{array}{r} \ln x + \ln y = 2 \\ \ln x - \dfrac{1}{2} \ln y = 1 \end{array}\right\}$ D/ $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ \log x - 2 \log y = 0 \end{array}\right\}$

E/ $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 29 \\ \log_5 2^x - \log_5 2^y = \dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$ F/ $\left.\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 90 \\ \log x - \log y = 3 \end{array}\right\}$ G/ $\left.\begin{array}{r} 2^x - 2^y = 2 \\ 2^x - 2^y = 1 \end{array}\right\}$

H/ $\left.\begin{array}{r} \log x^2 - \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{array}\right\}$ (1000,10)

24 a/ Representeu en un mateix diagrama les dues funcions següents (feu servir els valors de t 0, 0'25, 0'50, 0'75, 1, 2, 3, 4 i 5):

$$f(t) = 10 - 9 \cdot (\frac{1}{3})^t \qquad g(t) = 10 - 9 \cdot 2^{-t}$$

b/ Indiqueu quin és el límit quan t tendeix a infinit.

c/ Indiqueu quines són les asímptotes que té cada funció.

d/ Representeu aproximadament (sense tornar a fer una taula de valors) les funcions 2·f(t) i g(t/4).

25 Després d'ingerir una dosi de whisky, el nivell d'alcohol en la sang puja a 0'3 mg/ml. A continuació baixa paulatinament, d'acord amb la funció $y = 0'3 \cdot (\frac{1}{2})^t$, on t és el temps mesurat en hores a partir del moment en el qual s'ingereix el líquid. Si se suposa que el màxim legal d'alcohol a la sang per poder conduir un automòbil és de 0'08 mg/ml, quant de temps ha d'esperar una persona, després de prendre aquesta quantitat de whisky, per poder conduir?

26 En un cultiu hi ha inicialment 10.000 bacteris. Al cap de 40 minuts, el nombre de bacteris s'hi ha duplicat. Si suposem que el creixement bacterià és de tipus exponencial, i que la base de la potència és el nombre **e**, escriu la funció que representa aquest creixement i indica al cap de quant de temps el nombre de bacteris s'hi haurà triplicat respecte al nombre inicial. (f=10000.exp(kt), k=0'0173, t=63'5 min)

27 El preu d'un automòbil és de 20.000 €. En revendre'l, al cap de cinc anys, se'n paga un preu de 7.500 €. Si se suposa que la depreciació és exponencial (base **e**), quan s'hauria hagut de revendre per obtenir-ne almenys la meitat del preu de compra inicial?

(f=20000.exp(kt), k=-0'1962, t=3anys 6mesos 12dies)

28 La quantitat de carboni 14 present en un ésser viu, roman sensiblement constant; però, quan mor, aquesta substància radioactiva comença a minvar en l'organisme, segons la llei exponencial:

$$y = y_0 \cdot e^{-0'0001238t}$$

a/ Si es coneix la quantitat de carboni 14 present en el moment de la mort en un ésser viu, com es pot calcular l'antiguitat d'unes restes arqueològiques?

b/ Quina és l'antiguitat d'unes restes arqueològiques, si la quantitat de carboni 14 s'ha reduït a la meitat?

29 Imaginem que un nenúfar triga un dia a duplicar-se, i suposem que un nenúfar necessita 30 dies per omplir totalment un llac. Quants dies trigarien dos nenúfars a omplir el mateix llac?