5 CÀLCUL DE LÍMITS DE SUCCESSIONS

12.1 – Límit d'una successió polinòmica

a) Considerem en primer lloc les successions constants, que són polinòmiques de grau zero. La successió:

a, a, a, a, a, . . .

té per límit **a**. Escriurem:

$$\text{lím } \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

b) Considerem a les successions polinòmiques de primer grau, com $\mathbf{a_n} = an + b$. Suposem en primer lloc que el coeficient a és positiu. Aplicant els criteris vistos en el paràgrafs 4.3 i 4.7 aquesta successió tindrà límit $+\infty$. Però si el coeficient a fos negatiu el límit seria $-\infty$.

c) Considerem ara les successions polinòmiques generals de grau més gran que zero, que podem indicar així:

$$\mathbf{a_n} = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \qquad (m>=1)$$

Suposem que el coeficient de màxim grau és positiu, $a_m > 0$. Anem a veure que el límit de $\mathbf{a_n}$ és $+\infty$. Per demostrar-ho procedirem per inducció sobre el grau del polinomi.

La primera condició de les demostracions per inducció ja està feta a l'apartat b) d'aquest mateix paràgraf. Per veure la segona condició s'ha d'expressar d'aquesta forma:

$$\mathbf{a_n} = \mathbf{n(}a_m n^{m-1} + a_{m-1} n^{m-2} + \ldots + a_1) + a_0$$

La successió parcial definida pel parèntesi: $\mathbf{b_n} = a_m n^{m-1} + a_{m-1} n^{m-2} + \ldots + a_1$, per hipòtesi d'inducció té límit $+\infty$, ja que és de grau m-1, i aplicant, com en l'apartat b) els criteris de 4.3 i 4.7, ens dóna que $\mathbf{a_n}$ també té per límit $+\infty$.

Pel cas que a_m fos negatiu, es demostra exactament igual, que el seu límit és $-\infty$.

En resum, podem afirmar que

> ***El límit d'una successió polinòmica*** *de grau major que zero és més infinit si el coeficient de màxim grau és positiu, o bé el límit és menys infinit si el coeficient de màxim grau és negatiu.*

12.2 – Límit d'una successió racional

Per fer aquest estudi classificarem aquestes successions en tres tipus, les que tenen el grau del numerador menor que el grau del denominador, les que tenen els dos graus igual i les que tenen el grau del numerador més gran.

a) Cas en que el grau del numerador és menor que el del denominador

Posem per exemple, amb m > r

$$a_n = \frac{b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0}$$

Si dividim numerador i denominador per n^m , el terme general anterior queda:

$$a_n = \frac{b_r \frac{1}{n^{m-r}} + b_{r-1} \frac{1}{n^{m-r+1}} + \ldots + b_1 \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \frac{1}{n^m}}{c_m + c_{m-1} \frac{1}{n} + \ldots + c_1 \frac{1}{n^{m-1}} + c_0 \frac{1}{n^m}}$$

Cada una de les parts del tipus $\frac{1}{n^x}$ té per límit zero, per això el numerador té per límit zero i el denominador té per límit c_m. Aplicant el criteri de paràgraf 4.12 el límit de a_n és zero.

b) Cas en que el grau del numerador és igual al del denominador

Considerem la successió:

$$a_n = \frac{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0}$$

Dividim numerador i denominador per n^m:

$$a_n = \frac{b_m + b_{m-1} \frac{1}{n} + \ldots + b_1 \frac{1}{n^{m-1}} + b_0 \frac{1}{n^m}}{c_m + c_{m-1} \frac{1}{n} + \ldots + c_1 \frac{1}{n^{m-1}} + c_0 \frac{1}{n^m}}$$

Aplicant els mateixos criteris que en l'apartat a) tenim que el límit de a_n és $\frac{b_m}{c_m}$.

c) Cas en que el grau del numerador és més gran

Considerem la successió, amb p > m.

$$a_n = \frac{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0}$$

Traiem b_p factor comú del numerador i traiem c_m factor comú del denominador:

$$a_n = \frac{b_p}{c_m} \cdot \frac{n^p + b'_{p-1} n^{p-1} + \ldots + b'_1 n + b'_0}{n^m + c'_{m-1} n^{m-1} + \ldots + c'_1 n + c'_0}$$

On cada un del coeficients b'_x és igual al quocient b_x/b_p. I cada c'_x és igual a c_x/c_m.

Dividim numerador i denominador per n^m:

$$a_n = \frac{b_p}{c_m} \cdot \frac{n^{p-m} + b'_{p-1} n^{p-m-1} + \ldots + b'_1 \frac{1}{n^{m-1}} + b'_0 \frac{1}{n^m}}{1 + c'_{m-1} \frac{1}{n} + \ldots + c'_1 \frac{1}{n^{m-1}} + c'_0 \frac{1}{n^m}}$$

En ser p més gran que m la part de l'esquerra del numerador quedarà un polinomi normal amb exponents enters positius, però la part de la dreta tindrà termes del tipus $1/n^x$.

La part de la dreta del numerador té per límit zero, en canvi la part de l'esquerra, veure el paràgraf 5.1, té per límit a $+\infty$. Per això, globalment, el numerador té per límit $+\infty$. Per altre banda, el denominador té per límit a 1.

Pel que hem dit el límit de a_n el podem simbolitzar com:

$$\mathit{lím}\, a_n = \frac{b_p}{c_m}(+\infty)$$

Pel criteris de l'apartat 4.7 podem dir que si el quocient b_p/c_m és positiu el límit de a_n és $+\infty$. En canvi, si el quocient b_p/c_m és negatiu el límit de a_n és $-\infty$.

Resumint:

> ***Límits d'una successió racional***
> *Una successió racional que tingui el grau del numerador menor que el grau del denominador té per límit zero.*
> *Una successió racional en que els dos graus, del numerador i del denominador, són iguals té per límit el quocient dels dos coeficients de màxim grau.*
> *Una successió racional en que el grau del numerador és major que el del denominador té per límit $+\infty$ si el quocient dels dos coeficients de major grau és positiu, i té per límit $-\infty$ si l'esmentat quocient és negatiu.*

12.3 – Límit d'una suma d'una progressió geomètrica

a) Agafem la progressió geomètrica: 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . . , en que $a_n = 2^n$ i r = 2, construïm una altre successió amb les sumes parcials, d'aquesta forma:

$s_1 = 2$
$s_2 = 2 + 4 = 6$
$s_3 = 2 + 4 + 8 = 14$
$s_4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$
$s_5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$
$s_6 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$
. . .

El terme general (veure el paràgraf 2.5) és $s_n = \frac{2^n \cdot 2 - 2}{2-1} = 2^{n+1} - 2$, que és una successió que tendeix a $+\infty$.

b) Agafem ara la progressió geomètrica: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$, en la que $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$; i $r = \frac{1}{2}$; construïm una nova successió amb les sumes parcials, d'aquesta forma:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$s_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

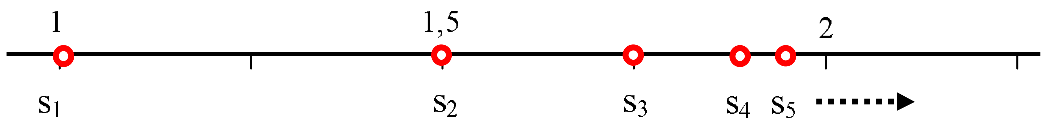
$$s_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$$

. . .

El terme general (veure paràgraf 2.5) és $s_n = \dfrac{\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{1}{2^n} - 1}{-\frac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$, el límit de la qual és 2.

Ens troben, doncs, en un cas d'una suma d'infinits termes positius que sumen una quantitat finita.

La representació gràfica d'aquesta successió sobre una recta és:



Successió: $s_n = 2 - 1/2^{n-1}$

Fixeu-vos que cada terme es situa a la meitat entre el terme anterior i el 2, d'aquesta forma la successió s'acosta tant com es vulgui al 2, i naturalment el seu límit és 2.

c) Considerem una progressió geomètrica qualsevol $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ que tingui per raó a r.

Construïm la nova successió de les sumes parcials:

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$s_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
$s_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$
. . .

El terme general d'aquests successió (paràgraf 2.5) és $s_n = \dfrac{a_n r - a_1}{r-1} = \dfrac{a_1 r^{n-1} r - a_1}{r-1} = a_1 \dfrac{r^n - 1}{r-1}$

Si fos $r > 1$, com el cas a) anterior, tindríem (veure paràgrafs 4.7) que

$$\text{lím}\, s_n = \text{lím}\, a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{a_1}{r-1} \text{lím}\,(r^n - 1) = \pm\infty$$

El signe del límit depèn del signe de a_1.
Si fos r < -1 la successió s_n seria alternada i divergent, podríem posar que el seu límit és $\pm\infty$.
En canvi si fos | r | < 1, com el cas b) anterior, tindríem (veure paràgraf 4.6, 4.7 i 4.14) que

$$\text{lím}\, s_n = \text{lím}\, a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{a_1}{r-1} \text{lím}\,(r^n - 1) = \frac{a_1}{r-1}(\text{lím}\, r^n - 1) = \frac{a_1}{1-r}$$

ja que, en aquest cas, lím r^n és 0.

> ***El límit d'una suma d'una progressió geomètrica***
> *Si s_n és una successió suma de n termes d'una progressió geomètrica de primer terme a_1 i de raó r tindrem:*
> *Si $r \geq 1$ el límit de s_n és $\pm\infty$*
> *Si $|r| < 1$ el límit de s_n és* $\frac{a_1}{1-r}$
> *Si r = -1 la successió s_n és alternada*
> *Si r < -1 la successió s_n és alternada i divergent*

12.4 – Límit de l'arrel d'un polinomi

Si el terme general de la successió és una arrel d'un polinomi en n, com per exemple,

$$a_n = \sqrt[p]{b_r n^r + \ldots + b_0}$$

es poden escriure

$$a_n = \left(b_r n^r + \ldots + b_0\right)^{1/p}$$

Sempre que b_r sigui positiu es pot solucionar aquest límit, pel que s'ha vist en els paràgrafs 5.1 i 4.14 ens dóna que el límit és $(+\infty)^{1/p} = +\infty$.

Si b_r és negatiu i si p és imparell, recordem que $\sqrt[p]{-A} = -\sqrt[p]{A}$, aleshores el límit de la successió anterior és: $-\infty$

En els casos que b_r sigui negatiu i p sigui parell no es pot calcular el límit, ja que a partir d'un cert lloc els termes de $b_r n^r + \ldots + b_0$ són tots negatius del quals no es pot extreure una arrel d'índex parell.

> ***El límit de l'arrel d'un polinomi***
> *La successió* $a_n = \sqrt[p]{b_r n^r + \ldots + b_0}$ té per límit:
> *Si b_r és positiu el límit de a_n és $+\infty$*
> *Si b_r és negatiu i p és imparell el límit de a_n és $-\infty$*
> *Si b_r és negatiu i p és parell no hi ha límit*

12.5 – Límit d'un quocient entre polinomis i radicals

En aquest paràgraf considerarem que l'expressió $\sqrt[p]{a_r n^r + ... + a_0}$ és de grau r/p.
Es tracta ara d'estudiar successions que són un quocient entre polinomis i arrels com l'anterior que tinguin per límit a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Ens aquests casos dividirem numerador i denominador pe n elevat al grau major, per exemple si dividim per n elevat al grau màxim del numerador, que és $n^{2/3}$:

$$lím\frac{n+\sqrt{n^3+1}}{3n+1} = lím\frac{\frac{n}{n^{2/3}}+\sqrt{\frac{n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}}}{\frac{3n}{n^{2/3}}+\frac{1}{n^{2/3}}} = lím\frac{\frac{1}{n^{1/2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{\frac{3}{n^{1/2}}+\frac{1}{n^{2/3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

O, en el mateix límit, si dividim pel grau màxim del denominador, que és n:

$$lím\frac{n+\sqrt{n^3+1}}{3n+1} = lím\frac{1+\sqrt{\frac{n^3}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{1}{n^2}} = lím\frac{1+\sqrt{n+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

12.6 – Cas $+\infty-\infty$ en que n està dins d'un radical

Esta vist que en el cas del límit d'una suma en què un dels sumands té límit $+\infty$ i l'altre $-\infty$, el límit de la suma queda indeterminat. No obstant si la n està en algun dels sumands dins d'un radical es pot procedir tal com indicarem amb els següents exemples:

Exemple 1r:

$$lím\left(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n\right)$$

Multipliquem i dividim per $\sqrt{(n+1)(n+2)}+n$ i simplifiquem:

$$lím\left(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n\right) = lím\frac{\left(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n\right)\left(\sqrt{(n+1)(n+2)} + n\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n} = lím\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n} =$$

$$= lím\frac{n^2+3n+2-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n} = lím\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}$$

L'últim límit dóna $\frac{+\infty}{+\infty}$ que continua essent indeterminat, però si dividim numerador i denominador per n, queda:

$$lím\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n}=lím\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1}+1}=\frac{3}{2}$$

Exemple 2n:

$$lím\left(\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}-\sqrt{n^2\text{-}1}\right)$$

Multipliquem i dividim per $\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}-\sqrt{n^2\text{-}1}$ i simplifiquem i dividint numerador i denominador per n:

$$lím\left(\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}-\sqrt{n^2\text{-}1}\right)=lím\frac{\left(\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}-\sqrt{n^2\text{-}1}\right)\left(\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}+\sqrt{n^2\text{-}1}\right)}{\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}+\sqrt{n^2\text{-}1}}=lím\frac{(2n^2-6n+1)-(n^2\text{-}1)}{\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}+\sqrt{n^2\text{-}1}}=$$

$$=lím\frac{n^2-6n+2}{\sqrt{2n^2\text{-}6n+1}+\sqrt{n^2\text{-}1}}=lím\frac{n-6+\frac{2}{n}}{\sqrt{2-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{+\infty}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=+\infty$$

12.7 – Límit de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

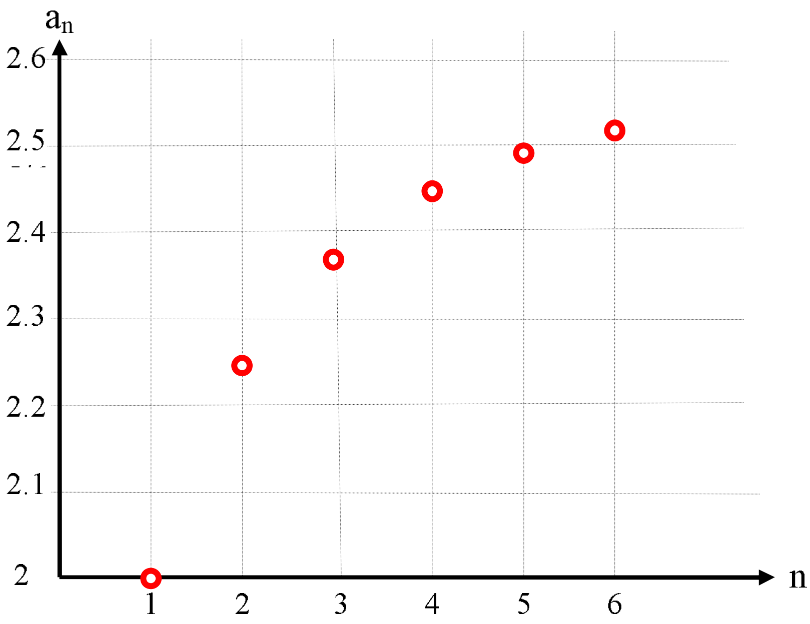
a) Aquesta és una successió especial, sobretot el seu límit que és un nombre irracional que té unes aplicacions sorprenents en moltes disciplines i en la mateixa Matemàtica.

Aquesta successió és una potència que la base té límit 1 i l'exponent té límit $+\infty$. Es tracte d'un cas d'indeterminació, veure paràgraf 4.14.

Calculem alguns d'aquests termes:

n	a_n	a_n, decimal
1	$(1+1/1)^1$	**2**
2	$(1+1/2)^2$	**2.25**
3	$(1+1/3)^3$	**2.3703703**
4	$(1+1/4)^4$	**2.44140625**
5	$(1+1/5)^5$	**2.48832**
6	$(1+1/6)^6$	**2.52162637**
7	$(1+1/7)^7$	**2.546499697**
. . .	. . .	. . .
100	$(1+1/100)^{100}$	**2,704813829**
. . .	. . .	. . .
10.000	$(1+1/10000)^{10000}$	**2.718145927**

Que d'una forma gràfica:



Successió: $\mathbf{a_n} = (1+1/n)^n$

Es pot demostrar, tal com es pot intuir en la taula i la gràfica anterior, que l'esmentada successió és creixent, que cada terme és major que l'anterior. També es pot demostrar que es tracte d'una successió afitada superiorment, que els seus termes no passen ni arriben mai a 3.

També es pot demostrar que tota successió creixent i afitada superiorment té límit, i al revés tota successió decreixent i afitada inferiorment també té límit. Per això es pot assegurar que la successió $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ té límit. Aquest límit se li diu e (la segona vocal) e és un nombre que en forma decimal és:

e =2,718281828459045 . . . .

També es pot demostrar que aquest valor e és un nombre irracional, o sigui que és impossible posar-lo en forma de fracció.

b) Mirem ara el cas $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \to \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}$$

c) I el cas $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

d) I un cas més general:

Si a_n és una successió té per límit a $+\infty$ o $-\infty$ es pot demostra que $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ també té per límit a e. Aquest límit pot resultar intuïtiu si es compara amb els casos a) i c) anteriors.

> ***Límit e***
>
> *Si a_n és una successió té per límit a $+\infty$ o $-\infty$,*
>
> *aleshores la successió $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ té per límit e*

12.8 – Límits del tipus $1^{\pm\infty}$

Es tracta ara de calcular el límit de les successions del tipus $(b_n)^{a_n}$ de manera que b_n tendeixi a 1 (b_n –> 1) i que a_n tendeixi a més infinit o a menys infinit $(a_n \to \pm\infty)$ són les successions que d'una forma simplificada diem que són del tipus $1^{\pm\infty}$.

$$(b_n)^{a_n} = \left(1+(b_n-1)\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{b_n-1}}\right)^{a_n} = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{b_n-1}}\right)^{\frac{1}{b_n-1}a_n(b_n-1)} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{b_n-1}}\right)^{\frac{1}{b_n-1}}\right]^{a_n(b_n-1)}$$

com que b_n tendeix a 1 la successió $\frac{1}{b_n-1}$ tendeix a $\pm\infty$, i si posem com c_n a la successió $\frac{1}{b_n-1}$ la successió anterior quedarà

$$(b_n)^{a_n} = \left[\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\right]^{a_n(b_n-1)}$$

Pel que s'ha dit en el paràgraf anterior, cas d), la successió $\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}$ té per límit e:

Per això:

$$\textit{lím}\,(b_n)^{a_n} = \textit{lím}\left[\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\right]^{a_n(b_n-1)} = \textit{lím}\,e^{a_n(b_n-1)} = e^{\text{lím}\,a_n(b_n-1)}$$

tal com s'havia indicat en el paràgraf 4.14.

Per això podem resumir:

Límit del tipus $1^{\pm\infty}$

Si b_n *tendeixi a 1 i* a_n *tendeixi a més infinit o a menys infinit aleshores* $(b_n)^{a_n}$ *tendeix a* $e^{\text{lím}\, a_n (b_n - 1)}$

12.9 - Exercicis

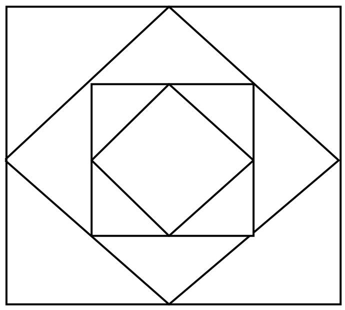
1 – Calcula la suma dels 10 primers termes d'una progressió geomètrica que el primer terme és 1 i la raó 1/3. Calcula també la suma de tots els infinits termes.

2 – Demostra que la successió: 0,3 , 0,03 , 0,003 , 0,0003 , . . . és una progressió geomètrica. Quina és la raó? Quina és la suma de tots els seus infinits termes?. Compara aquesta suma amb el nombre periòdic $0,\overline{3}$.

3 – Fes el mateix que en l'exercici anterior però per la successió: 0,25 , 0,0025 , 0,000025 , 0,00000025 , . . .A quin nombre periòdic serà igual la suma d'aquests termes?

4 – En un famós sofisma Zenó explicava que si Aquiles donava una certa avantatge a una tortuga en una hipotètica cursa, Aquiles no podria atrapar mai a la tortuga. I el raonament era el següent: En el moment de la partida Aquiles estarà en un cert punt, que diem P_0 i la tortuga en un altre punt P_1, Quan Aquiles arribi a P_1 la tortuga ja haurà avançat un tros més i estarà a un altre punt P_2, quan Aquiles estigui a P_2 la tortuga estarà més avançada en un punt P_3, i així fins l'infinit, el que prova que no l'atraparà mai. Suposem que la velocitat d'Aquiles és V i la de la tortuga és U, amb V > U, i suposem que la distància que els separa en un principi és D. Calcula el temps T_1 que necessitarà Aquiles per passar de P_0 a P_1, calcula el temps T_2 que necessitarà per passar de P_1 a P_2, el temps T_3 que necessitarà per passar de P_2 a P_3. Demostra que la successió T_1, T_2, T_3, ... és una progressió geomètrica. Quina és la raó?. Aquesta raó és més petita que 1?. Quina és la suma de tots els infinits temps T_1, T_2, T_3,... Tenia raó Zenó?

5 – Tenim d'un quadrat d'un metre de costat. Si unim el punts mitjos dels costats obtenim un altre quadrat. Si tornem a fer el mateix amb el quadrat obtingut obtenim un tercer quadrat, i així podem prolongar aquest exercici, com a mínim mentalment, fins l'infinit. Quin tipus de successió formen els costats dels quadrats? I la dels perímetres? I la de les àrees?. Quan val la suma de tots els infinits perímetres? I la suma de totes les àrees?



6 – D'una successió coneixem:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$
$$a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$
$$a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$$
$$a_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162}$$

calcula el seu terme general a_n i el límit **lím** a_n

7 – Calcula aquests límits:

7.1) $lím(3-2n+n^2)$ 7.2) $lím\left(\frac{2}{5}-2n-\frac{3}{4}n^2\right)$ 7.3) $lím\frac{1}{5-3n^2-4n^3}$

7.4) $lím\frac{5n^4}{5-3n^2-4n^3}$ 7.5) $lím\frac{1-2n}{3n^3-9n^2-1}$ 7.6) $lím\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

7.7) $lím\frac{\sqrt{n^2-n+2}}{6n-8}$ 7.8) $lím\frac{\sqrt{4n^4-2n}}{\sqrt{8n^4+3}}$ 7.9) $lím\left(\sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2-3n}\right)$

7.10) $lím\left(\sqrt{2n^2+3n-2}-\sqrt{2n^2+2}\right)$ 7.11) $lím\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n^2+1}\right)$

7.12) $lím\frac{(n+1)(n-1)+1}{n^2+1}$ 7.13) $lím\frac{6(n-2)(2-n)}{3n^2-1}$ 7.14) $lím\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

7.15) $lím\frac{n(-1)^n}{n^2+1}$ 7.16) $lím\frac{(3n+1)^3-(3n-1)^3}{3n^2+1}$ 7.17) $lím\frac{(n^2+2)(n^2-2)}{(n^2+2)^2(2n-1)^2}$

7.18) $lím\left(\frac{n^2+2}{n+1}-\frac{3n-1}{3}\right)$ 7.19) $lím\sqrt{\frac{8n^2-3n}{2n^2-3}}$ 7.20) $lím\left(\sqrt{\frac{8n^2-3n}{2n^2-3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(n+1)^2}{n^2-3n+5}}\right)$

7.21) $lím\frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{8}{n}}$ 7.22) $lím\frac{\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}}{\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{2n+1}{2n}}$ 7.23) $lím\left(\sqrt{bn^2+1}-n\right)$

7.24) $lím\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n^2}}$ 7.25) $lím\left(\frac{An+1}{2n}\right)^n$ 7.26) $lím\left(\frac{1-3n^2}{1+n^2}\right)^{\sqrt{n}}$

7.27) $lím\frac{a+2a+3a+\ldots+na}{(n+a)^2}$ 7.28) $lím\,2^{\frac{n-5}{1-n}}$ 7.29) $lím\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{5n-3}{2n+1}}$

7.30) $lím\left(\frac{2n-3}{2+n}\right)^4$ 7.31) $lím\left(\frac{2n-3}{2+n}\right)^{\frac{4}{n}}$ 7.32) $lím\left(\sqrt[3]{\frac{1+16n^2}{4+n^2}}\right)^{\frac{3n+1}{2n-4}}$

7.33) $lím\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ 7.34) $lím\left(\frac{2n^2+4}{n+2}\cdot\frac{n^2+n}{1-n^3}\right)$ 7.35) $lím\left(\frac{2n^2+4}{n+2}+\frac{n^2+n}{1-n^3}\right)$

7.36) $lím\left(2n-6+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{4}}$ 7.37) $lím\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{n+1}$ 7.38) $lím\left(1+2n+3n^2\right)^{1+2n-3n^2}$

7.39) $lím\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)\cdot\left(\frac{cn^2+d}{an^2+b}\right)$ 7.40) $lím\frac{\sqrt{n^2+a^2}-a}{\sqrt{n^2+b^2}-b}$ 7.41) $lím\left(\frac{2-3n}{7-3n}\right)^{8n-7}$

7.42) $lím\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^{\sqrt{n}}$ 7.43) $lím\left(\frac{\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}\right)^{2n-1}$ 7.44) $lím\left(3-\frac{1-2n}{2+n}\right)^{\sqrt{n^2+2}}$

7.45) $lím\sqrt[6]{\dfrac{2+4n+8n^2}{3+9n+27n^2}}$ 7.46) $lím\dfrac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}}{2^{n+1}}$ 7.47) $lím\dfrac{6}{n!}$

7.48) $2+\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10^2}+\dfrac{2}{10^3}+\ldots+\dfrac{2}{10^n}$ 7.49) $lím\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2-n+1}$

8 – Escriurem com a P_n al perímetre d'un polígon regular de n costats inscrit en una circumferència de diàmetre d. Quin és el límit de la successió $a_n = P_n/d$?

9 – Considerem la successió $a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}, \ldots, a_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$ Quina és la successió $(a_n)^2$?. I la successió $2a_n$?. Quina relació hi ha entre $(a_n)^2$ i $2a_n$?. Com són els límits de $(a_n)^2$ i $2a_n$?. Si líma_n=L, Quin és el límit de $(a_n)^2$ i de $2a_n$?. Pots deduir d'això el límit de a_n?.

10 – Demostra que el terme general de la successió anterior es pot expressar com $a_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$. Troba els límits de $\dfrac{2^n-1}{2^n}$ i de a_n. Dóna el mateix que en l'exercici anterior?

11 – Per mitjà del càlcul de límits troba una fracció generatriu de $4,5\overline{6}$.

12 – Una successió es construeix afegint un decimal més del nombre començant pel 3, així:

$a_1 = 3$
$a_2 = 3,1$
$a_3 = 3,14$
$a_4 = 3,141$
$a_5 = 3,1415$
$a_6 = 3,14159$
. . . . .

és una successió creixent?. Està afitada?. Quin és el seu límit?. Els seus termes són racionals? El límit és racional?