Examen de vectors i rectes, 1r batxillerat, 12/05/11

1 - Donat el vector u = (-5, k) calcula k de manera que: a) u sigui ortogonal a v = (4, -2). b) el mòdul de u sigui $\sqrt{34}$.

a) Per tal de que u i v siguin ortogonals ha de passar que el seu producte escalar ha d'ésser zero:
u · v = (-5, k) · (4, -2) = - 20 - 2k = 0 => K = -10

b) El mòdul de u és $\sqrt{5^2+k^2}$. Aleshores: $\sqrt{5^2+k^2}=\sqrt{34}$ => 25 + k^2 = 34 => k^2 = 9
que ens dóna k = 3 o bé k = - 3

2 – Troba les coordenades dels vectors que formen un angle de 60º amb a = (2, 4) i que tinguin el mateix mòdul que a.

El mòdul d' a és $\sqrt{4+16}=$ $\sqrt{20}$.

Posem b = (x, y) als vectors que ens demanen, el seu mòdul és $\sqrt{x^2+y^2}$ que ha d'ésser igual a $\sqrt{20}$, o, el que és el mateix, $x^2 + y^2 = 20$.

Si entre a i b hi ha d'haver un angle de 60º, el producte escalar d'aquests dos vectors és:
a · b = |a| · |b| cos60º = $\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}\cdot 1/2 = 10$.

Però el mateix producte escalar, en coordenades, és a · b = (2, 4) · (x, y) = 2x + 4y

Igualant els dos resultats: 2x + 4y = 10 o bé x + 2y = 5 o bé x = 5 - 2y,

Elevant al quadrat $x^2 = 25 - 20y + 4y^2$ i que substituït en la igualtat dels mòduls queda
$25 - 20y + 4y^2 + y^2 = 20 \Rightarrow 5 - 4y + y^2 = 0$ que resolent l'equació dóna

$$y = (4\pm\sqrt{16-4})/2 = 2\pm\sqrt{3}$$

Els corresponents valors de x seran

x = 5 - 2y = 5 - 2(2 - $\sqrt{3}$) = 1 + 2$\sqrt{3}$ i x = 5 - 2(2 + $\sqrt{3}$) = 1 - 2$\sqrt{3}$. Els vectors demanats són:

$$(1 + 2\sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3}) \quad \text{i} \quad (1 - 2\sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})$$

3 - La recta r passa pels punts M = (3, 3) i N = (8, 7), si A és el punt (–2, 3) troba: a) L’equació general de la recta que passa per A i és paral·lela a r. b) L’equació general de la recta que passa per A i és perpendicular a la recta r. c) La distància del punt A a la recta r,

Primer trobarem l'equació general de la recta r. El vector NM és (8, 7) - (3, 3) = (5, 4) que és un director de la recta r, per això els coeficients de l'equació de r són 4 i -5, l'equació és
4x - 5 y + c = 0
Però com que r passa per (3, 3) es compleix 12 - 15 + c = 0 => c = 3 i l'equació queda

$$4x - 5y + 3 = 0$$

a) L'equació de la recta paral·lela a r serà 4x - 5y + c = 0
Però com que passa per (-2, 3) es compleix que - 8 - 15 + c = 0 => c = 23 i l'equació queda

4x - 5y + 23 = 0

b) L'equació de la recta perpendicular a r serà 5x + 4y + c = 0
Però com que passa per (-2, 3) es compleix que - 10 + 12 + c = 0 => c = - 2 i l'equació és

5x + 4y - 2 = 0

c) Aplicant la fórmula la distància d'A a r és:

$$d = \frac{|4(-2) - 5 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

4 – Troba els punts de la recta y = – x + 2 que equidistin de les rectes x + 2y – 5 = 0 i 4x – 2y + 1 = 0.

Els punts que equidisten de dues rectes són els punts de les seves bisectrius, que són els que compleixen

$$\frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2y + 1|}{2\sqrt{5}}$$

$$2|x + 2y - 5| = |4x - 2y + 1|$$

Aquesta igualtat es compleix de dues formes que dóna les equacions de les dues bisectrius

a) 2(x + 2y - 5) = 4x - 2y + 1

Simplificant la bisectriu a)
2x + 4y - 10 = 4x - 2y + 1
- 2x + 6y = 11

b) 2(x + 2y - 5) = - 4x + 2y -1

Simplificant la bisectriu b)
2x + 4y -10 = - 4x + 2y - 1
6x + 2y = 9

La intersecció d'aquestes dues bisectrius amb la recta y = - x + 2 ens donarà els punts buscats

La intersecció amb a)

$$\begin{cases} -2x + 6y = 11 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

- 2x + 6y = 11
2x + 2y = 4

8y = 15
y = 15/8

x = 2 - 15/8 = 1/8

El punt és $\left(\frac{1}{8}, \frac{15}{8}\right)$

La intersecció amb b)

$$\begin{cases} 6x + 2y = 9 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

6x + 2y = 9
- 2x - 2y = - 4

4x = 5
x = 5/4

y = 2 - 5/4 = 3/4

El punt és $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

5 – Dos vèrtexs consecutius d'un rectangle són A = (–1, 5) i B = (2, 7). Un altre vèrtex està sobre la recta r: x + 5y – 11 = 0. Troba els dos vèrtexs que falten del rectangle. Aquest problema té dues solucions, n'hi ha alguna que sigui un quadrat?

El vector AB és (2, 7) - (-1, 5) = (3, 2)
Anomenen A, B, C i D, amb aquest ordre, els quatre vèrtexs del rectangle.

Primera solució

El costat BC té com a vector ortogonal a (3, 2), per això els coeficients de la recta BC són 3 i 2 i l'equació és 3x + 2y + c = 0. Però com que aquesta recta passa pel punt B
3·2 + 2·7 + c = 0 => c = - 20 i l'equació de BC queda

$$3x + 2y - 20 = 0$$

El punt C és la intersecció de BC amb r:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 20 \\ x + 5y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -3x - 2y & = & -20 \\ 3x + 15y & = & 33 \\ \hline \end{array}$$

$$13y = 13 \Rightarrow y = 1$$

La segona coordenada x + 5·1 = 11 => x = 6
El punt C és (6, 1)

El vector DC és el mateix que AB. Si D = (a, b) tenim DC = (6, 1) - (a, b) = (6 - a, 1 - b) = (3, 2) que coordenada a coordenada 6 - a = 3 => a = 3 i 1 - b = 2 => b = -1

El punt D és doncs (3, -1)

Els costat d'aquest rectangle mesuren |AB| = $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
|BC| = $\sqrt{(6-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{52}$
que, evidentment no és un quadrat.

Segona solució

L'altre solució es trobarà posant el punt D sobre la recta r (en lloc del C, com hem fet abans)

La recta AD té per equació 3x + 2y - c = 0, però per passar A: 3·(-1) + 2·5 + c = 0 => c = -7, i l'equació de AD queda

$$3x + 2y - 7 = 0$$

El punt D és la intersecció de AD amb r

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + 5y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -3x - 2y & = & -7 \\ 3x + 15y & = & 33 \\ \hline \end{array}$$

$$13y = 26 \Rightarrow y = 2$$

La segona coordenada: x + 10 = 11 => x = 1
El punt D és (1, 2)

Com que el vector DC és igual que AB i si C = (a, b) tindrem (a - 1, b - 2) = (3, 2), o sigui a - 1 = 3 => a = 4 i b - 2 = 2 => b = 4. O sigui el punt C és (4, 4)

Ara el costat BC mesura $\sqrt{(4-2)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{13}$ que és igual al de AB. Aquest cas SÍ que es tracta d'un quadrat.