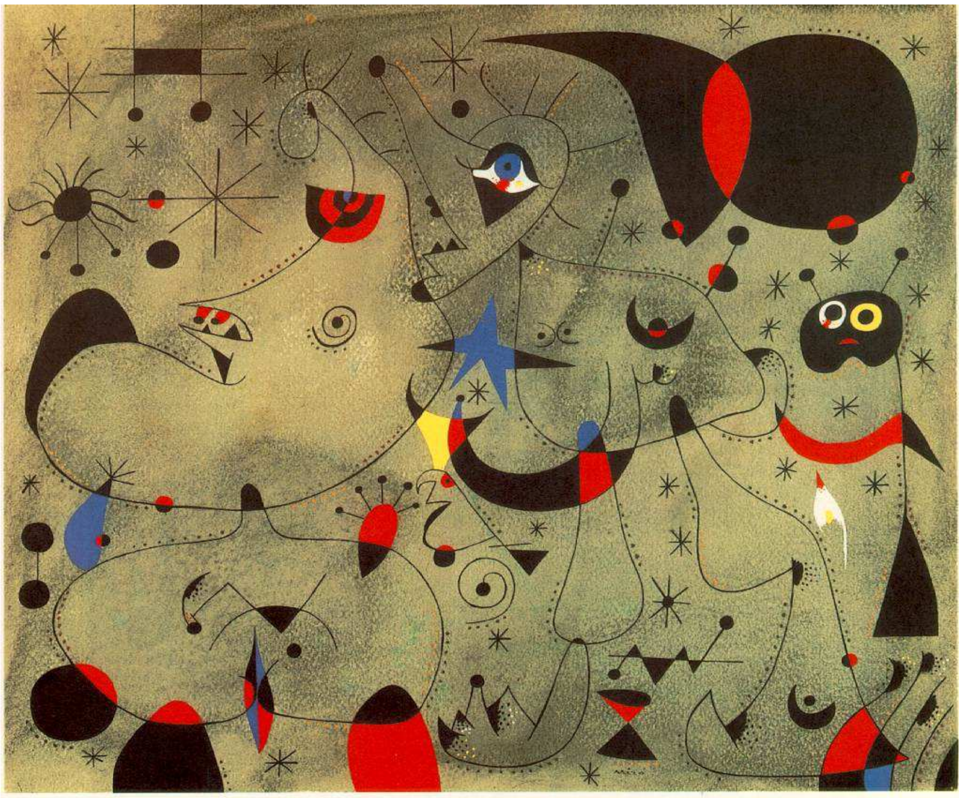
Capítol 5, Espais vectorials



5.1 Combinació lineal de vectors

Una **combinació lineal** d'un grup de vectors $v_1, v_2, ..., v_n$ d'un espai vectorial E sobre un cos K *és un altre vector que s'obté de la forma:* $r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 + ... + r_n \cdot v_n$ *, on* $r_1, r_2, ..., r_n$ *són escalars del cos K*.

D'una altre forma es pot dir que una combinació lineal d'un grup de vectors *és una suma de 'múltiples' d'aquests vectors*.

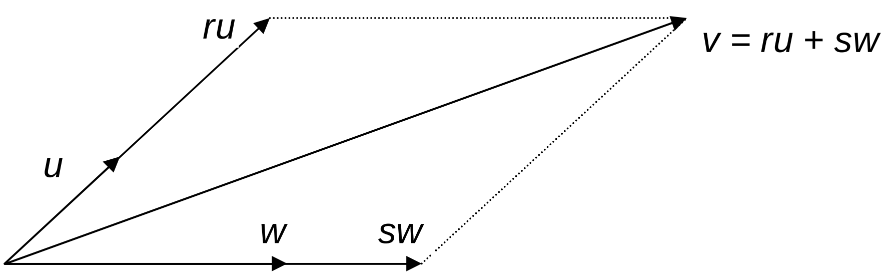
Per exemple, el vector del pla (1, 1) és combinació lineal de (1,0) i (01), ja que (1, 1) = 1·(1, 0) + 1·(0, 1). El vector (2, 2) és combinació lineal de (1, 0), (0, 1) i (-1, 2) ja que (2, 2) = 2·(1, 0) + 2·(0,1) + 0·(-1, 2)

A partir d'ara no escriurem el símbol del producte ·, ni de l'1 quan és un factor, tal com és absolutament habitual.

El polinomi $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ que és un vector de l'espai vectorial de tots el polinomis, és combinació lineal dels polinomis 1, x, x^2 i x^3. La mateixa forma d'escriure els polinomis ho indica.

Qualsevol nombre complex, *a+bi*, de l'espai vectorial del complexos sobre els real, és combinació lineal del dos complexos 1, *i*. També la mateixa forma d'escriure els complexos ho mostra.

El gràfic mostra un vector *v* que és combinació lineal d'altres dos *u* i *w*.



L'element neutre de E, és un element especial, doncs siguin quin siguin els vectors $v_1, v_2, ..., v_n$ de E, sempre (vegeu paràgraf 4.15) es podrà posar:

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$$

entenent que el primer zero és un vector, i els altres són escalars. Resulta que el vector 0 és combinació lineal de qualsevol conjunt de vectors.

5.2 Dependència i independència lineal d'un conjunt de vectors

Sigui un espai vectorial E sobre un cos K. Es diu que els elements $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de E són **linealment independents** si es compleix:

$$v_n = 0 \quad amb \quad r_1 \in K, r_2 \in K, \ldots, r_n \in K \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 0, \ldots, r_n = 0$$

O sigui que no hi pot haver una combinació lineal nul·la dels vectors v_i sense que tots els coeficients r_i siguin zero.

Pel contrari es diu que els elements $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de E són **linealment dependents** si existeixen uns escalars $r_1, r_2, \ldots, r_n$ d'elements de K, de forma que no tots siguin igual a zero, que

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = 0$$

O sigui que hi combinacions lineals nul·les amb algun coeficient no nul.

Fixeu-vos que els dos conceptes: linealment independents i linealment dependents, són conceptes contraris, és a dir si un grup de vectors no és linealment independent és linealment depenent, i viceversa.

Fixeu-vos amb la diferència entre els conceptes explicats en aquest paràgraf i el mencionat en el paràgraf anterior. Una combinació lineal és un vector. En canvi, la dependència o independència lineal són propietats que s'apliquen a un grup de vectors.

Exemples:

El conjunt (1, 0), (0, 1) és linealment independent. Comprovem-ho:

> Si es pogués posar $r(1, 0) + s(0, 1) = (0, 0)$ tindríem que $(r, 0) + (0, s) = (0, 0)$, o sigui que $(r, s) = (0, 0)$, el que implica que $r = 0$ i que $s = 0$, i així queda demostrat.

De la mateixa forma es pot demostrar que la terna (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) són linealment independent.

També és fàcil veure que el conjunt (1, 0), (0, 1) i (1, 1) és linealment dependent ja que es poden trobar el escalars 1, 1 i -1 que

$$1(1,0) + 1(0, 1) - 1(1, 1) = (0, 0)$$

Si considerem l'espai $\mathbf{R}^n$, exemple del paràgraf 4.14, es pot veure que els n elements, de forma que en cada un d'ells solament hi ha una coordenada que és un 1, i les demés són 0, i la coordenada 1 va variant de lloc en cada element, començant pel primer lloc i acabant per l'últim, tal com es veu aquí:

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

són linealment independents. Per comprovar-ho, sols cal aplicar la definició, si

$$a_1(1, 0, \ldots, 0)+a_2(0, 1, \ldots, 0)+ \ldots +a_n(0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0)$$

és que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

o sigui

$$a_1=0, a_2=0, \ldots, a_n= 0$$

amb el que queda demostrada la independència.

Es pot comprovar fàcilment, i es deixa pel lector, que els polinomis 1, x, x^2, x^3, ..., x^n, són linealment independents. I també és fàcil veure que els complexos 1, i, són linealment independents.

Si considerem l'espai vectorial d'un cos K sobre ell mateix tindrem que un sol element diferent de 0, és un conjunt linealment independent. En canvi dos elements de K, siguin quins siguin, són linealment dependents, ja que per dos element a i b, es pot posar $ba+(-a)b=0$, i com que, o b, o $-a$, són diferents de 0, resulta que a i b són linealment dependents.

Proposició 1: *Tot subconjunt d'un conjunt de vectors linealment independent és linealment independent*.

O sigui que *si un conjunt de vectors linealment independent es fa més petit continuarà essent linealment independent*.

Suposem que el conjunt de vectors linealment independent és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i que el subconjunt són els k (k<n) primers $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Suposar que són els primers no treu generalitat al problema, sempre els podrem ordenar d'aquesta forma.

Suposem (per reducció a l'absurd) que els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_k$ no són linealment independents, si fos així existirien uns escalars no tots nuls $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_k v_k = 0$$

I d'aquesta forma trobaríem que el conjunt d'escalars $r_1, r_2, \ldots, r_n$, 0,...,0, que tots seran nuls, i que es complirà

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_k v_k + 0 v_{k+1} + \ldots + 0 v_n = 0$$

I resulta que el conjunt $v_1, v_2, \ldots, v_n$ no són combinació lineal en contra de la hipòtesi.

Proposició 2: *Tota ampliació d'un conjunt de vectors linealment dependent és linealment dependent.*

Suposem que el conjunt de vectors linealment dependent és $v_1, v_2, ..., v_k$ i que ampliem aquest conjunt fina a n elements (k<n) per donar el conjunt $v_1, v_2, ..., v_n$.

El fet de que és $v_1, v_2, ..., v_k$ sigui linealment dependent vol dir que existeixen els escalars $r_1, r_2, ..., r_n$, no tots nuls, que

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_k v_k = 0$$

Tindrem que els escalars $r_1, r_2, ..., r_n$, 0,...,0, no són tots nuls, i que

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_k v_k + 0 v_{k+1} + \ldots + 0 v_n = 0$$

El que ens indica que el vectors $v_1, v_2, ..., v_n$. també són linealment independents.

Proposició 3: *Tot conjunt de vectors que contingui el vector 0 és linealment dependent.*

Pel conjunt $v_1, v_2, ..., v_n$, 0 es pot trobar els escalars 0,0,...,0,r de forma que r no sigui 0, i que

$0v_1+0v_2+ ...+0v_n+r0 = 0$ i no tots el coeficients són zero

el que demostra la proposició

En particular el grup format únicament pel vector 0 és linealment depenent.

Proposició 4: *Si en un conjunt de vectors n'hi ha un que és una combinació lineals d'uns altres del conjunt, el conjunt és linealment dependent.*

Si del conjunt $v_1, v_2, ..., v_n$, l'últim v_n és combinació lineal dels k primers (k<n) tindrem que $v_n = r_1v_1+r_2v_2+...+r_kv_k$, o sigui $r_1v_1+r_2v_2+...+r_kv_k- v_n = 0$, o també $r_1v_1+r_2v_2+...+r_kv_k+0v_{k-i}+...+0v_{n-1} - v_n = 0$. Com que, com a mínim hi ha un coeficients no nul, el -1, els vectors són linealment dependents.

En particular, després d'aquesta proposició, podem dir que Si en un grup de vectors n'hi ha dos de repetits, els grup és linealment dependent. O que, si en un grup de vectors n'hi ha un que és múltiple d'un altre, el grup és linealment dependent. O que, si en un grup de vectors ni ha un que és la suma de altres dos, el grup és linealment dependent.

Proposició 5: *En un grup de vectors linealment independents no hi ha cap element que sigui combinació lineal del altres.*

És molt clar que ha d'ésser així, ja que si un vector del grup fos una combinació lineal dels altres es compliria la hipòtesi de la proposició anterior i el grup seria linealment independent.

5.3 Generadors d'un espai vectorial

Un conjunt de vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$, es diu que és un **conjunt de generadors** d'un espai vectorial E *si tots els vectors de E es poden escriure com a combinació lineal dels del conjunt.*

D'una forma més formal $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és un conjunt de generadors si es compleix que

$$\forall x \in E \ \exists \ r_1 \in K, r_2 \in K, \ldots, r_n \in K \ \middle| \ x = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n$$

D'aquesta definició es desprèn que per qualsevol vector v de E sempre es podran trobar uns escalars $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que

$$v = r_1 \cdot v_1 + r_2 \cdot v_2 + \ldots + r_n \cdot v_n$$

Dit d'una altre forma, *tots els vectors de E són la suma de múltiples de vectors del conjunt generador*. O bé, també es pot dir, que per mitjà de sumes de múltiples dels generadors es pot aconseguir expressar a tots els vectors de E.

5.4 Subespai generat per un conjunt de vectors

Sigui E un espai vectorial sobre K i v un vector de E. Tots els vectors que siguin un múltiple de v, o sigui de la forma rv, formen un subespai F de E

$$F = \{x \in E \mid \exists \ r \in K \quad x = rv \}$$

Mireu un exemple del paràgraf 4.14. Al subespai F es diu que està generat pel vector v.

Considerem el mateix E, i ara destaquem dos vectors de E, v i u. Escriurem com F al conjunt de tots els vectors que siguin la suma d'un múltiple de v amb un múltiple d'u:

$$F = \{x \in E \mid \exists \ (r \in K \wedge s \in K) \quad x = rv + su \}$$

1. La diferència de dos elements de F és de F, ja que

$$(rv+su)-(r'v+s'u) = (r-r')v + (s-s')u$$

i resulta que també és la suma d'un múltiple de v amb un altre de u.

2. El producte d'un escalar per un element de F és de F, ja que

$$t(rv+su)=(tr)v+(ts)u$$

resulta ser la suma de dos múltiples un de v i l'altre de u.

D'aquesta forma es compleixen les dues condicions que han de complir el subespai, veure el paràgraf 4.15.

En general si E és un espai vectorial sobre K i $v_1, v_2, ..., v_n$ un conjunt de vectors de E, definirem com **subespai generat** per aquests vectors al conjunt F que:

$$F = \{x \in E \mid \exists r_1, r_2, ..., r_n \in K \quad x = r_1 v_1 + r_2 v_2 + ... + r_n v_n\}$$

O sigui que F estarà format per totes les possibles combinacions lineals dels vectors $v_1, v_2, ..., v_n$.

Per veure que F és un subespai, s'ha de veure que la resta de dos elements de F és de F: $(r_1v_1+r_2v_2+...+r_nv_n)-(s_1v_1+s_2v_2+...+s_nv_n)=(r_1-s_1)v_1+(r_2-s_2)v_2+...+(r_n-s_n)v_n$ que és evidentment de F. I s'ha de veure que el producte d'un escalar per un element de F és de F: $s(r_1v_1+r_2v_2+...+r_nv_n)= (sr_1)v_1+(sr_2)v_2+...+(sr_n)v_n$ que efectivament és de F.

Exemples:

Si considerem un vector qualsevol v del pla, v no zero, el subespai generat per v són tots els vectors de la forma rv, tots els múltiples de v, cosa que ens dóna una recta de direcció v i que passa per l'origen.

Igualment podríem fer per un vector v qualsevol, v no zero, de l'espai, ens donaria que la recta que passa per l'origen i que conté a v, és un subespai de tot l'espai.

Si a l'espai es consideren dos vectors v i u linealment independents (que un no sigui múltiple de l'altre, proposició 5 paràgraf 5.2), l'espai generat estarà format per tots els vectors de la forma $rv+su$. En particular, estarà format per tots els de la forma rv (s=0), els de la forma su (r=0). Tots aquest vectors van donant vectors continguts en el pla que determinen v i u, un pla que passa per l'origen i conté als vectors v i u. A més, qualsevol vector d'aquest pla, és un vector de la forma $rv+su$. Per això el subespai generat per v i u el constitueixen els vectors determinats pel pla que conté als vectors v i u.

Continuant amb el punt anterior, es pot dir que els vectors determinats per qualsevol pla que passi per l'origen formen un subespai de tots els vectors.

5.5 Base d'un espai vectorial

Una **base** *d'un espai vectorial E sobre el cos K, és un conjunt v_1, v_2, ...,v_n de vectors de E, que siguin linealment independents, i que formin un conjunt de generadors de E.*

Fixeu-vos que en la definició de base està en el punt d'equilibri de dos conceptes que actuen en sentits diferents: Quant menys vectors hi hagi en un conjunt més fàcil és que siguin linealment independents. En canvi, quan més vectors hi hagi en un conjunt més fàcil és que sigui generadors de l'espai. Si una base es fa més petita deixarà de ser generadora. Si una base es fa més gran deixarà d'ésser linealment independent.

Es pot pensar, i en realitat és així per bases finites, que si d'un conjunt de generadors es van traient elements, d'un en un, fins que s'arriba a que el grup sigui linealment independent s'aconsegueix una base. I a l'inrevés, si d'un conjunt de vectors linealment independents, s'hi van afegint altres vectors d'un en un, conservant la independència, s'arribarà a un grup de generadors i serà una base.

Es pot demostrar (Lang III,5) que en tot espai vectorial (diferent del zero) existeix una base. Tot i així, hi ha casos en que trobar-la és especialment difícil. L'existència d'una base no vol dir que aquesta sigui finita, hi ha exemples de bases infinites, un dels més fàcil d'entendre, és el del espai vectorial format per tots el polinomis, ho veurem com un exemple més endavant.

Exemples:

Els vectors (1, 0) i (0, 1) de l'espai dels vectors del pla és una base. Ja s'ha vist que són linealment independents, Si (a,b) és un altre vector del pla es pot posar (a, b) = a(1, 0) + b(0,1), o sigui, també compleix la segona condició.

Els complexos 1, i formen una base dels complexos sobre els reals. S'ha vist que són linealment independents i qualsevol altre complex s'escriu com $a\cdot 1 + b\cdot i$, o sigui, una combinació lineal d'aquest dos.

Els polinomis 1, x, x^2, ... ,x^n és una base de l'espai format per tots el polinomis de grau com a màxim n. Són linealment independents i com que qualsevol polinomi d'aquest espai, s'escriu com una combinació lineal dels polinomis donats, aquests formen una base.

Si considerem l'espai format per tots el polinomis ens trobem que per qualsevol n, per més gran que sigui n, el conjunt 1, x, x^2, ... ,x^n és linealment independent, i encara que n sigui molt gran, sempre hi ha polinomis, com x^{n+1}, que no s'hi pot posar en combinació lineal. Per això, una base dels polinomis estarà formada per la successió 1, x, x^2, ... ,x^n,.... sense fi, es diu que es tracta d'una base infinita.

Si considerem l'espai format per un cos sobre ell mateix, qualsevol element diferent de 0 és una base. Per exemple l'element unitat 1, ja que forma un conjunt linealment independent com s'ha vist en el paràgraf anterior, i qualsevol altre element x es pot posar x = x·1.

El conjunt format pels n vectors

$$(1, 0, \ldots , 0), (0, 1, \ldots ,0), \ldots , (0, 0, \ldots ,1)$$

de l'espai $\mathbf{R}^n$, són linealment independents, tal com s'ha vist en el paràgraf anterior. Però, qualsevol altre element de $\mathbf{R}^n$, com per exemple $(a_1, a_2, \ldots , a_n)$, es pot posar en combinació lineal d'ells d'aquesta forma:

$$(a_1, a_2, \ldots , a_n) = a_1(1, 0, \ldots , 0)+a_2 (0, 1, \ldots ,0)+ \ldots +a_n(0, 0, \ldots ,1)$$

I així es veu que formen una base de $\mathbf{R}^n$.

L'espai vectorial, tant particular, compost solament pel 0, no té cap conjunt de vectors linealment independent, ja s'ha vist que el 0 sempre és linealment dependent, i no té cap base.

Proposició1: *És impossible ampliar una base de manera que s'obtingui un conjunt linealment independent.*

Si $e_1, e_2,\ldots,e_n$ és una base i x un vector qualsevol, per les propietats de base, tindrem:

$$x = r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_ne_n$$
$$r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_ne_n-x = 0$$

Els coeficients d'aquesta última igualtat no tots són zero, com a mínim el -1 no és zero, el que ens diu que el grup de vectors $e_1, e_2,\ldots,e_n, x$ són linealment dependents i com que x és un vector qualsevol, queda demostrada la proposició.

Retornant al fet, esmentat en aquest mateix paràgraf, d'anar ampliant un conjunt de vectors linealment independents fins a que siguin generadors, es veu, per aquesta proposició, que quan s'aconsegueix que siguin generadors ja no es poden ampliar més sense perdre la independència.

Proposició2: *És impossible reduir una base conservant la propietat de ser generadors.*

La demostració és fàcil i la deixem pel lector, s'ha de mirar la proposició 5 del paràgraf 5.2.

5.6 Dimensió d'un espai vectorial

Es pot demostrar que *qualsevol parella de bases, amb un nombre finit d'elements, d'un mateix espai vectorial, ha de tenir el mateix nombre d'elements* (Lang III,5)

Es diu **dimensió** d'un espai vectorial *al nombre d'elements d'una de les seves bases.*

Aquesta definició de dimensió és correcta ja que, com s'ha dit, qualsevol base d'un espai vectorial sempre té el mateix nombre d'elements.

Si la dimensió de l'espai E és n s'escriurà, dim(E) = n.

Pels exemples que hem vist de base es pot dir que: Els vectors del pla tenen dimensió dos. El complexos sobre els reals també tenen dimensió dos. El polinomis de grau màxim n tenen dimensió n+1. Tot el polinomis tenen dimensió infinita, i que $\mathbf{R}^n$ té dimensió n.

Molts cops s'ha dit que l'espai normal on vivim és un espai de 3 dimensions, on es pot parlar d'endavant-enrera, d'esquerra-dreta, o d'amunt-avall, que són les tres dimensions. Doncs bé els espais matemàtics que s'assemblen més amb l'espai normal són tots els vectors de dimensió 3, o sigui V_3, o el que és gairebé igual, el conjunt $\mathbf{R}^3$. Fixeu-vos que els dos són espais vectorials de dimensió 3.

Igual podem pensar d'un pla, on sol es pot moure d'endavant-enrera o d'esquerra-dreta, i per això es diu que un pla té dues dimensions. Els conjunts matemàtics que corresponen al pla habitual, són els conjunts de vector de dues coordenades, o sigui V_2, o el conjunt $\mathbf{R}^2$, ambdós espais vectorials de dimensió 2.

Ja s'ha vist que l'espai {0}, paràgraf 5.5, no té bases, per això es diu que la seva dimensió és 0.

Proposició 1: *Si F és un subespai vectorial d'un altre E, i F té la mateixa dimensió que E, es que F i E coincideixen.*

> Suposem que $v_1, v_2, ..., v_n$, és una base de F, aquests vectors també seran vectors de E i continuaran essent vectors linealment independents, i sí les dimensions de F i de E coincideixen $v_1, v_2, ..., v_n$, ha d'ésser també una base de E, ja que la base no pot ser més petita doncs el conjunts linealment independents s'han d'ampliar per formar base, no disminuir. I tampoc pot ser més gran, ja que si fos així la dimensió de E seria més gran. Per això, F i E estan generats pels mateixos vectors, i per tant són iguals.

Proposició 2: *Si F és un subespai de E aleshores la dimensió de F ha d'ésser menor o igual que la de E.*

Ja s'ha vist en la proposició anterior que el cas en que les dimensions coincideixen és el cas en que també F i E coincideixen.

Tota base de F és un conjunt linealment independent de E, si aquest mateix conjunt és generador de E, és que estem en el cas de la proposició anterior, si no ho són és que hi ha elements de E que no es poden posar en combinació lineal d'aquest conjunt, el que vol dir que el conjunt es pot ampliar per formar una base de E i la dimensió de E serà més gran.

5.7 Intersecció d'espais vectorials

La definició d'intersecció d'espais vectorials coincideix amb la d'intersecció de conjunts, amb algunes precisions: *Si E i F són dos espais vectorials sobre un mateix cos K, es dirà intersecció de E i de F, als vectors comuns dels dos espais* i s'indica pel mateix símbol que en els conjunts: $E \cap F$.

És fàcil veure que $E \cap F$ és subespai de E i subespai de F, ja que:

$$x, y \in E \cap F \Rightarrow$$
$$x \in E,\ y \in E,\ x \in F,\ y \in F \Rightarrow$$
$$x-y \in E,\ x-y \in F \Rightarrow$$
$$x-y \in E \cap F$$

que assegura la primera condició de subespai. Però també es compleix:

$$x \in E \cap F \Rightarrow$$
$$x \in E,\ x \in F \Rightarrow$$
$$\forall r \in K\ \ rx \in E,\ rx \in F \Rightarrow$$
$$rx \in E \cap F$$

que és la segona condició de subespai.

La reunió d'espais vectorial, de la forma que s'entén a la reunió de conjunts no és, en general un altre espai vectorial, ja que no es pot assegura que la suma de dos vectors, un de cada espai, doni un vector de la reunió.

Exemples:

Si E és l'espai generat per un vector v del pla, si F és el generat per u, i si v i u són linealment independents, tindrem que $E \cap F = \{0\}$, és l'espai vectorial d'un sol element, el 0, que s'ha donat com exemple en el paràgraf 4.14.

Si E fos el subespai format pels vectors d'un pla dins l'espai, i F fos un altre pla, la intersecció $E \cap F$ estaria formada pel vectors de la recta intersecció dels dos plans, que ja s'ha vist que també és un espai vectorial.

5.8 Suma d'espais vectorials

Si F i G són dos subespais vectorials d'un altre espai E sobre un cos K, siguin $v_1, v_2, ..., v_n$ i $w_1, w_2, ..., w_m$ bases respectivament de F i de G. Es diu **espai vectorial suma** de E i de F, que s'escriu E + F, *al subespai generat pel conjunt:* $v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_m$.

Exemples:

Si E és l'espai generat per un vector v del pla, si F és el generat per u, i si v i u són linealment independents, tindrem que E+F = V_2, o sigui, E+F és tot l'espai vectorial dels vectors del pla, ja que E+F estarà generat per v i u, i aquests, en ser linealment independents formen una base de V_2.

Si E fos el subespai format pels vectors d'un pla dins l'espai V_3, i F fos un altre pla diferent del primer, la suma E+F estaria formada per tots els vectors de l'espai V_3, ja que E+F estaria generat per una base de E, $\{v_1, v_2\}$, i una de F $\{u_1, u_2\}$. O bé u_1, o bé u_2, ha d'ésser linealment independent de la parella v_1, v_2, ja que els dos plans són diferents. Aleshores entre els 4 vectors: n'hi ha d'haver, com a mínim (i també com a màxim), tres de linealment independents, que constituiran una base de E+F i també una base de V_3.

Proposició:

En espais de dimensió finita es compleix que

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$$

Efectivament:

Sigui $u_1, u_2, ..., u_k$ una base de $E \cap F$. Ampliem aquesta base fins arribar a una base de E: $u_1, u_2, ..., u_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n$. Ampliem la base de $E \cap F$ fins arribar a una base de F: $u_1, u_2, ..., u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_m$. D'aquesta forma tenim que $\dim(E \cap F) = k$, $\dim(E) = n$ i $\dim(F) = m$. Naturalment: $k<n$ i $k<m$.

Per la definició de suma d'espais podem dir que els vectors

$$u_1, u_2, ..., u_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n, u_1, u_2, ..., u_k, w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_m$$

generen a l'espai suma. A la llista de generadors hi ha vectors repetits, si es treuen els repetits, continuaran essent generadors, amb el que queden reduïts a

$$u_1, u_2, ..., u_k, v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n, w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_m$$

Ara sols cal veure que aquest conjunt és linealment independent. Per això suposem que existeix una combinació lineal d'aquests vectors que és zero i que algun dels coeficients no és zero:

$$r_1u_1+r_2u_2+ ...+r_ku_k+s_{k+1}v_{k+1}+s_{k+2}v_{k+2}+ ...+s_{k+n}v_n,+t_{k+1}w_{k+1}+t_{k+2}w_{k+2}+ ...+t_{k+m}w_m = 0$$

Expressió que simplificarem així:

$$\Sigma ru + \Sigma sv + \Sigma tw = 0$$

La suma Σsv no pot ser zero, ja que si ho fos tindríem que $\Sigma ru + \Sigma tw = 0$ (amb algun coeficient no zero), cosa que és impossible ja que els vector u_i junt amb els w_i formen una base de F. De la mateixa manera trobarem que Σtw tampoc pot ser zero.

Per altre banda troben que Σsv no és de E$\cap$F ja que és una combinació lineal de vectors que cap d'ells és de E$\cap$F. Anàlogament Σtw no serà de E$\cap$F. I la suma $\Sigma sv + \Sigma tw$ ni el simètric $\Sigma{-sv} + \Sigma{-tw}$ tampoc poden ser de E$\cap$F.

Però de la suma anterior es desprèn que

$$\Sigma ru = \Sigma{-sv} + \Sigma{-tw}$$

o sigui, un vector Σru, que és de E$\cap$F, és igual a un vector no nul, $\Sigma{-sv} + \Sigma{-tw}$, que no és de E$\cap$F. Contradicció que ens diu que la suposició de l'existència d'una tal combinació lineal és falsa.

Si l'esmentada combinació lineal no existeix és que el conjunt de vectors

$$u_1, u_2, \ldots, u_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n, w_{k+1}, w_{k+2}, \ldots, w_m$$

són linealment independents. Com s'ha vist també són un conjunt de generadors, per això constitueixen una base de E+F, la dimensió de la qual és $k + n + m$, que coincideix amb dim(E) + dim(F) - dim(E$\cap$F), tal com s'havia de demostrar.

5.9 Relació d'equivalència lligada a un espai i a un subespai

Si F és un subespai d'un espai vectorial E, es pot definir una relació, que es sol anotar com ~, entre tots els element de E, d'aquesta forma:

$$x \sim y \text{ si } x\text{-}y \in F$$

O sigui, *un element està relacionat amb un altre si la seva diferència és un vector del subespai*.

Veiem que la relació compleix amb les propietats d'equivalència:

És reflexiva, doncs cada element està relacionat amb ell mateix, ja que x-x = 0 i tot subespai ha de contenir a l'element neutre (paràgraf 4.15).

És simètrica, doncs si $x \sim y$, és que x-y pertany a F, però y-x és el simètric de x-y, i també ha de pertànyer a F (F és grup per la suma), o sigui $y \sim x$.

És transitiva, doncs si $x \sim y$ i $y \sim z$, es que tant x-y com y-z són elements de F, i també ho serà la seva suma $(x\text{-}y)+(y\text{-}z) = x+(\text{-}y+y)\text{-}z = x\text{-}z$, o sigui x estarà relacionat amb z.

5.10 Varietats lineals

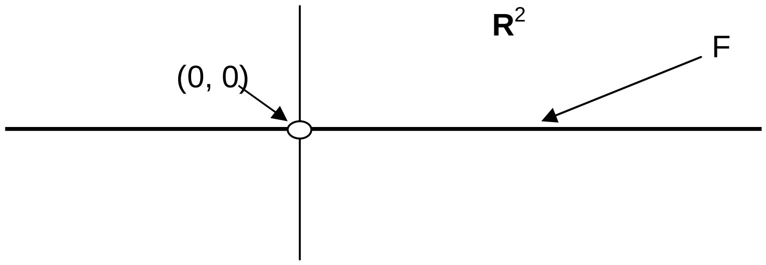
Com s'ha explicat en el paràgraf 2.13, el conjunt en el que hi ha definida una relació d'equivalència queda dividit en una partició, de forma que cada una de les parts de la partició és una classe d'equivalència (paràgraf 2.12).

Si E és un espai vectorial i F un subespai de E, després de la relació d'equivalència donada en el paràgraf anterior, E quedarà dividit en una partició formada per les classe d'equivalència. El propi conjunt F és una d'aquestes classes d'equivalència, ja tots els element de F estaran relacionats

Cada classe d'equivalència també es diu **varietat lineal**. El conjunt quocient format per totes les classes d'equivalència i es sol escriure com E/F.

Exemples:

1. Pensem en l'espai R^2, i com a subespai F el format per tots els punts que la seva segona coordenada és 0. Ja s'ha vist que $\mathbf{R}^2$ es pot representar per tots els punts d'un pla. Els elements de F seran, els punts que pertanyen (en una representació usual) a la recta horitzontal que passa per l'origen (0, 0).



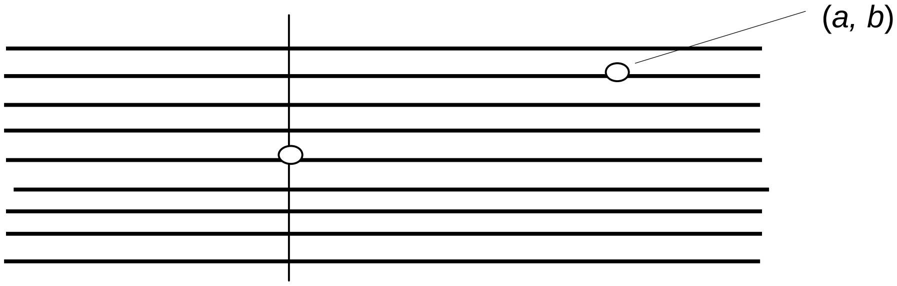
La classe d'equivalèncua d'un element (*a*,*b*) qualsevol seràn tots els punts (*x*,*y*) relacionats amb el primer, osigui

$$(x,y) - (a,b) \in F$$

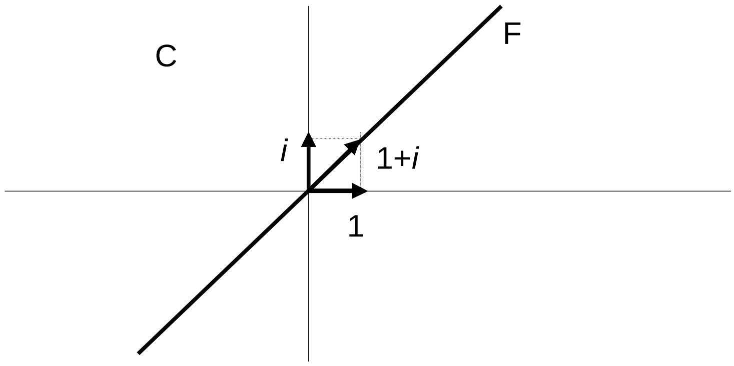
$$(x-a,\ y-b) \in F$$

però la condició de pertànyer a F és la de tenir la segona coordenada 0, o sigui que $y - b = 0$, o que $y = b$.

Tota la classe d'equivalència de (*a*, *b*) estarà formada per tots els punt que tenen *b* com a segona coordenada. O sigui que les classes d'equivalència (varietats lineals) estaran formades per totes les rectes 'paral·leles' a F.



2. El conjunt del complexos múltiples de 1+*i*, que escriurem com F, és un subespai vectorial de tots els complexos (mirar els exemples de 4.15). Aquest subespai es pot representar per una recta dins el pla de tots el complexos:



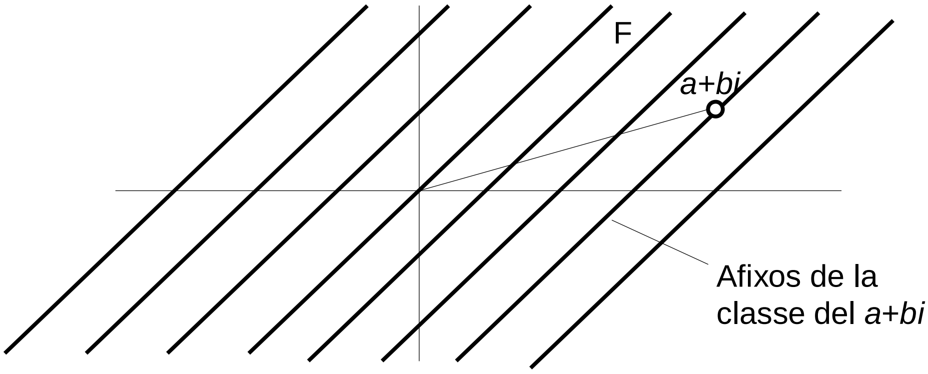
La classe d'equivalència d'un complex genèric *a*+*bi* estarà formada per tots els complexos *x*+*yi* que (*x*+*yi*)-(*a*+*bi*) $\in$ F, o sigui que existeixi algun $k\in$ **R**, que

(*x*-*a*)+(*y*-*b*)i = *k*(1+*i*), o sigui que

$$\begin{cases} x-a=k \\ y-b=k \end{cases}$$

però aquesta última condició és l'equació paramètrica d'una recta de pendent 1 i que passa pel punt (*a, b*).

Pel que es pot dir, que les varietats lineals estaran formades pel complexos que els seus punts afixos formen rectes paral·leles a F.



3. Considerem l'espai vectorial V_3 de tots els vectors de l'espai de dimensió 3, i com a subconjunt F als vectors d'un pla que passi per l'origen (veure exemple del paràgraf 5.4), la classe de (*a, b, c*) estarà formada pels vectors (*x, y, z*) que

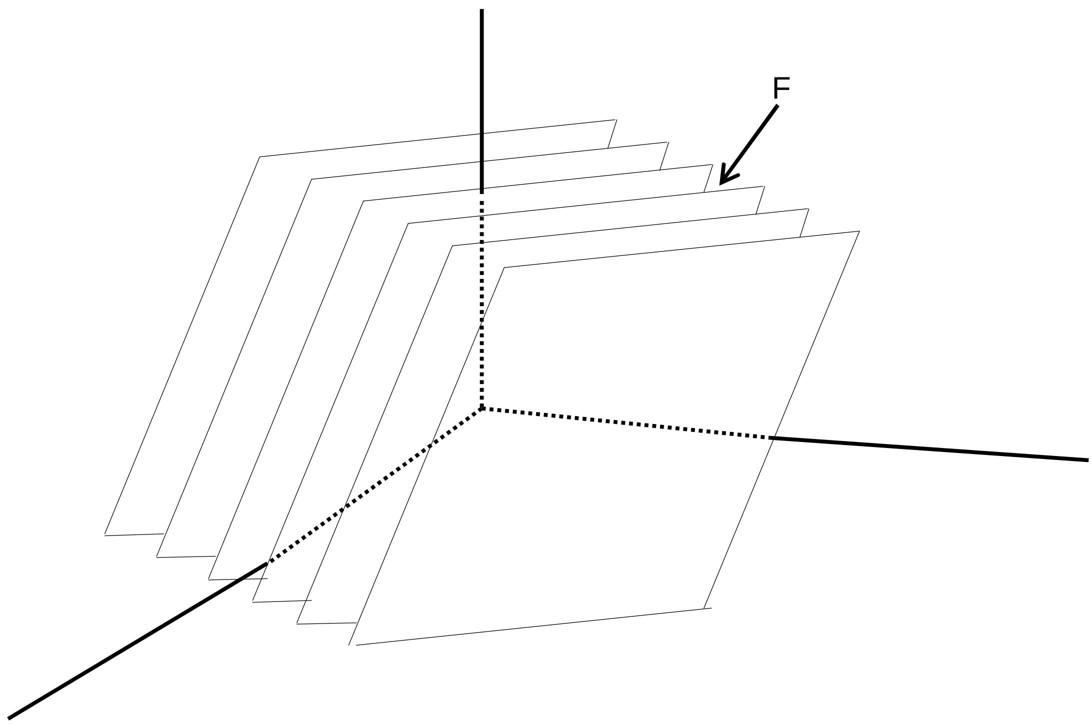
(*x, y, z*) - (*a, b, c*) pertanyi a F, o sigui

$(x-a, y-b, z-c) = rv + su = r(v_1, v_2, v_3) + s(u_1, u_2, u_3)$, o sigui

$$\begin{cases} x - a = rv_1 + su_1 \\ y - b = rv_2 + su_2 \\ z - c = rv_3 + su_3 \end{cases}$$

Equació, que ens diu que les coordenades (*x, y, z*) són les d'un pla que passa pel punt (*a, b, c*) i és paral·lel a F.

En general qualsevol pla paral·lel a F constitueix una classe d'equivalència.



5.11 Espai vectorial quocient

Sigui E un espai vectorial sobre K i F un subespai de E. Ara definirem unes operacions dins el conjunt quocient E/F (paràgraf anterior). Recordem que els elements de E/F són classes d'equivalència. Cada element de E/F són subconjunts de E. Per indicar a una classe es fa indicant a un dels elements que té, per exemple si x és un element de E a la seva classe la indicàvem per x^*.

Definirem com a suma de dues classes a

$$x^* + y^* = (x + y)^*$$

O sigui que per veure quina és la classe suma d'altres dues, s'agafa un element de cada classe, es sumen i el resultat és la classe de la suma.

Aquesta definició no és prou acurada, si agaféssim un element x' de la mateixa classe que x, i un element y' de la mateixa classe de y, si féssim la summa de les classes x'^* i y'^* donaria igual que la d'abans?. Anem a veure que sí.

$x \sim x' \Rightarrow x\text{-}x' \in$ F
$y \sim y' \Rightarrow y\text{-}y' \in$ F
$(x+y) - (x'+y') = (x-x')+(y-y')$ que també ha d'ésser de F, que vol dir
$(x+y) \sim (x'+y')$, o sigui
$(x+y)^* = (x'+y')^*$

tal com es volia demostrar.

Ara **definirem el producte** d'una classe de E/F per un escalar K, d'aquesta forma:

$$rx^* = (rx)^*$$

O sigui, per multiplicar un escalar per una classe, es multiplica l'escalar per un element de la classe, i la classe on estigui el producte és el resultat del producte.

També s'ha de veure que aquesta definició és independent de l'element que s'agafi de la classe. Si x' és de la mateixa classe que x tindrem

$x \sim x' \Rightarrow x-x' \in$ F
$rx - rx' = r(x-x')$ que també és de F, o sigui
$rx \sim rx' \Rightarrow (rx)^* = (rx')^*$

que és el volíem demostrar.

Anem a veure que E/F amb aquestes dues operacions **és un nou espai vectorial:**

Les propietats de la suma són:

Commutativa: $x^*+y^* = (x+y)^* = (y+x)^* = y^*+x^*$
Té element neutre, és la classe del 0: $x^*+0^* = (x+0)^* = x^*$
Té elements simètrics, el simètric de x^* és $(-x)^*$: $x^*+(-x)^* = (x-x)^* = 0^*$
És associativa: $x^*+(y^*+z^*) = x^*+(y+z)^* = (x+(y+z))^* = ((x+y)+z)^* = (x+y)^* +z^* =(x^*+y^*)+z^*$

Amb aquestes propietats (E/F, +) és un grup commutatiu.

Les propietats del producte per un escalar són

$r(sx^*) = r(sx)^* = (r(sx))^* = ((rs)x)^* = (rs)x^*$
$(r+s)x^* = ((r+s)x)^* = (rx+sx)^* = (rx)^*+(sx)^* = rx^*+sx^*$
$1x^* = (1x)^* = x^*$
$r(x^*+y^*) = r(x+y)^* = (r(x+y))^* = (rx+ry)^* = (rx)^*+(ry)^* = rx^*+ry^*$

Amb aquestes propietats junt amb les de grup, resulta que el conjunt de classes E/F amb la suma i el producte per un escalar, tal com s'han definit, és un espai vectorial sobre K.

Per la relació d'equivalència que s'ha establert (paràgraf 5.9) és fàcil veure que tots els vectors de F pertanyen a una mateixa classe, ja que si dos elements són de F, la resta d'aquests dos també ho serà (F és espai), i compleixen amb la definició de la relació.

També es pot comprendre que no hi ha cap element fora de F que pertanyi a la classe de F. Si n'hi hagués un, el u per exemple, hauria d'estar relacionat amb els elements de F, el v per exemple, o sigui que v -u = f és de F, però u =v - f, i com que la resta de dos elements de F és de F, u hauria d'ésser de F.

Entre els dos punt anteriors s'ha vist que F constitueix una única classe d'equivalència, que com que té l'element 0, en el espai quocient fa les funcions d'element neutre. La classe F és l'element neutre de E/F.

5.12 Dimensió d'un espai vectorial quocient

Suposem que E és un espai vectorial sobre el cos K i que F és un subespai de E. I suposem que $v_1, v_2, ..., v_n$ és una base de F.

Els vectors $v_1, v_2, ..., v_n$ són linealment independents en F, però també ho seran en E, per això es poden anar augmentant, conservant la independència fins arribar a una base de E. Suposem que $v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_m$ és una base de E. Pel que portem dit podem dir que dim(F)=n, i que dim(E)=n+m

Ja s'ha vist en el paràgraf anterior, que tots els elements $v_1, v_2, ..., v_n$ pertanyen a la classe 0. Anem a veure ara que les classe $w_1^*, w_2^*, ..., w_m^*$ formen una base de E/F. Per veure-ho procedirem en dues parts, en la primera veurem que són linealment independents, i en la segona que són generadors de E/F.

Primera part:

Suposem que tenim una combinació lineal nul·la: $r_1w_1^*+r_2w_2^*+ ...+r_mw_m^* = 0^*$. Aplicant les definicions de suma i producte per un escalar (paràgraf 5.11) tindrem $(r_1w_1+r_2w_2+ ...+r_mw_m)^* = 0$. Però la classe 0* és F, i el vector $r_1w_1+r_2w_2+ ...+r_mw_m$ ha d'ésser de F, o sigui ha d'ésser una combinació lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$. O sigui, $r_1w_1+r_2w_2+ ...+r_mw_m = s_1v_1+s_2v_2+ ...+s_nv_n$. O també $r_1w_1+r_2w_2+ ...+r_mw_m-s_1v_1-s_2v_2- ...-s_nv_n = 0$. Però solament és possible en el cas de que tots el coeficients siguin nuls, doncs els vectors implicats formen una base (paràgraf 5.2). En particular els coeficients r_i han d'ésser nuls. El que demostra que les classes w_i^* són linealment independents.

Segona part:

Agafem una classe u^* qualsevol de E/F, El vector u de E s'ha de poder posar com una combinació lineal de la base de E: $u = s_1v_1+s_2v_2+ ...+s_nv_n + r_1w_1+r_2w_2+ ...+r_mw_m$ i les classes $u^* = (s_1v_1+s_2v_2+ ...+s_nv_n + r_1w_1+r_2w_2+ ...+r_mw_m)^* = s_1v_1^*+s_2v_2^*+ ...+s_nv_n^*+r_1w_1^*+r_2w_2^*+ ...+r_mw_m^*$. Però els vectors v_i són de la classe 0. Es a dir: $u^* = r_1w_1^*+r_2w_2^*+ ...+r_mw_m^*$, tal com ens proposàvem demostrar.

Després d'aquesta demostració es pot dir que dim(E/F) = m. O sigui

$$\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$$

La dimensió d'un espai vectorial quocient és igual a la diferència entre la dimensió de l'espai i la del subespai.