



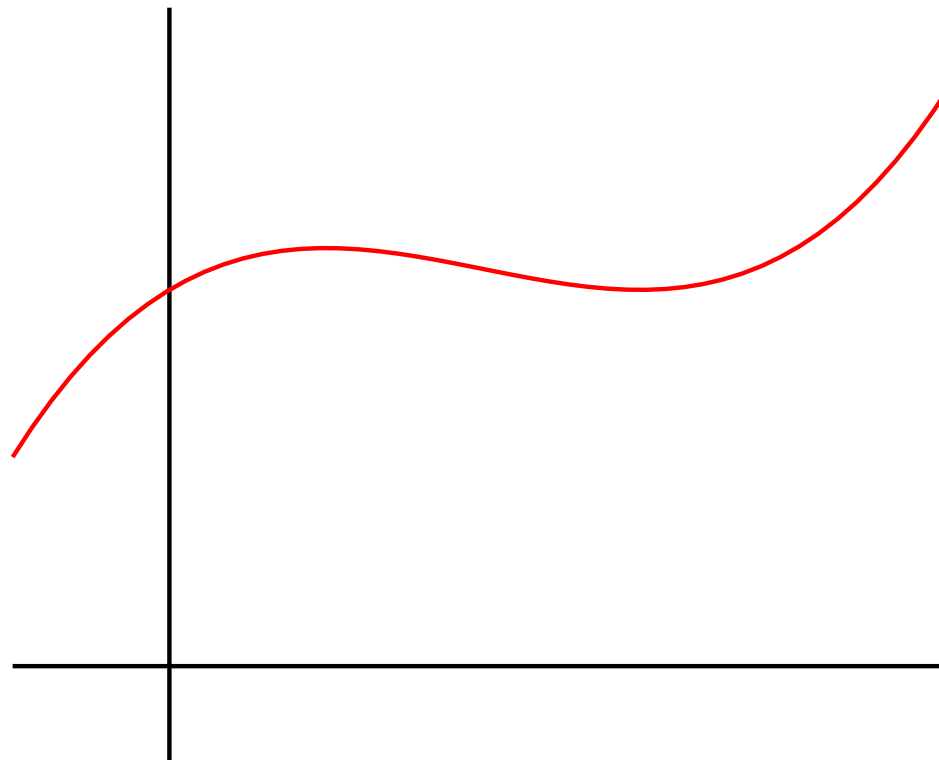
El teorema fonamental del Càlcul

Jaume Serra

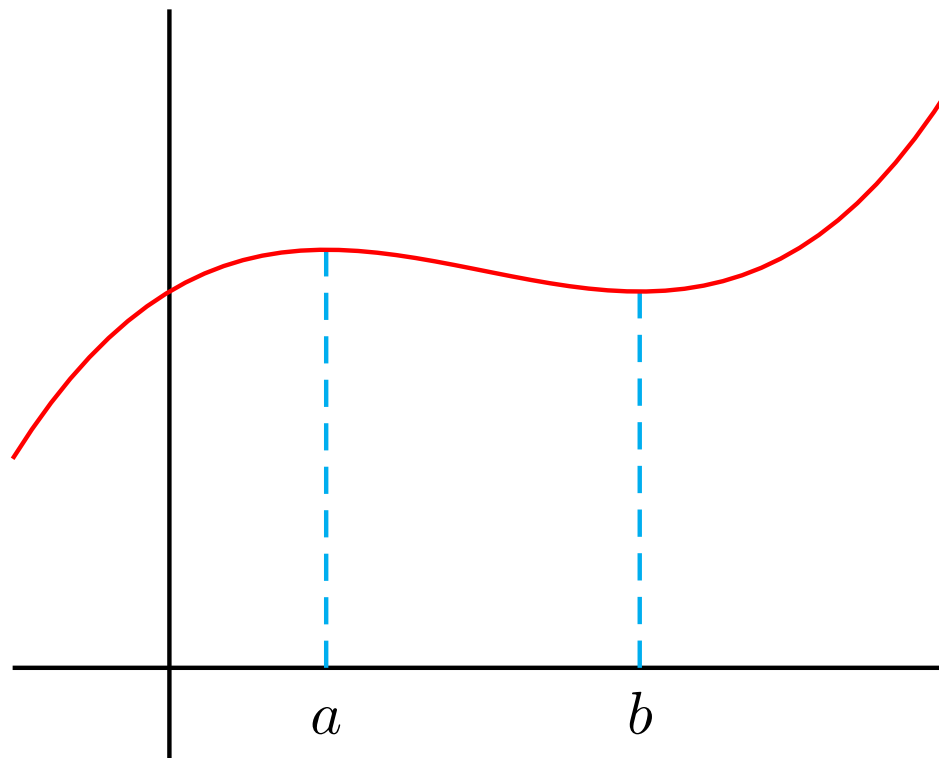
Departament de Matemàtiques

INS Vilatzara

Tenim una funció $f(x)$

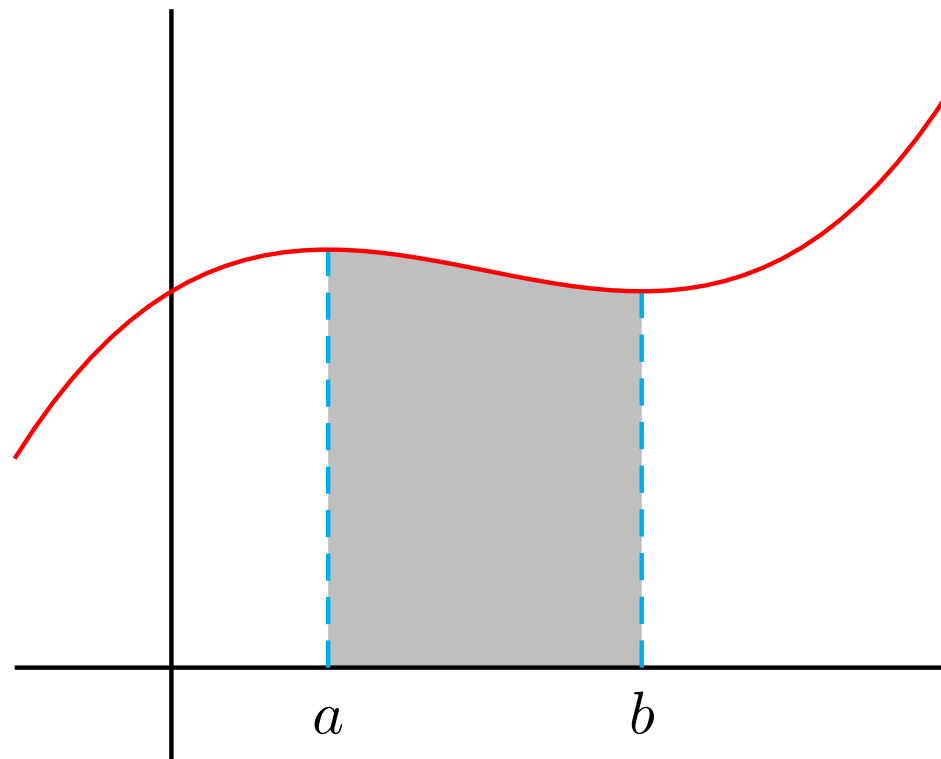


Considerem dos valors concrets de x : $x = a$ i $x = b$



L'àrea limitada per la funció i l'eix x , entre els valors $x = a$ i

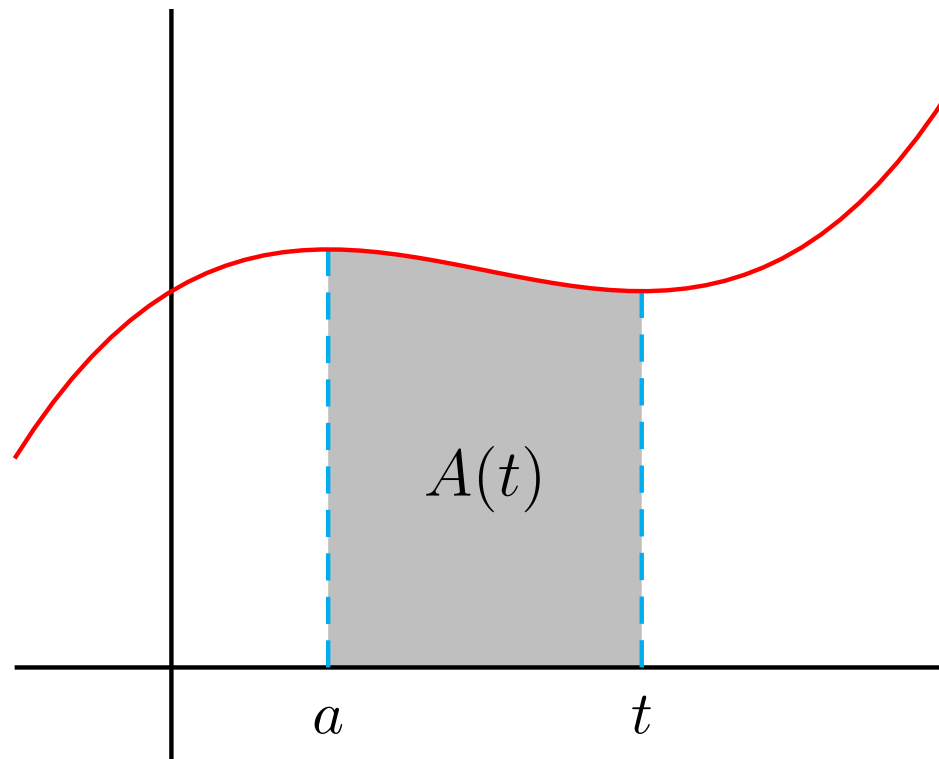
$x = b$, és $\int_a^b f(x)dx$



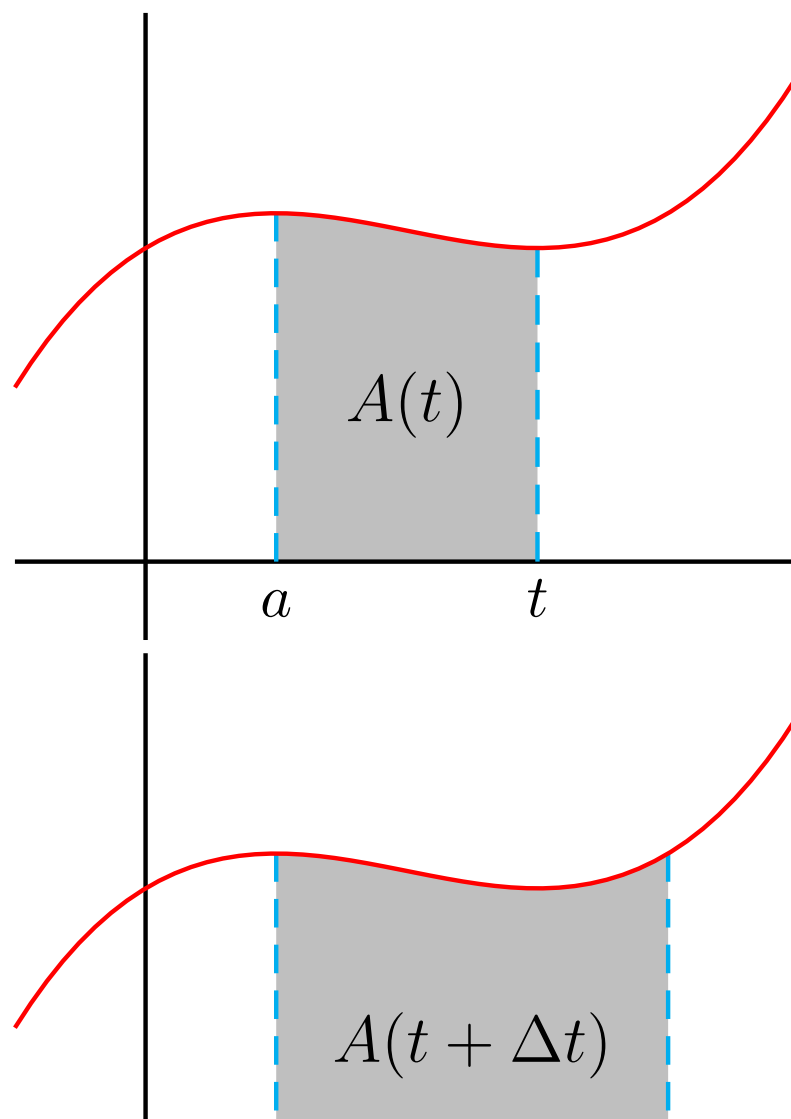


Volem trobar una expressió que permeti trobar aquesta àrea.

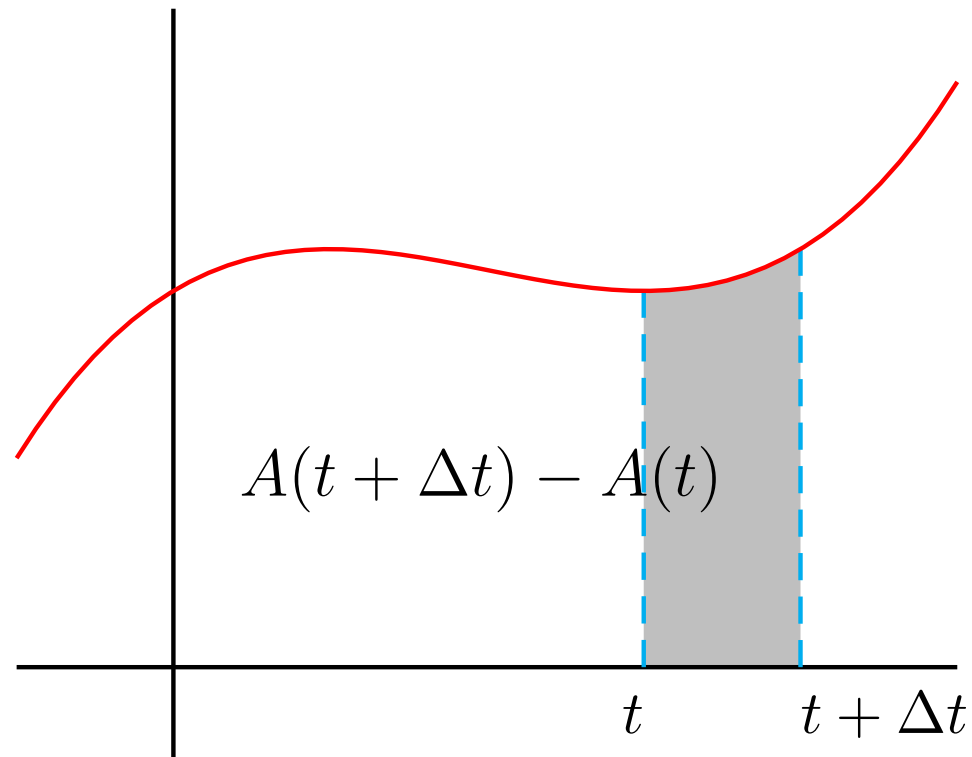
Considerem l'extrem esquerre a fix, i l'extrem dret variable (l'anomenarem t). Així, l'àrea serà funció del valor de t .



Considerarem dos valors per l'extrem dret: t i $t + \Delta t$

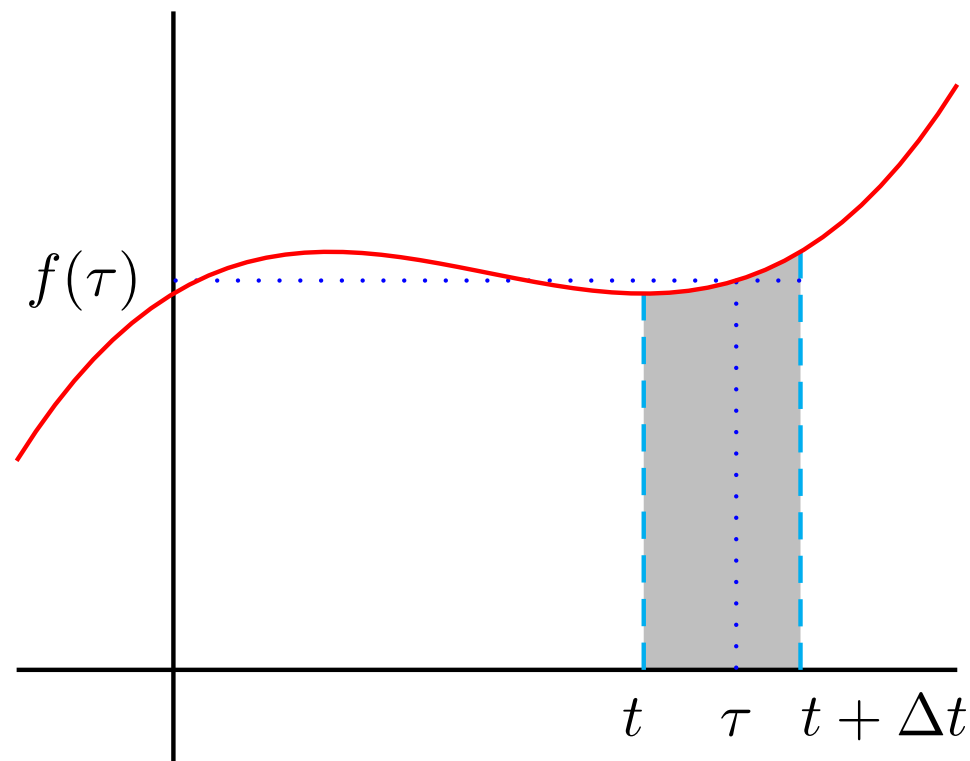


i la seva diferència és



i per tant hi haurà algun valor τ entre t i $t + \Delta t$ que faci

$$A(t + \Delta t) - A(t) = f(\tau) \cdot \Delta t$$



En el cas que els dos valors t i $t + \Delta t$ siguin molt propers, és a dir, quan $\Delta t \rightarrow 0$, tindrem que $\tau \rightarrow t$, d'on

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t + \Delta t) - A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(\tau) \cdot \Delta t$$

es pot escriure com

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t + \Delta t) - A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t) \cdot \Delta t$$

Aleshores,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t)$$

però com que t no depen de Δt , el límit de la dreta és irrellevant

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = f(t)$$

I el primer membre no és altra cosa que la funció derivada de A :

$$A'(t) = f(t)$$

resultat conegut com el teorema fonamental del càlcul.

En resum: la funció $A(t)$ que busquem és aquella que, si la derivem, dóna la funció $f(t)$.

Amb això hem trobat una propietat de la funció àrea A , no la seva expressió.

~~Però hi ha moltes funcions A que si es deriven donen f .~~

Però hi ha moltes funcions A que si es deriven donen f .

Per exemple, si $f(x) = 2x$:

$A(x)$	$A'(x)$
$x^2 + 1$	$2x$
$x^2 + 2$	$2x$
$x^2 + 5$	$2x$
$x^2 - 3$	$2x$
$x^2 - 7$	$2x$
...	...
$x^2 + k$	$2x$



Quina funció, d'aquesta família, és la que ens interessa per a calcular l'àrea?



Una funció d'aquesta família és $A(x)$, però no sabem quina és.

Escollim una funció d'aquesta família, l'anomenarem $F(x)$ i, és clar, no sabem si coincideix amb A .

El que si sabem és que la diferència entre la funció escollida $F(x)$ i la funció buscada $A(x)$ només serà una constant.

Per això podem assegurar que $F(x) + C = A(x)$.

Per tant, si sabem que $A(b) = \int_a^b f(x)dx$, amb $A' = f$,
aleshores

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) + C$$

Ara bé, com que

$$A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

tindrem

$$A(a) = F(a) + C$$

per tant, trobem que

$$C = -F(a)$$



Amb la qual cosa,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

resultat conegut com regla de Barrow.

La regla de Barrow ens ve a dir que no cal anar a buscar la funció $A(x)$, perquè amb qualsevol funció primitiva $F(x)$ podem trobar l'àrea.