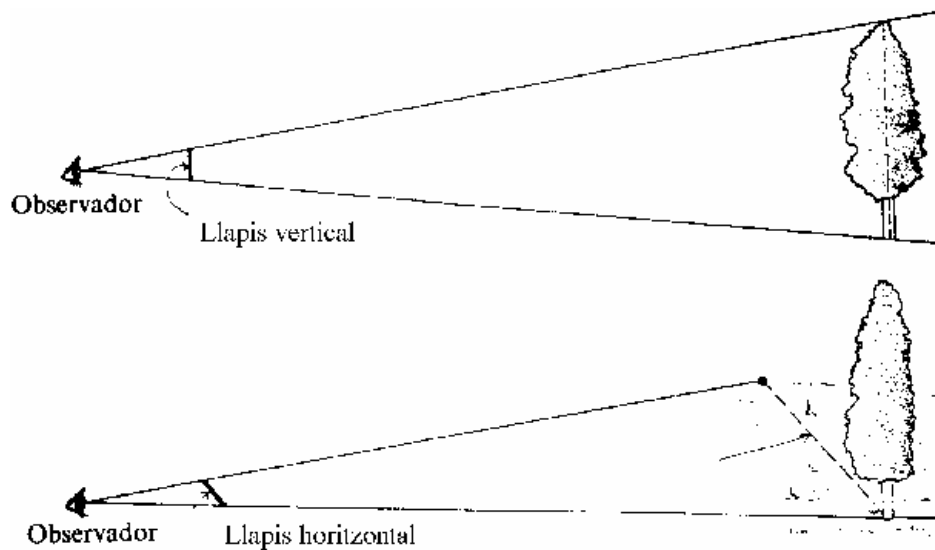


## Mesurem altures amb un llapis

Podem mesurar fàcilment (si disposem de prou espai lliure) una alçada fent servir només un llapis com a estri auxiliar. Observa els dos esquemes. El primer que hem de fer és posar-nos en un lloc tal que la llargada del llapis, amb el braç ben estès, coincideixi exactament amb l'alçada que volem mesurar. Després girem el llapis  $90^\circ$  posant-lo horitzontal i indiquem a un company o companya que, seguint les nostres indicacions, es posi a l'altura del peu del que volem mesurar fent-lo coincidir amb una de les puntes del llapis i que després posi una marca amb l'altre extrem del llapis.



- 1) Per què penses que funciona aquest mètode per mesurar altures?
- 2) Mesura amb aquest mètode algunes altures com les d'una cistella de bàsquet i d'un fanal.
- 3) Digues alguna altura que no puguis mesurar amb aquest mètode i quins són els inconvenients per fer-ho.

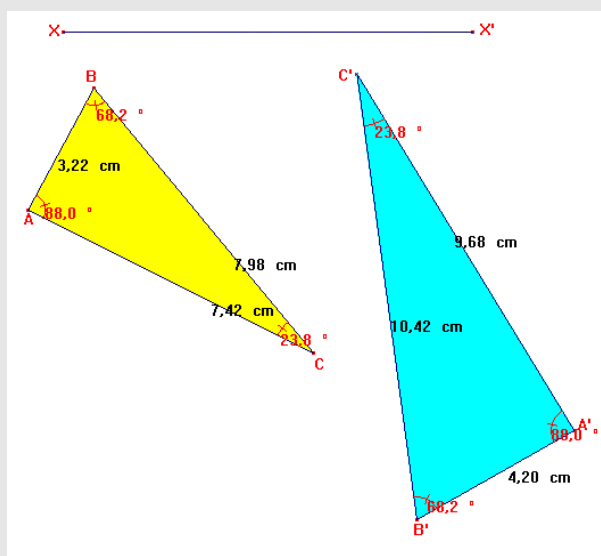
## Triangles semblants.

El mètode anterior es fonamenta en el fet de formar dos triangles iguals (un vertical i l'altre horitzontal). Però per fer-los ens ajudem del llapis que ens ajuda a formar un triangle més petit que té la mateixa forma.

Dos triangles que tenen els seus angles iguals tindran la mateixa forma. Podran diferir en grandària, però visualment els veurem semblants. Però la paraula semblant té, en aquest cas, un significat matemàtic afegit: semblant vol dir també proporcional. Això és degut a que si dos triangles són semblants els seus costats corresponents seran proporcionals.

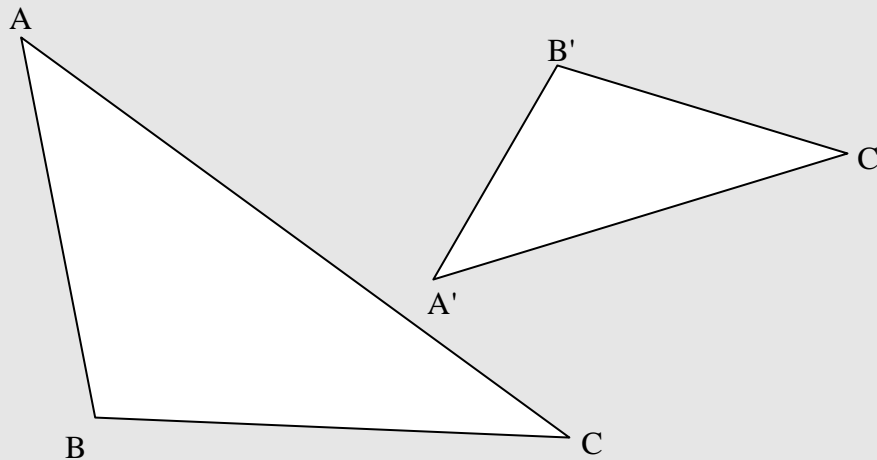
Quan dos triangles tenen els **angles iguals** són **semblants**, és a dir, **els seus costats són proporcionals**.

- 4) Obre amb **cabri** la figura *triangles\_1.fig*. Pots modificar el triangle **ABC** lliurement i moure el triangle **A'B'C'** tirant dels punts **A'** o **B'**. També pots ampliar o reduir aquest darrer triangle amb els punts **X** i **X'**. Són iguals els angles dels dos triangles? Comprova, variant els triangles, tres vegades que es manté la proporcionalitat entre els costats corresponents.



Cas	AB : A'B'	BC : B'C'	AC : A'C'
1			
2			
3			

- 5) Tenim dos triangles semblants dels quals prendrem algunes mesures i calcularem les altres plantejant les proporcions corresponents. Després comprova'n els resultats.



- Mesura **AB** i **A'B'**. Després mesura **AC** i calcula **A'C'**. Comprova'n la mesura.
- Mesura ara **B'C'** i calcula **BC**. Comprova'n la mesura.

## Tales de Milet

Aquesta propietat dels triangles semblants és conseqüència directa de l'aplicació del Teorema de Tales. El seu probable autor, Tales de Milet (630 a.n.e-546 a.n.e.) va ser, cronològicament, el primer dels grans matemàtics grecs de l'antiguitat. Era d'origen fenici i residia a Milet, una pròspera ciutat grega de l'Àsia Menor. Proce-



*Tales de Milet*

dia d'una família de comerciants i, per aquest motiu, va realitzar freqüents viatges a Egipte, la qual cosa el va animar a l'estudi dels fenòmens naturals i de la geometria. Per exemple, Tales va afirmar que l'aigua era el principi i origen de totes les coses, tot rebutjant les explicacions que sobre l'origen del món imperaven al seu temps, en les quals sempre intervenien els déus. No ens ha arribat cap escrit de Tales, per tant no sabem del cert si el Teorema que porta el seu nom és seu. Sí que sabem, en canvi, que el va simplificar i utilitzar en moltes i diferents situacions, com ara calcular l'alçada de diferents edificis o les distàncies dels vaixells a la costa. En geometria es consideren seves les demos-

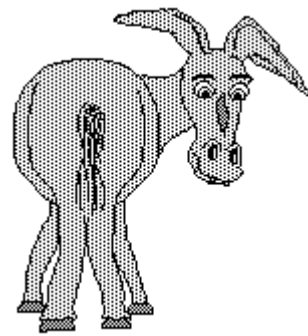
tracions que en un triangle isòsceles hi ha dos angles iguals, o que un diàmetre divideix un cercle en dues parts iguals, entre d'altres. També és famós per haver predit amb encert un eclipsi de Sol l'any 585 a.n.e.

## Llegendes sobre Tales

Hi ha moltes llegendes sobre el caràcter de Tales que, normalment, el presenten com un home esquerp. No serà així en aquestes que t'explicarem ara.

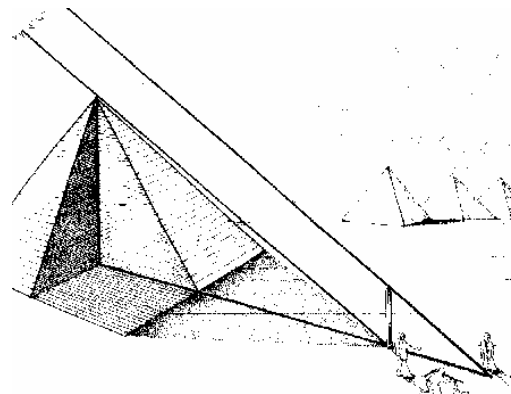
### *El granger i el ruc que no volia anar carregat*

Un pagès que sovint havia d'anar al mercat a vendre càrregues de sal va observar que cada vegada que passaven el riu que separava casa seva de la ciutat, l'ase s'inclinava i remullava els sacs. D'aquesta manera, part de la sal es dissolia a l'aigua i el ruc es notava més lleuger. Fart d'aquestes pèrdues de sal i sense saber què fer el pagès va acudir a consultar Tales. Aquest, després de rumiar una estona, va donar el següent consell al pagès desconcertat: "Fes el següent viatge a la ciutat amb els sacs carregats d'esponges".



### *La piràmide de Khufu*

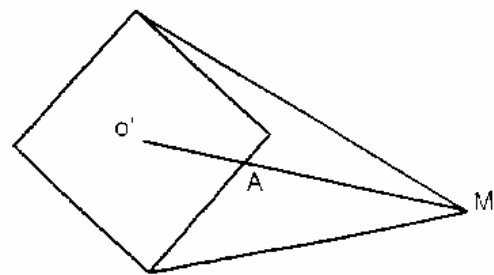
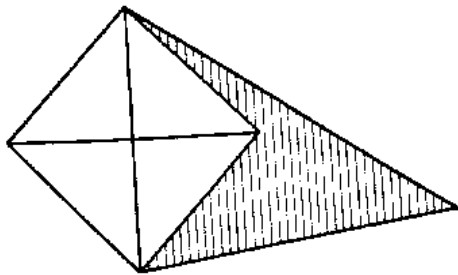
S'explica que mentre es trobava Tales al costat de la Gran Piràmide de Khufu (o Keops, com l'anomenaven els grecs), s'hi va acostar un sacerdot i li va demanar que li digués quina era l'altura aproximada de la piràmide. Tales li va contestar que no la hi volia dir "aproximadament" sinó que s'estimava més dir-la-hi "exactament". Per fer-ho, es va estirar sobre la sorra deixant la marca de l'altura del seu cos al terra. Després va afegir: "M'estaré aquí quiet fins que la meua ombra coincideixi amb la marca del terra, és a dir, amb la meua altura. Llavors l'altura de la piràmide i la seva ombra també coincidiran. Només caldrà mesurar les passes d'aquesta." El sacerdot, sorprès, li va demanar si no existia cap error en el seu raonament. Sense fer gaire cas del que li qüestionaven, Tales va continuar: "Però, realment, no tinc ganes d'esperar que el meu cap s'escalfi sota el Sol. Per tant, clavaré el meu bastó al terra i, quan la mida de la seva ombra sigui la meitat de la real, l'ombra de la piràmide també ho serà; o quan sigui la tercera part... N'hi haurà prou a comparar la llargada del bastó i la seva ombra amb la de l'ombra de la piràmide i multiplicant i dividint esbrinar la seva altura".



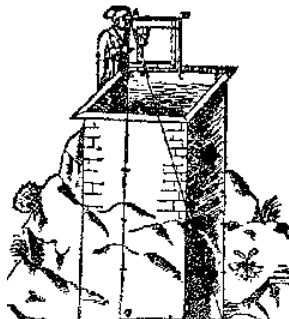
6) Imagina que l'altura del bastó és de mig pas i que quan Tales en mesura l'ombra observa que aquesta amida  $\frac{3}{4}$  de pas. Si el costat de la base de la piràmide és de

166 passes i, en aquell moment, l'ombra és de 73 passes i mitja, quina és l'altura en passes de la piràmide? Si saps que una passa és, més o menys 1,4 m, esbrina l'altura en metres.

És clar que hem simplificat força el problema. Pensa que les ombres no van en la direcció que volem i la situació dibuixada a l'esquema anterior és la més senzilla: la direcció de la llum solar és perpendicular al costat de la piràmide. És molt més probable que Tales se'n trobés una altra com la del primer esquema inferior, on es veuen la piràmide i la seva ombra des de dalt i amb la direcció del Sol inclinada. Per poder calcular l'altura Tales també va haver d'esbrinar, segurament la distància O'A. Però no hi ha dubte que Tales se les va poder enginyar per fer-ho.



Això ens dóna la idea que no podem estar depenent de les direccions de les ombres per poder calcular mesures difícils de prendre directament. Però Tales, gràcies al seu teorema, ens va proporcionar les bases per construir-ne aparells per a mesures indirectes com les ballestes, els astrolabis, els miralls, els quadrants, etc.



Mesurant amb quadrants



Mesurant amb astrolabi

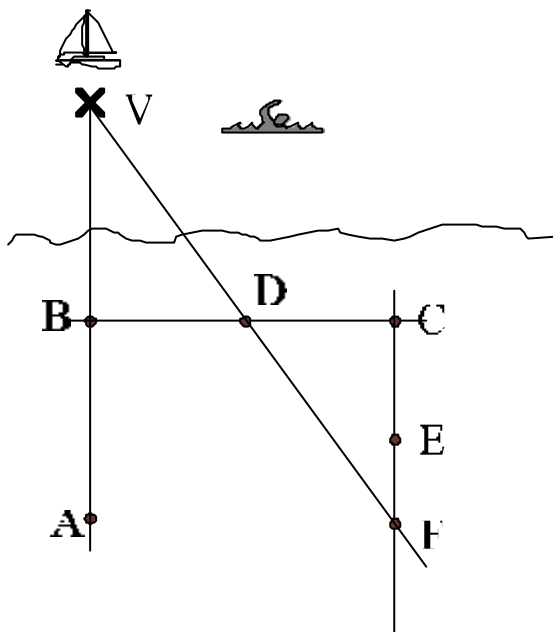
*A quina distància es troba el vaixell?*

Una altra de les llegendes sobre Tales explica que era capaç de determinar a quina distància es trobaven els vaixells que s'apropaven a la costa. No sabem del cert el mètode que va fer servir, però pensant en els coneixements geomètrics de què disposava a l'època s'han fet diferents teories.

Els coneixements que calien eren els següents:

- dos triangles són iguals si tenen dos angles iguals i un costat.
- quan dues rectes es creuen, els angles oposats són iguals.

Un dels mètodes que es pensa que va poder utilitzar el tenim representat a l'esquema següent i es podia fer seguint els següents passos.



1. Primer es posaven dues estakes A i B alineades amb el vaixell que és en un punt que anomenarem V.
2. Després es clavava una tercera estaca C formant angle recte amb la línia AB
3. Seguidament es posava una quarta estaca D al punt mig entre B i C.
4. Es clavava una cinquena estaca E fent angle recte amb BC
5. Es caminava seguint la línia CE fins aconseguir veure el vaixell alineat amb l'estaca D, i es posava una sisena estaca F en aquest punt

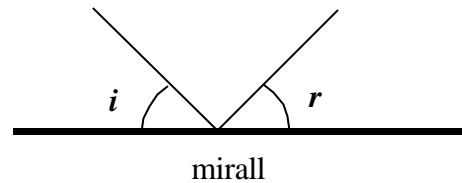
D'aquesta manera s formen dos triangles rectangles BVD i DCF.

- 7) Fem ara unes comparacions:  
Com són els segments BD i el segment DC?  
  
Com són els angles VBD i DCF?  
  
Com són els angles BDV i CDF? Per què?  
  
Què podem dir dels dos triangles BVD i DCF?
- 8) Ara ja ho tenim pràcticament. La distància que volem conèixer és BV. Quin costat del triangle DCF es correspon amb aquesta mesura?
- 9) Obre amb el programa **cabri** la figura *vaixell.fig* i comprova, movent el punt F, el mètode de Tales

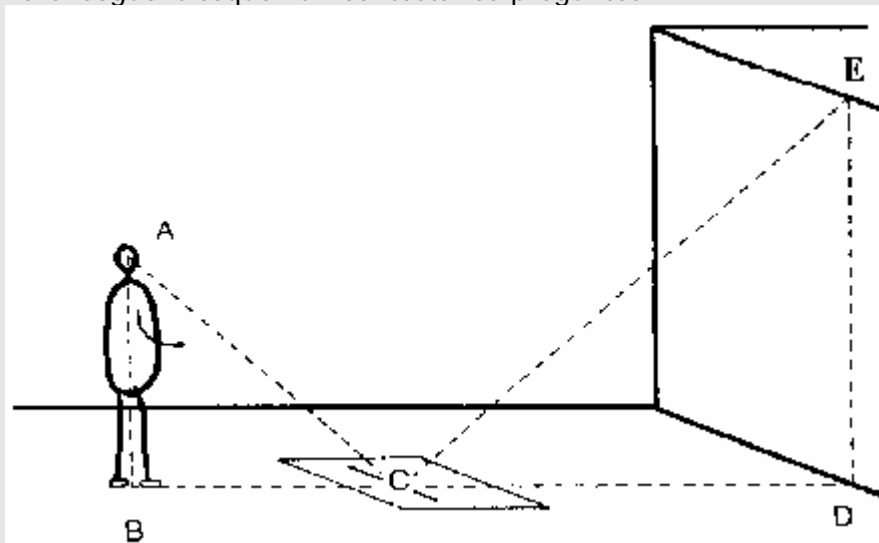
## Mesurem altures amb un mirall

Per realitzar mesures indirectes ens podem construir diferents aparells que no siguin tan incòmodes i que no ens demanin anar-nos arrossegant per terra o anar clavant estaques perpendiculars a tort i a dret. En veurem alguns com la ballesta o els quadrants. Però també podem fer servir una cosa tan senzilla com un mirall. Una de les coses que hem de saber és que un raig de llum és reflectit en un mirall amb un angle igual amb el que ha incidit.

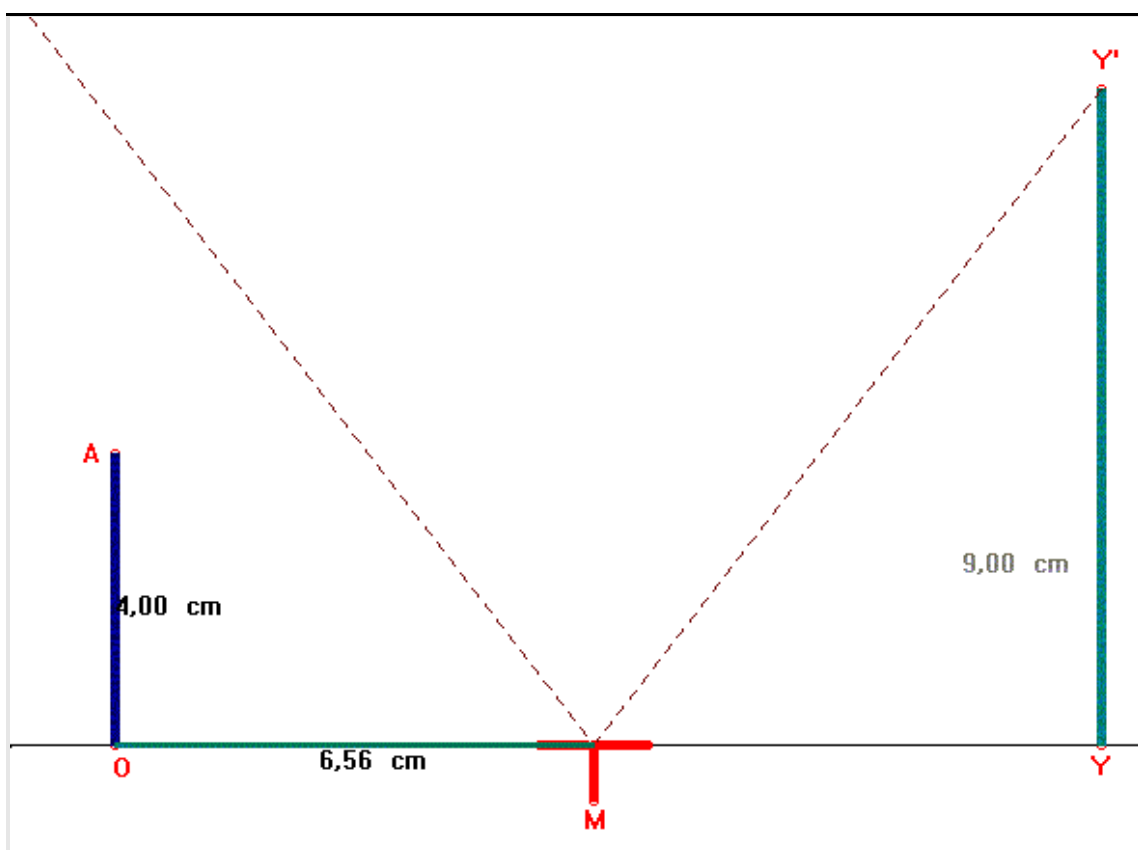
Observa aquest esquema de reflexió fixant-te especialment en els angles  $i$  (d'incidència) i  $r$  (de reflexió)



10) Observa el següent esquema i contesta les preguntes:

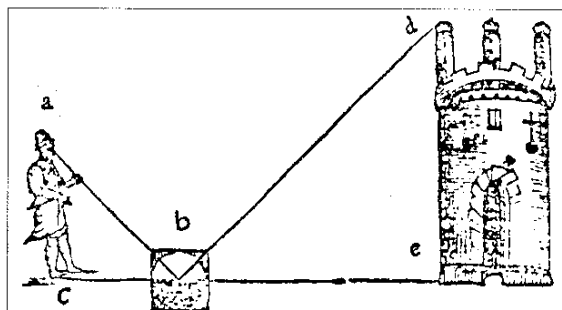


- Són semblants els triangles **ABC** i **CDE**? Per què?
  - Assenyala quins són els costats de cada triangle que es poden mesurar directament.
  - A partir del que has respost a les dues preguntes anteriors, explica un mètode per calcular l'altura **ED**.
- 11) Obre amb **cabri** la figura *mirall.fig* i fes una pràctica de mesura per calcular **YY'** movent "l'observador" tirant de **O** o movent el mirall **M**. Anota els càlculs i comprova'n la mesura.



12) Repeteix amb un mirall algunes de les mesures de l'exercici 2 (cistelles de bàsquet, fanals...)

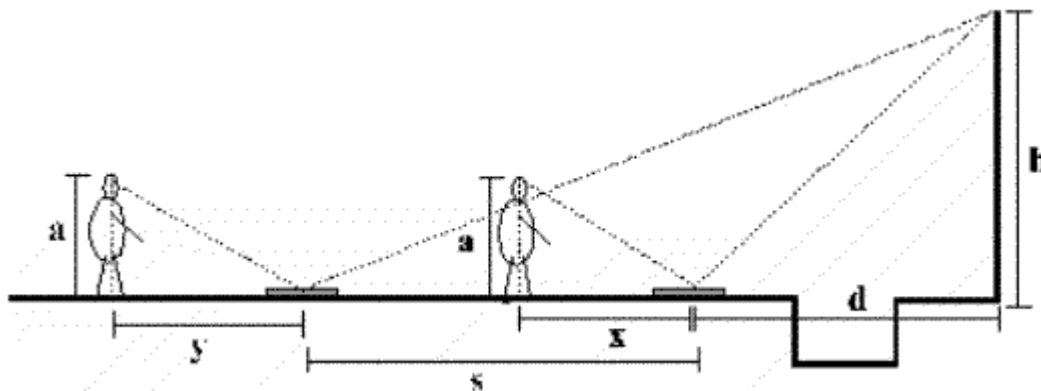
Aquí tens un dibuix extret d'un llibre de l'any 1573 on està explicat aquest mètode. Es tracta del *Tratado de Geometria Practica y Speculativa* de Juan Pérez de Moya. Molts anys abans, el matemàtic hindú Brahmagupta (segle VII) va resoldre com realitzar la mesura quan el peu és inaccessible i fent dues observacions.



## Mètode de Brahmagupta



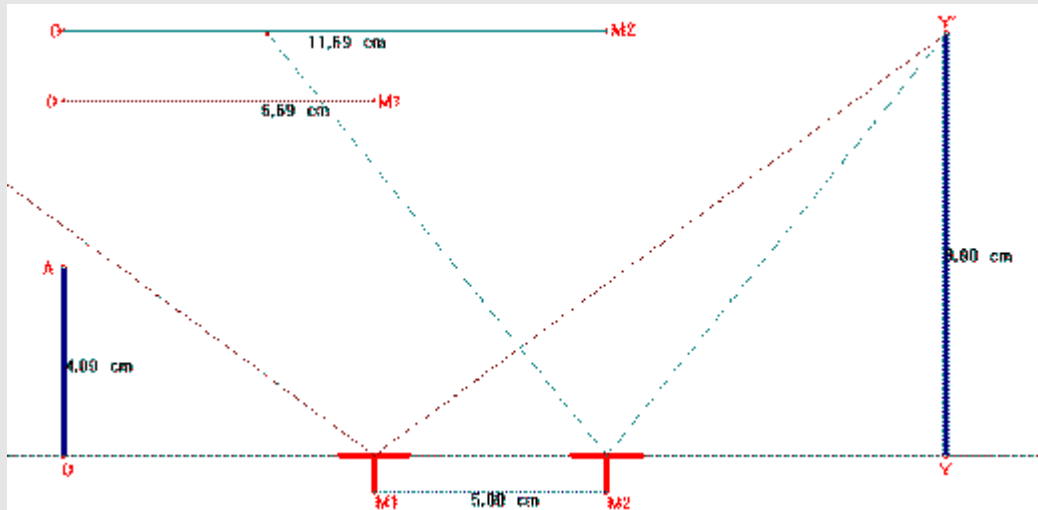
- Primer, l'observador posa el mirall i camina fins que veu la part més alta de l'edifici. Es formen dos triangles semblants.
- Després es col·loca el mirall en una segona posició (a una distància  $s$ ) i es camina fins que torna a veure la part superior de l'edifici. Es formen dos nous triangles semblants.



13) Estudia el dibuix. Intentarem descobrir quins càlculs s'han de fer segons el mètode de Brahmagupta. Per fer-ho has d'estudiar bé quins triangles són semblants i quines són les mesures que es poden fer realment ( $a$ ,  $x$ ,  $y$  i  $s$ ). Les mesures  $d$  i  $h$  són dues incògnites (de les quals només m'interessa  $h$ ). Planteja la proporció corresponent a cada triangle. Podràs obtenir un sistema d'equacions. Aïllant la  $d$  i aplicant el mètode d'igualació, podràs arribar a obtenir una fórmula per calcular  $h$ .

- Quin triangle és semblant al que té per costats  $a$  i  $y$ ? Planteja la proporció a partir de les dades del dibuix ( $s$ ,  $d$  i  $h$ )
- Quin triangle és semblant al format pels costats  $a$  i  $x$ ? Planteja la proporció a partir de les dades de l'esquema ( $d$  i  $h$ )
- Planteja el sistema d'equacions amb les dues proporcions obtingudes.
- Tenim dues incògnites de les quals ens interessa només  $h$ . Aïlla la  $d$  en les dues equacions i aplica el sistema d'igualació al sistema.
- Simplifica les expressions fins a obtenir una fórmula que ens permeti calcular  $h$  a partir de  $a$ ,  $s$ ,  $x$  i  $y$ .

- 14) Obre amb **cabri** la figura *brahmagupta.fig* i fes una prova de càlcul. Anota les mesures que prens i comprova el resultat aplicant la fórmula de l'exercici anterior. (Pots variar l'altura  $YY'$ , canviar el segment de lloc, canviar la posició dels miralls...)



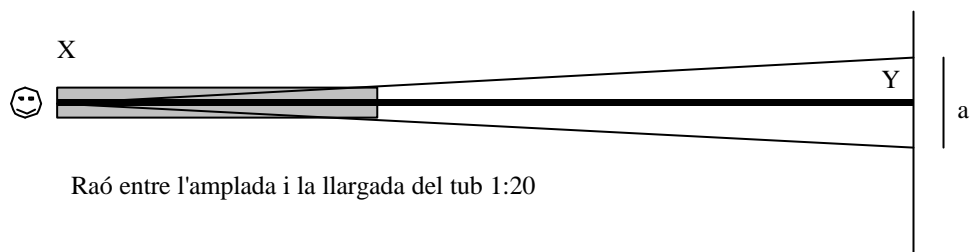
- 15) realitza alguna pràctica real amb el mètode de Brahmagupta. Digues què mesures, anota les dades i els càlculs. Si és possible comprova la mesura.

## Mesurem distàncies amb un tub: el taquímetre

Quan els dos peus de mesura són accessibles, però les irregularitats del terreny dificulten o impedeixen les mesures directes podem utilitzar el **taquímetre**. Per exemple, un taquímetre adaptat permetria mesurar la distància entre dos cims de muntanya.

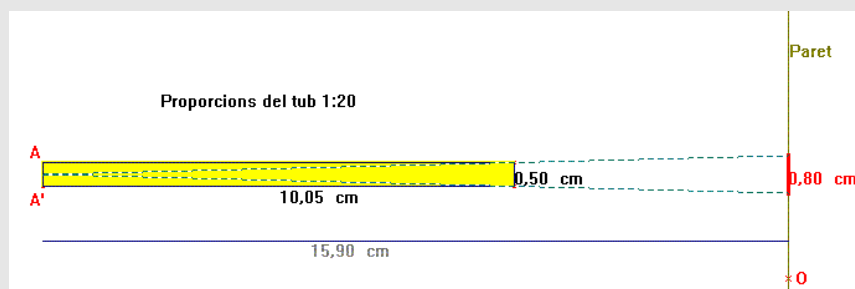
Un taquímetre és, bàsicament, un tub amb el qual establim una relació entre el seu diàmetre i la seva llargada. Per exemple, a nosaltres ens pot anar bé una relació 1:20 (la llargada del tub ha de ser 20 vegades la seva amplada).

Calen dues persones per realitzar la mesura. L'una es posa en un dels extrems de la línia que es vol mesurar amb una cinta mètrica. L'altra enfoca el lloc amb el tub i indica al company o companya el tros de cinta mètrica que veu. Després amb un senzill càlcul se'n pot esbrinar la distància.



16) Observa el dibuix i digues com s'ha de calcular la distància entre els punts **X** i **Y** sabent la mesura **a** i que la relació entre el diàmetre del tub i la seva llargada és 1:20.

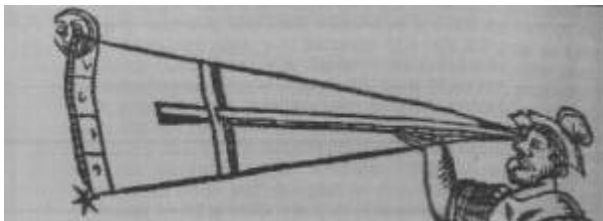
17) Obre amb **cabri** la figura *taquimetre.fig*. Pots moure la paret tirant del punt O. Observa que la distància a la paret és sempre 20 vegades la longitud del segment de paret que es veu encara que variï s l'amplada del tub (tirant de **A** o **A'**)



18) Construeix-te amb una companya o company un taquímetre i realitza algunes pràctiques de mesura. És important que mesuris bé la proporció entre la llargada del tub i el seu diàmetre. Necessitaràs també una cinta mètrica per mesurar el tros visible. Anota què mesures, les dades i els càlculs.

## La ballesta o bàcul de Jacob

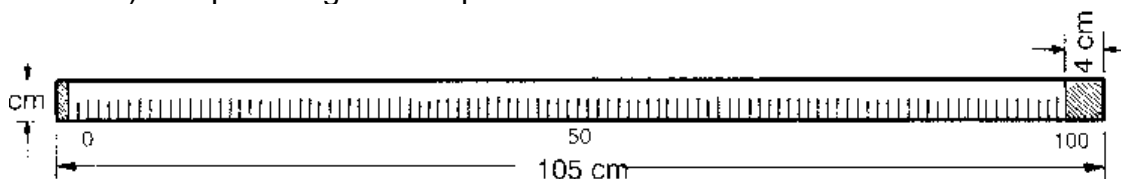
Aquest instrument de mesura va ser introduït a Europa durant el segle XIII i va ser perfeccionat durant els segles XV i XVI. Amb diferents variants, va ser molt utilitzat en navegació i astronomia. El nom de bàcul de Jacob sembla que és degut al seu probable inventor, un jueu anomenat Jacob ben Mahir. Un dels primers documents coneguts en els que s'explica el seu ús és d'un altre jueu, aquest català Levi ben Gerson que en va fer una descripció al 1342.



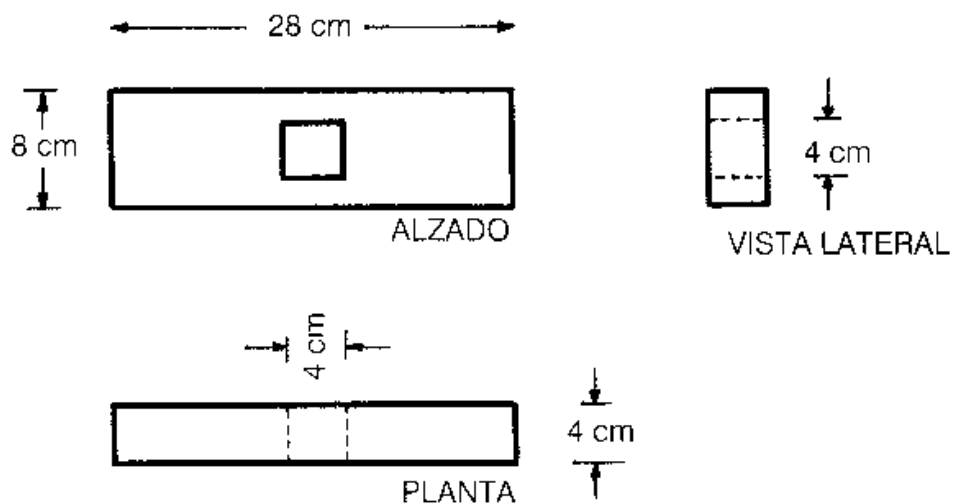
La ballesta està formada per dos pals units perpendicularment i de manera que el més curt es pot moure amunt i avall per sobre del llarg, que està graduat

Per construir-la pots seguir aquestes instruccions:

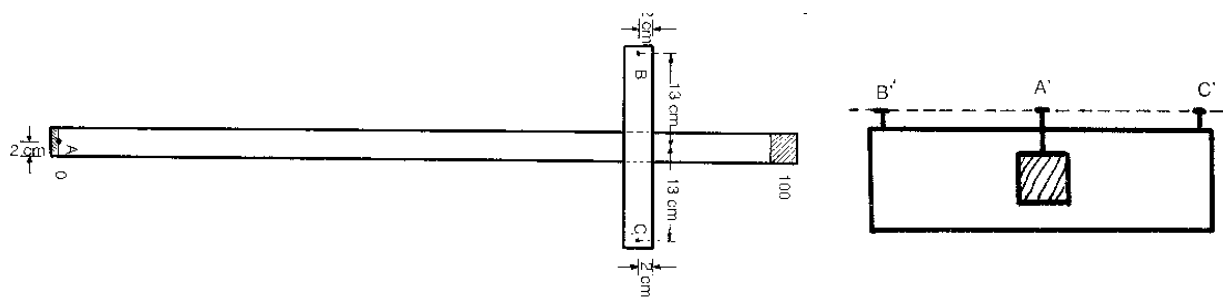
- a) Tallar un llistó de fusta de 105 cm i de secció quadrada (d'uns 4 cm de costat). Després es gradua el primer metre en 100 cm.



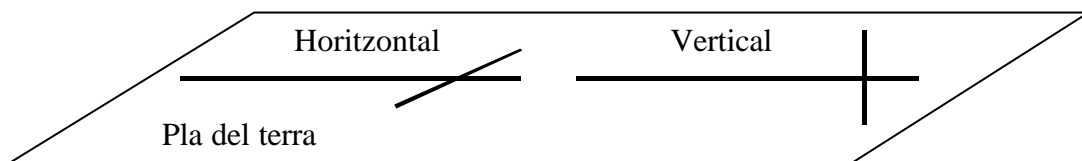
- b) Preparar un cursor de fusta d'uns 28 cm d'amplada tal com es veu a la figura.



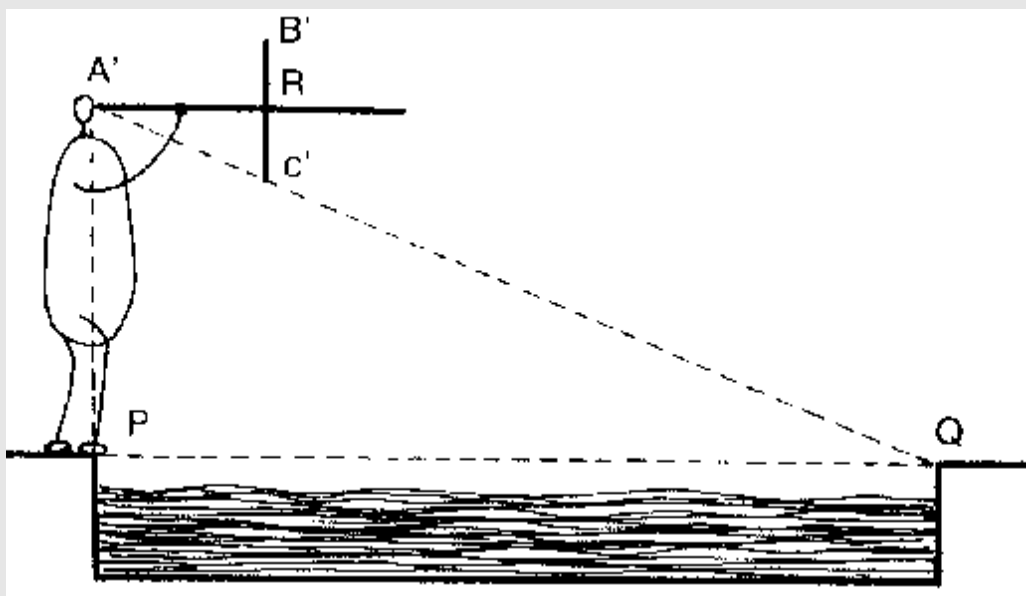
- c) Per muntar-ho es fa passar el llistó pel forat del cursor i es posen uns claus que ens ajudin com a visors. És important que el clau A quedi ben centrat entre l'A i el B.



Amb el bàcul de Jacob es pot treballar en dues posicions, horitzontal si els dos braços estan paral·lels al terra, i vertical si el braç curt el posem perpendicularment al terra.

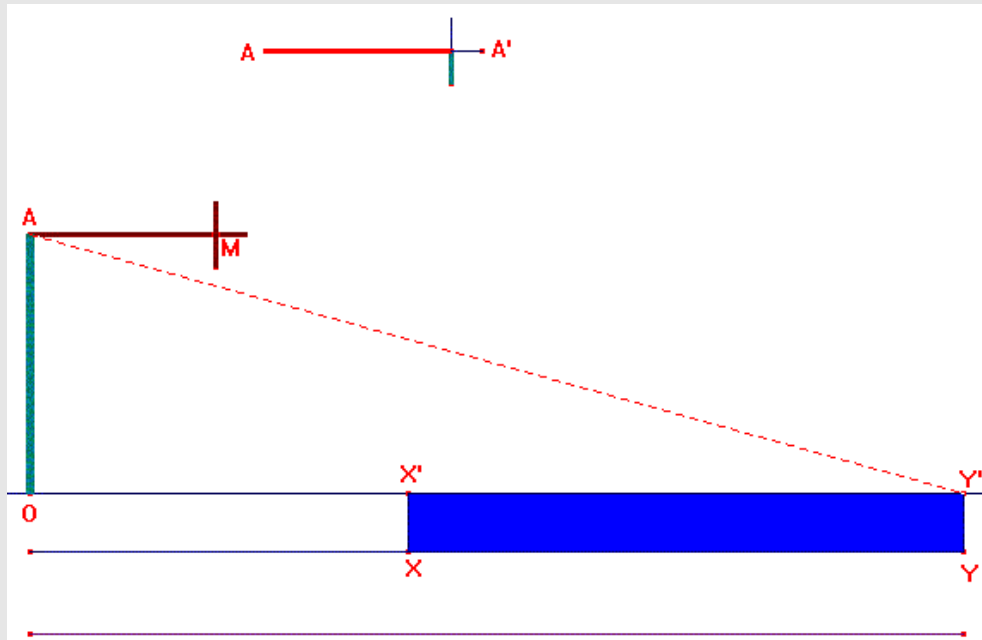


19) Imaginem que hem de mesurar l'amplada d'un riu amb la ballesta. Observa el dibuix i contesta.



- Són semblants els triangles  $A'RC'$  i  $APQ$ ? Per què?
- Sabent que la distància dels ulls de l'observador al terra  $A'P$  és d'1,7 m, que  $B'C' = 26$  cm i que  $A'R = 80$  cm, calcula l'amplada  $PQ$  del riu.

20) Obre amb **cabri** la figura *ballesta\_amplada\_riu.fig*. Movent el punt M desplaçaràs el cursor de la ballesta. També pots variar l'amplada del cursor tirant de **A** o **A'**. La "persona" **OA** la pots moure amb **O** i allargar o escurçar amb **O**. L'amplada del riu la pots variar amb **X'** o **Y'**. Fes una pràctica de mesura, anota les mesures a l'esquema de la pàgina següent i els càlculs que facis.



AM =

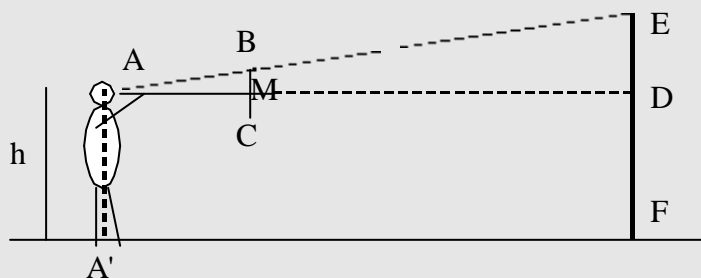
Mig cursor =

OA =

X'Y' =

Els mètodes per realitzar les mesures depenen moltes vegades de si el peu del que volem mesurar és accessible o no. Per exemple, en el cas anterior l'altra riba del riu no era accessible. Estudiarem primer un cas amb peu accessible.

21) Explica el mètode per determinar una altura amb peu accessible.



22) Obre amb **cabri** la figura *ballesta\_altura\_peu\_accessible.fig* i fes una pràctica de mesura. Anota'n les dades i els càlculs:

AM =

Mesura del cursor =

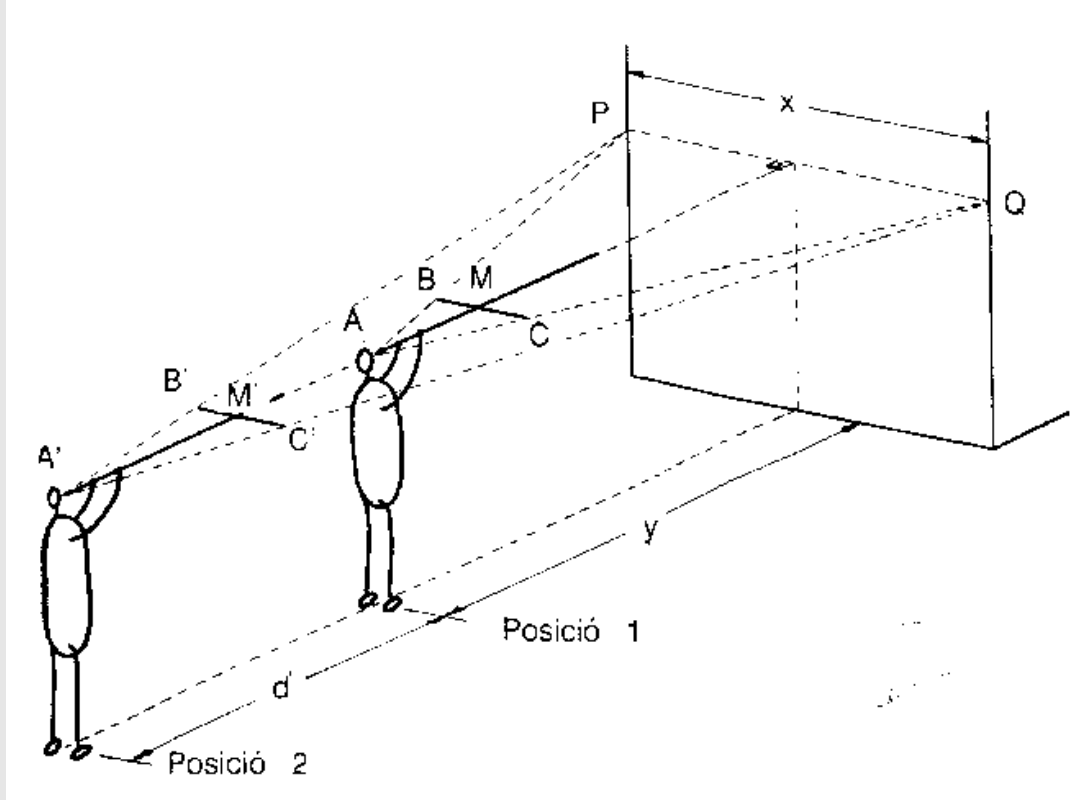
OA =

OY =

Quan el peu és inaccessible les mesures són una mica més complicades, però és quan el bàcul de Jacob mostra les seves grans capacitats.

## Mesura d'amplades amb peu inaccessible

23) Observa atentament l'esquema i vés contestant les preguntes:



Primer l'observador es posa en la posició 1

a) Són semblants els triangles **ABC** i **APQ** ? Per què?

b) Completa aquesta igualtat:  $\frac{BC}{AM} = \frac{\quad}{y}$

Ara, l'observador desplaça el cursor cap endavant una distància igual a l'amplada d'aquest, és a dir: **BC+AM**. Seguidament, retrocedeix amb la ballesta horitzontal fins que la visual que passa per **A'** torna a emmarcar l'amplada **PQ** que volem mesurar. Anomenem **d** la distància retrocedida.

c) Quin triangle és semblant a **A'B'C'**?

d) Completa la igualtat:  $\frac{x}{d+y} = \frac{B'C'}{d}$

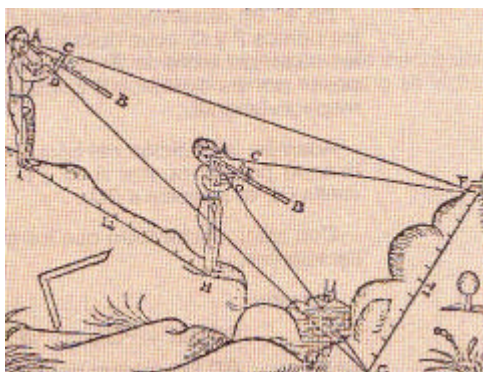
e) A què és igual **B'C'**? A què és igual **A'M'**?

f) Substitueix **B'C'** i **A'M'** pels valors que has dit en la igualtat de la pregunta d.

$$\frac{x}{d+y} = \frac{B'C'}{d} \Rightarrow$$

g) Aïlla la **y** de la igualtat de la pregunta b i substitueix-la a la igualtat de la pregunta f.

h) Vés simplificant fins aïllar la incògnita **x**. A què és igual?



Com hauràs vist, el mètode és, potser, una mica complicat de justificar, però molt fàcil d'aplicar.

*Il·lustració del segle XVI sobre la utilització del bàcul de Jacob*

24) Fes un resum del mètode, sense entrar en justificacions.

25) Obre amb **cabri** la figura *ballesta\_altura\_peu\_inaccessible.fig* i fes una pràctica de mesura.



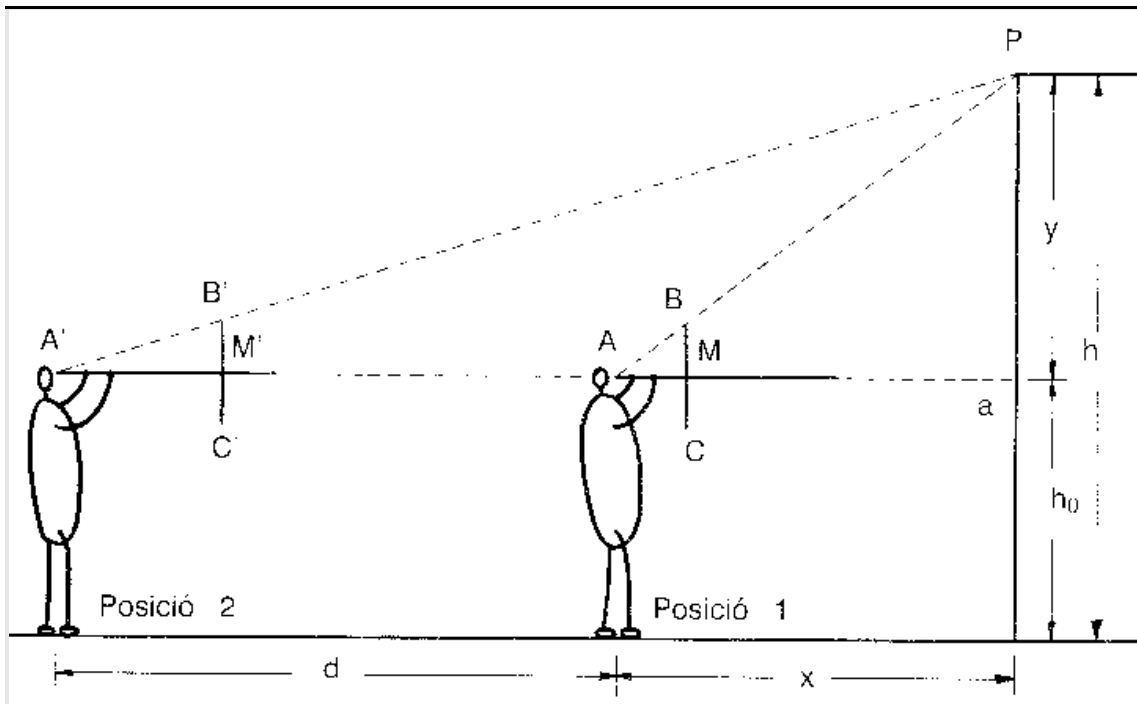
Amplada del cursor: 1,01 cm

Acosta primer l'extrem A de la ballesta a la posició **P1** i després avança el cursor (tirant de M) una distància igual a la seva amplada (**BB'**). Després vés movent la ballesta, tirant de A fins ajustar una altra vegada les línies de vista. Comprova que l'amplada **XX'** es correspon amb la distància **AP1**.

26) Fes un parell de pràctiques de mesura amb una ballesta. Pren nota de què mesures i els resultats obtinguts.

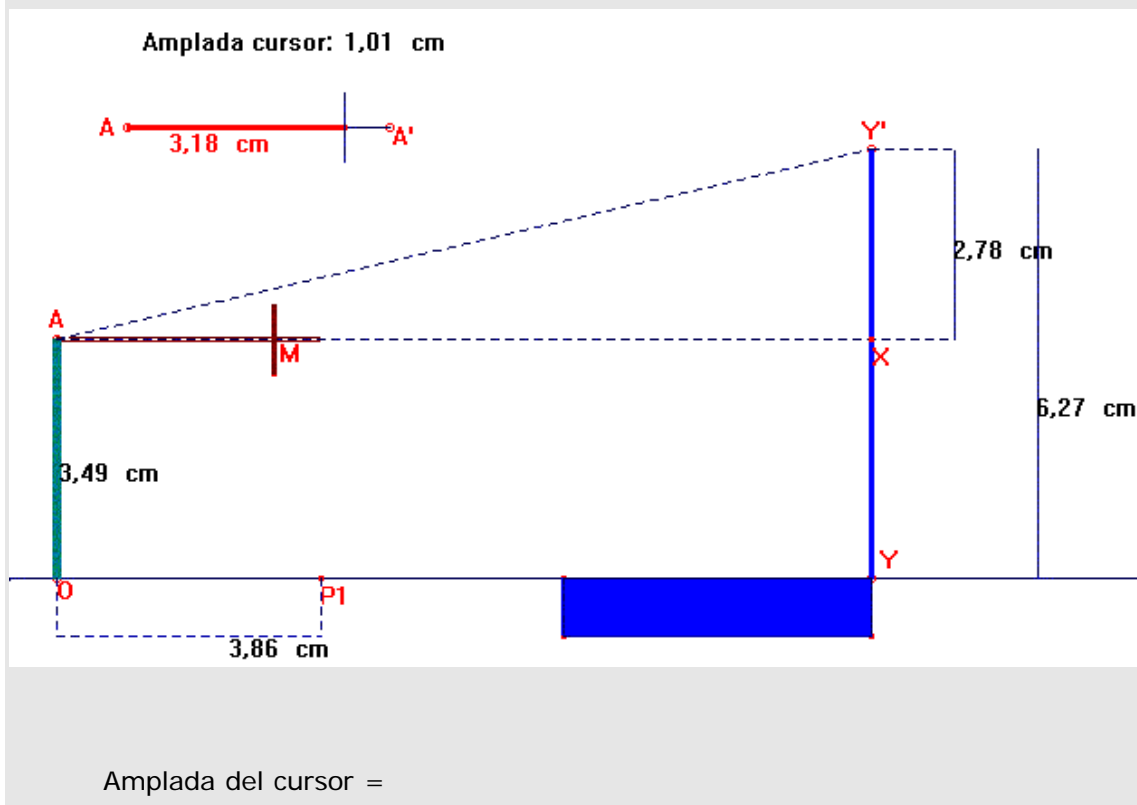
## Mesura d'altures amb peu inaccessible

27) Observa atentament el dibuix i intenta descobrir el mètode per mesurar una altura amb peu inaccessible. Per fer-ho has de tenir en compte que l'observador ocupa primer la posició 1 emmarcant A amb el cursor, i després fa avançar el cursor la meitat de la seva amplada (**MB**). Posteriorment, fixa la posició 2 a una distància d quan torna a emmarcar el punt **P** per la visual. Això fa que **AM' = AM + MB** o bé, si t'ho estimes més **AM' - AM = MB**. També has de recordar que **h<sub>0</sub>** és l'altura des del terra fins als seus ulls.



- Estudia bé la posició 1 i descobreix quins són els rectangles semblants.
- Fes el mateix amb la posició 2.
- Després compara les dues igualtats que has obtingut i observa què tens d'igual en cadascuna.
- Finalment fes les substitucions convenientes fins a definir un mètode per calcular l'altura  $y + h_0$ . Recorda que  $x$  és una incògnita que has de fer desaparèixer ja que no podem saber-ne la mesura.

28) Obre amb **cabri** la figura *ballesta\_altura\_peu\_inaccessible.fig* i fes alguna pràctica de mesura. Comprova el mètode i els resultats obtinguts al problema anterior.



Posició 1: AM =

Posició 2: AM =

AO =

Distància OP1 =

Altura =

AO + OP1 =

29) Realitza alguna pràctica amb una ballesta. Anota què mesures, les dades fonamentals i els resultats obtinguts.

