
La regla de Cramer en 2D

Jaume Serra

Departament de Matemàtiques

IES Vilatzara

24 de gener de 2010

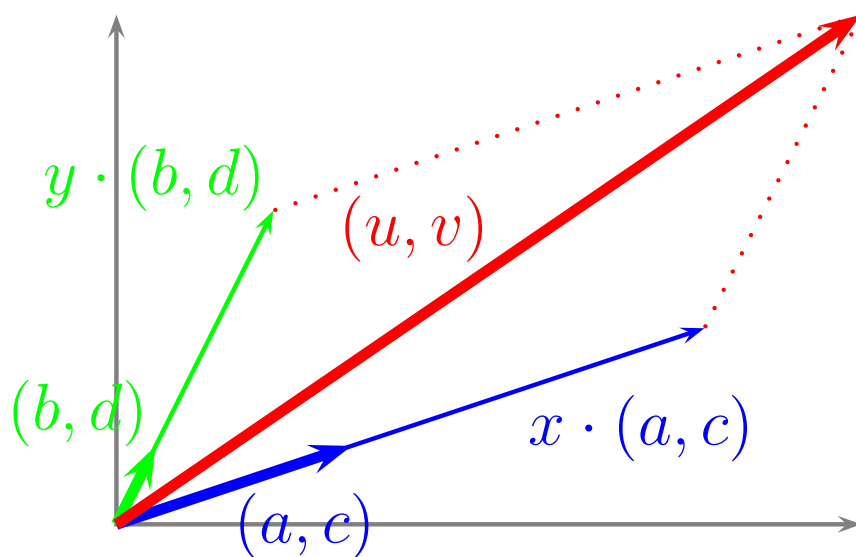
Un sistema de dues equacions amb dues incògnites com

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{array} \right\}$$

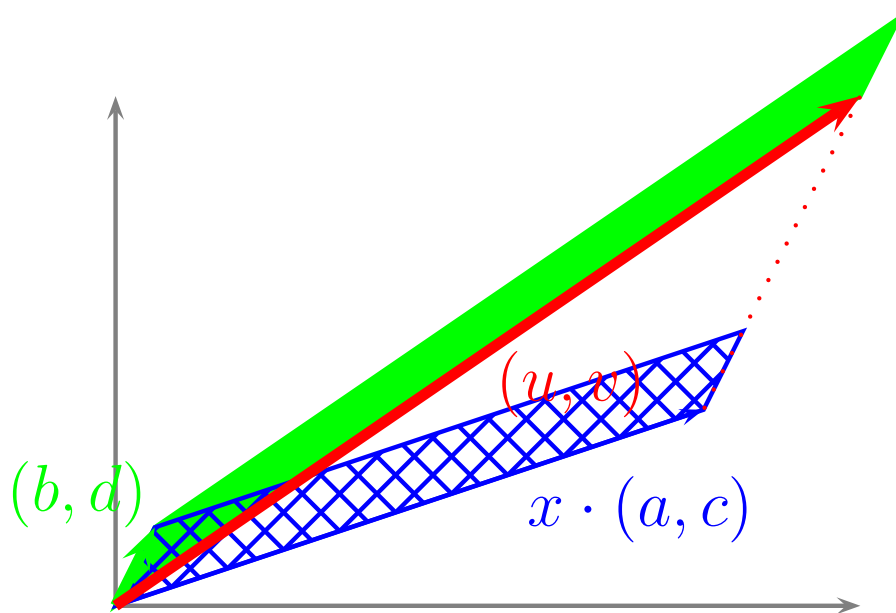
es pot reescriure com una equació vectorial

$$x \cdot (a, c) + y \cdot (b, d) = (u, v)$$

Coneguts els vectors (a, c) , (b, d) i (u, v) , es poden deduir els valors dels escalars x i y a partir de consideracions fetes amb les àrees dels paral·lelograms que generen aquests vectors.



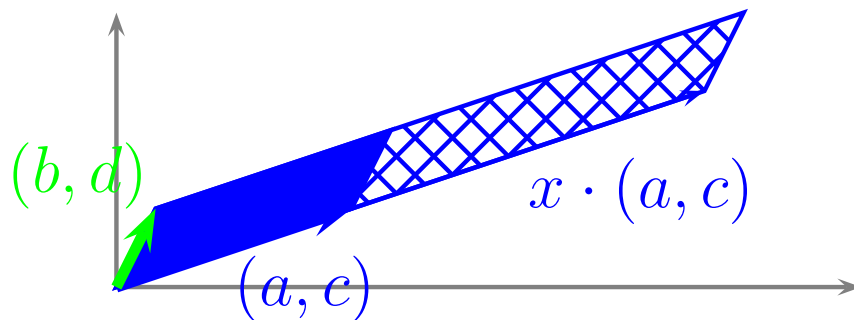
L'àrea del paral·lelogram generat pels vectors (u, v) i (b, d) és igual, pel principi de Cavalieri, a l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors $x \cdot (a, c)$ i (b, d) .



És a dir, que

$$\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xa & b \\ xc & d \end{vmatrix}$$

Per altra banda, l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors $x \cdot (a, c)$ i (b, d) és x vegades l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors (a, c) i (b, d) .



És a dir, que

$$\begin{vmatrix} xa & b \\ xc & d \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

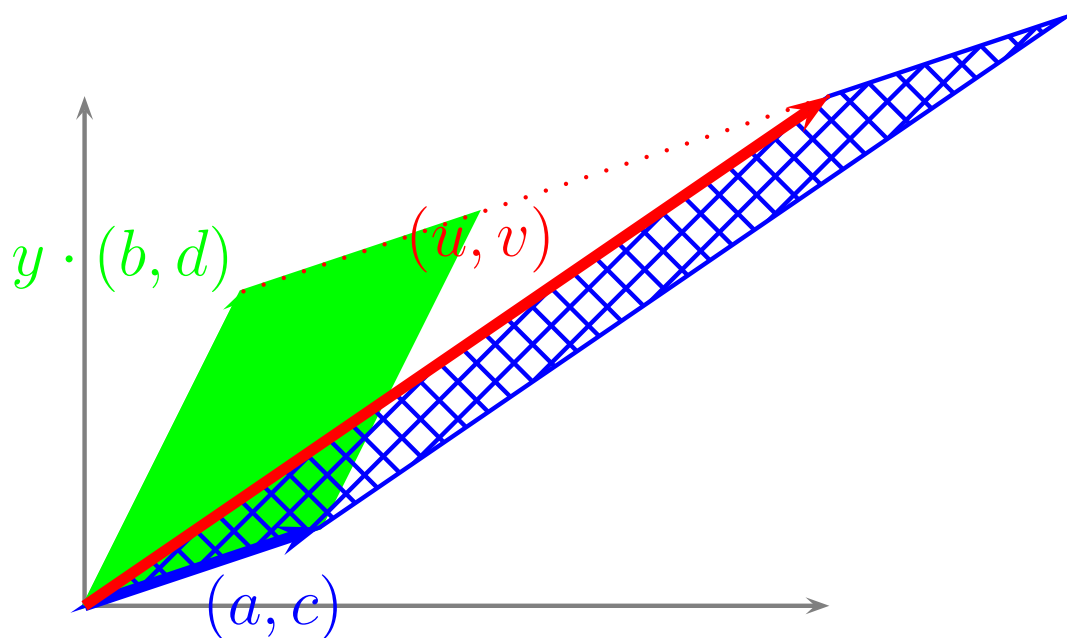
Per tant,

$$\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

d'on es dedueix

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

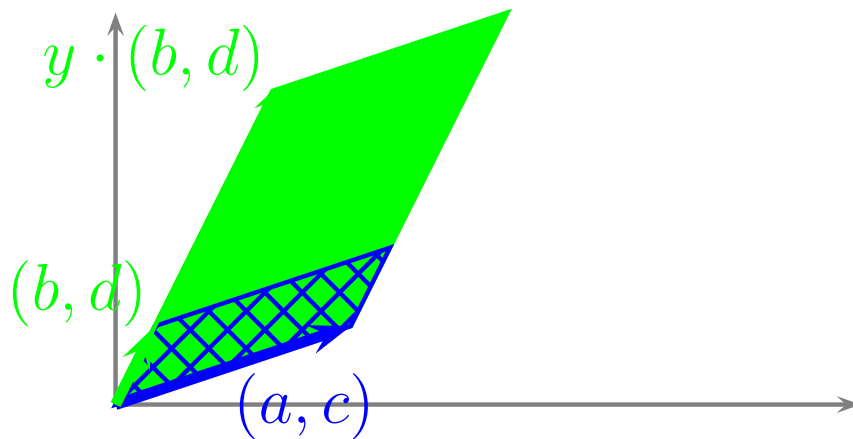
L'àrea del paral·lelogram generat pels vectors (u, v) i (a, c) és igual, pel principi de Cavalieri, a l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors $y \cdot (b, d)$ i (a, c) .



És a dir, que

$$\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & yb \\ c & yd \end{vmatrix}$$

Per altra banda, l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors (a, c) i $y \cdot (b, d)$ és y vegades l'àrea del paral·lelogram generat pels vectors (a, c) i (b, d) .



És a dir, que

$$\begin{vmatrix} a & yb \\ c & yd \end{vmatrix} = y \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix} = y \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

d'on es dedueix

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$