

MATRIUS I DETERMINANTS

- Efectueu les següents operacions entre matrius:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ (prop. commutativa)}$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ (prop. associativa)}$$

$$4. 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \quad 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4/3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$6. (2 \ 3 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (11) \quad 7. (4 \ 2 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = (-15)$$

$$8. (4 \ -1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (-5 \ 38 \ -2)$$

$$9. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -16 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$10. \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 5 & 23 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \text{ (no commutativa)}$$

$$11. \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 8 & 6 \\ 10 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Comproveu que el producte de matrius no té la propietat commutativa:

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Trobeu el valor dels següents determinants:

$$13. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \quad (-13)$$

$$14. \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (-20)$$

$$15. \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$16. \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \quad (0)$$

$$17. \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad (0)$$

$$18. \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} \quad (0)$$

$$19. 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (4) \quad \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$20. \begin{vmatrix} 24 & 20 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} \quad 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (-48)$$

$$21. \begin{vmatrix} 5+2 & 3 \\ 7+5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \quad (-8)$$

$$22. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2+4 \cdot 3 & 3 \\ 1+4 \cdot 5 & 5 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$23. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (-65) \quad 24. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (40) \quad 26. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad (-124)$$

27. De la matriu donada trobeu els menors i els adjunts següents: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$M_{23}, A_{23}, M_{31}, A_{31}, M_{21}, A_{21}$. (6, -6, 17, 17, -6, 6)

28. Feu els exercicis 23, 24, 25 desenvolupant el determinant per una fila o una columna.

- Calculeu els següents determinants:

$$29. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (-147)$$

$$30. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (61)$$

$$31. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad (40)$$

$$32. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

33. Feu el problema 29 sumant a la 1a fila la 2a multiplicada per -2, i sumant a la 4a la 2a multiplicada per -1.

- Calculeu la matriu inversa (i feu-ne, eventualment, la comprovació):

$$34. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad 35. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{No en té})$$

$$36. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \quad 37. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$38. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad 39. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$40. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 41. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$42. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 43. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$44. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2/5 & 3/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$45. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad 46. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$47. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -2/5 & 3/5 & 1/5 \\ 6/5 & -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$48. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$49. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$50. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 & -2 \\ -6 & 4 & 5 & -1 \\ -10 & 4 & 9 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Trobeu el rang de les següents matrius:

$$51. \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad 52. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad 53. \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$54. \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad 55. \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \quad (2) \quad 56. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$57. \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad (2)$$

57'. Trobeu la matriu C que verifiqui $A \cdot C = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, (C = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 & 5/2 \\ 1/2 & 6 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix})$$

- Resoleu les següents equacions:

$$58. \quad \begin{vmatrix} x-1 & 2x-3 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$59. \quad \begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x-2 & x-4 \end{vmatrix} = 14$$

$$60. \quad \begin{vmatrix} x^2-5 & x-2 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 12$$

$$61. \quad \begin{vmatrix} 2x+2 & 3x-1 \\ x^2-3 & x^2+1 \end{vmatrix} = 4 \quad 62. \quad \begin{vmatrix} x^4-6 & x \\ x^3-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$63. \quad \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

64. Donades les matrius següents, efectueu les operacions que es demana:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) $A + B =$

b) $A - B + C =$

c) $2A =$

d) $3B =$

e) $2A - 3B =$

65. Calculeu els paràmetres perquè es compleixi la igualtat:

a)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x+1 & 3-z \\ y-2 & 4z+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6+4z \\ x+1 & 5-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

66. Calculeu els següents determinants:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$
 (-24)

67. Demostreu que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

68. Sense desenvolupar, demostreu que: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$

69. Resoleu les següents equacions:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ x & x+1 & 0 \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} m & 0 & m^2-1 \\ 1 & m^2 & m+1 \\ 0 & m^3 & m-1 \end{vmatrix} = -16$

70. Calculeu el determinant de Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$