

PROGRESSIONS

1. Escriviu els quatre primers termes i el vint-i-setè de les següents successions:

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n+1}$

c) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{5}{n^3}$

2. Calculeu el límit de les següents successions, donant valors a n:

$a_n = \frac{3n+1}{n}$

$b_n = \frac{2+n^2}{n}$

$c_n = \frac{4n}{n^3+1}$

$d_n = \frac{5n}{n+3}$

3. Trobeu el quinzè terme d'una progressió aritmètica que té de primer terme -2, i de diferència, 3. (40)
4. Calculeu el cinquantesimè terme d'una progressió aritmètica sabent el primer terme, 1/2, i el segon, 1/3. (-23/3)
5. Calculeu el dinovè terme d'una progressió aritmètica sabent que el segon terme és 3 i el tercer, 7. (71)
6. Trobeu el vintè terme d'una progressió aritmètica que té com a tercer terme 10, i com a vuitè terme, 7.
7. Interpoleu els mitjans diferencials que s'indiquen:
- a) 3, entre 1 i 5
- b) 2, entre 3 i 7
- c) 4, entre 5 i -1/3
8. Quin lloc ocupa el nombre 44 en la progressió 6, 8, 10,... (20)
9. Calculeu la suma dels quinze primers termes d'una progressió aritmètica sabent-ne el primer, 3, i la diferència, 4. (465)
10. Els angles d'un quadrilàter estan en progressió aritmètica, i el més petit és de 60 graus. Trobeu els altres. (60°, 80°, 100°, 120°)
11. Trobeu el vintè terme d'una progressió geomètrica sabent el seu segon terme, 1, i el quart, 9. (3'8.10⁸)
12. Interpoleu els mitjans proporcionals que s'indiquen: a) 7, entre 5 i 1280
- b) 2, entre 1 i 1/8
- c) 4, entre 3 i 1/81

13. Calculeu el dissetè terme de la següent progressió: $-2, 1, 4, \dots$. Calculeu la suma dels 20 primers termes. (46, $S=530$)
14. Calculeu la suma dels 10 primers termes de la següent progressió: $2, 6, 18, \dots$
15. Trobeu la suma de tots els termes de la següent progressió: $1, 1/2, 1/4, \dots$ (2)
16. Calculeu el quinzè terme de la següent successió: $1/2, 1, 5/4, 7/5, \dots$
17. El lloguer d'una bicicleta val 5€ la primera hora i 2€ més cada nova hora. ¿Quin és el preu del lloguer de 10 hores?
18. Quant val la diferència en una progressió aritmètica que té de tercer terme 27 i de cinquè 35. Escriviu els 10 primers nombres de la successió i digueu quina és la suma dels termes compresos entre el 25è i el 50è. (4.290)
19. Interpoleu cinc termes diferencials entre 32 i 8.
20. Una nedadora, durant la primera setmana de la temporada, fa el següent entrenament: 11 llargs el dilluns, 14 el dimarts, i, succesivament, 17, 20, 23 i 26; el diumenge descansa. Si manté aquest ritme, calculeu quants llargs farà a la setmana cinquena d'haver començat a entrenar. Calculeu també els llargs que fa en total la cinquena setmana. (543,1635)
21. Calculeu la suma de tots els nombres parells de tres xifres. (247.050)
22. En una progressió geomètrica de raó $2/5$, la suma de tots els termes és $40/3$. Quin és el primer? (8)
23. En una progressió aritmètica de 10 termes el segon i el novè sumen 35, i el quart és 13. Quin serà el setè?
24. Els costats d'un hexàgon estan en progressió aritmètica; el més gran fa 13 cm i el perímetre val 48 cm. Calculeu els costats de l'hexàgon.
25. Determineu la suma dels 30 primers termes d'una progressió aritmètica que té de terme general $a_n = 3n - 4$. (1.275)
26. En un cinema, la segona fila de seients està a 10 metres de la pantalla i la sisena, a 16 m. En quina fila ha de seure una persona que vol veure la pantalla a 25 m del seient? (12)
27. Quants nombres imparells consecutius cal prendre, a partir de l'1, perquè la seva suma sigui 529? (23)

28. Després d'haver-se construït el darrer tram d'una carretera, es disposa de pressupost per a la instal·lació de 5 gasolineres, entre els punts quilomètrics 237 i 562, que s'hauran de situar a igual distància l'una de l'altra. Si ja n'hi ha una al quilòmetre 237 i una altra en el 562, determineu on s'han de posar les altres.
29. Els costats d'un triangle rectangle formen una progressió aritmètica de diferència 3cm. Calculeu-los. (9cm,12cm,15cm)
30. Un dels documents matemàtics més antics que es coneixen (fa 35 segles) és un papir egipci de la dinastia XII, el papir Rhind. L'escriba Ahmes el titulava:"Càlcul acurat per penetrar en les coses, en el coneixement de totes les coses que existeixen, en els misteris ... en tots els secrets". Entre els molts problemes que s'hi descriuen hi ha el següent: "Es reparteixen 100 pans entre cinc homes, de manera que el primer rep tant menys que el segon com aquest del tercer, i com el tercer del quart, i el quart del cinquè. A més, la suma de les tres porcions més grans és set vegades la suma de les dues menors. Quina és la diferència de porció? Quant rep cadascun?
31. Explica la llegenda que l'inventor dels escacs va demanar com a premi que li donessin un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, quatre per la tercera, etc. Quants grans va demanar? ($1 \cdot 8 \cdot 10^{19}$)
32. En una progressió aritmètica, $a_1 = 30$ i $a_2 = 28'3$. Calculeu la suma de tots els termes positius.
33. Un operari ha de portar un carretó de sorra al peu de cadascun dels 30 arbres d'un carrer. La distància entre dos arbres consecutius és de 6m i la del primer arbre a la pila de sorra, 10m. Quants metres haurà recorregut fins a deixar el carretó a la pila de sorra després de l'últim viatge? (5.820m)
34. Trobeu la suma de tots els termes de la progressió 16, 12, 9,... (64)
35. En una taula hi ha 8 paquets de fulls. Cadascun en té el doble que l'anterior. Sabent que el producte del nombre de fulls del quart i del cinquè paquets és 51200, calculeu el nombre total de fulls. (5.100)
36. Demostreu que en la progressió $x, 6x - 1, 2x + 2, \dots$ el terme vuitè és 9.
37. En una exhibició aèria una esquadra de 240 avions vola en una formació triangular, de manera que cada fila té dos avions més que l'anterior. Trobeu quants avions té l'última fila, sabent que la suma de la cinquena i de la onzena

files és 32, i que aquestes són equidistants de la primera i de l'última. (30)

38. Calculeu $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 \dots \cdot 3^{25}$.
39. Determineu la raó d'una progressió geomètrica sabent que $a_1=3$ i que la suma dels seus infinits termes és $S = 12$.
40. Calculeu les fraccions generatrius de $0'77777\dots$ i de $0'124124124\dots$ utilitzant la suma de progressions geomètriques.
41. En una progressió geomètrica, el primer terme és $a_1=2$ i la raó és $r=3$. Determineu a_{10} i la suma dels deu primers termes.
42. En un cert joc es guanya la quantitat apostada si s'encerta, i es perd si no s'encerta. Una jugadora aposta 10 € la primera vegada i perd. Continua apostant, doblant cada vegada l'aposta, i no guanya fins al sisè cop. Esbrineu si ha guanyat o perdut diners, i quina quantitat.
43. La suma de tres nombres en progressió geomètrica és 31 i el seu producte, 125. Trobeu-los.
44. Determineu cinc nombres en progressió geomètrica sabent que la suma dels seus quatre primers termes és $62'4$ i que la dels quatre últims és 312. ($a_1=0'4$, $r=5$)
45. Quants termes hem de sumar en la progressió $1, 3/2, 9/4, \dots$ per obtenir $211/16$? (5)
46. (Fer-lo després dels logaritmes) En una illa del Pacífic hi viu un espècie d'ocells en perill d'extinció. Els biòlegs que estudien aquest cas, han determinat que cada any hi neix una quantitat d'ocells igual al 10 % dels que hi ha; però, en canvi, moren la sisena part dels ocells que hi havia al començament. Al cap de quants anys la població d'aquesta espècie s'haurà reduït a la meitat? (~ 11)
47. Calculeu la mesura de cadascun dels quatre angles d'un quadrilàter sabent que estan en progressió aritmètica i que els dos més petits són complementaris.
48. Un rellotge toca les hores, anunciant els quarts d'hora amb un toc, les mitges hores amb dos, i els tres quarts amb 3. Quants tocs dona al dia?
49. Un nen proposa als seus pares el següent negoci: "des de demà, us pagaré 1 € el primer dia, 2 € el segon, 3 € el tercer, ... A canvi, vosaltres només m'heu de donar 0'001 € el primer dia, 0'002 € el segon, 0'004, ... Quin seria el balanç al cap de 30 dies? ($1.073.741-465=1.073.276$ €)

50. Tres nombres diferents "a", "b" i "c" formen una progressió aritmètica. Escrits en l'ordre a, c, b, constitueixen una progressió geomètrica. Trobeu-los sabent que sumen 12.
51. Dibuixeu un triangle equilàter d'àrea $1 u^2$. Uniu els punts mitjans de cada costat i obtindreu un altre triangle equilàter.
- Quina és la seva àrea?
 - Calculeu la suma de les àrees de tots els triangles que es poden anar formant, pel sistema explicat, dins del triangle inicial.
52. La població d'un cert país augmenta per terme mitjà un 4 per mil anual. Sabent que en l'actualitat té 30 milions d'habitants, digueu:
- Quants en tindrà dintre d'un segle
 - En quin any hi haurà el doble d'habitants que l'actualitat. (177)
53. (Fer-lo després de logaritmes) La pressió atmosfèrica disminueix amb l'altura i es redueix un 10% per cada quilòmetre d'ascensió. Quin percentatge de la pressió atmosfèrica al nivell del mar hi haurà a 4 km d'altura? I a sis? (65'61%, 53'1%)
54. En la ciutat dels "discrets", una persona es va assabentar casualment d'una xafarderia poc convenient. Com que era de tarannà reservat, al cap d'un minut només ho havia explicat a tres persones més. Cadascuna d'aquestes, durant el minut següent, ho va contar a tres persones més, i així successivament.
- Al cap de set minuts, quants habitants estaven al corrent de la xafarderia? (729)
 - Si la ciutat tingués 29524 habitants, al cap de quant de temps se n'hauria assebatat tothom? (10)
55. En un triangle rectangle isòsceles, de catets de longitud 1, s'hi inscriuen una infinitat de quadrats tal com indica la figura. Calculeu-ne la suma de les àrees. Sumeu també les àrees dels triangles compresos entre els quadrats i la hipotenusa. Comproveu que sumant aquestes dues sumes s'obté l'àrea total del triangle inicial.



56. En una progressió geomètrica de raó positiva menor que la unitat, el primer terme és igual a la suma de tots els altres. Quant val la raó? (1/2)
57. Resoleu l'equació $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = 1093$. (n=6)
58. Tres nombres estan en progressió geomètrica i sumen 26. Si es deixa el primer invariable, s'afegeixen dues unitats al segon, i se'n resten dues al tercer, els dos nombres estan en progressió aritmètica. Trobeu-los i comproveu el resultat.
59. Tots els nombres naturals que dividits per 7 donen de resta 3, formen una progressió. Quin tipus de progressió és?. Calcula la suma dels 100 primers. (35.650)
60. Els radis d'un conjunt de circumferències formen una progressió aritmètica. Indiqueu si les longituds formen també una progressió. I les àrees? Si la resposta és afirmativa, trobeu la diferència.