

## Dossier: Sistemes de Transmissió de Moviment

<b>Tipus de document:</b>	Dossier i problemes resolts
<b>Elaborat per:</b>	<b>Departament de Tecnologia (LLHM)</b>
<b>Adreçat a:</b>	<b>Alumnes 4rt Curs d' ESO</b>
<b>Curs acadèmic:</b>	<b>2007-2008</b>

Els **sistemes de transmissió de moviment** permeten passar el moviment entre eixos.

Aquests sistemes són:

- **les politges unides per corretges o cadenes** (per a distàncies grans entre eixos)
- **els engranatges** (per a eixos situats a poca distància)

La **relació de transmissió**  $\tau$  indica el nombre de voltes que fa l'eix de sortida (conduït o número 2) per cada volta de l'eix d'entrada (motriu o número 1).

Si la velocitat angular de l'eix d'entrada és  $w_1$  i la de l'eix de sortida és  $w_2$ , aleshores:  $\tau = w_2 / w_1$

- Si l'eix conduït gira més a poc a poc que el motriu, es tracta d'un **sistema reductor**:

$$w_2 < w_1 \quad w_2 / w_1 < 1 \quad \tau < 1$$

- Si l'eix conduït gira més ràpid que el motriu, es tracta d'un **sistema multiplicador**:

$$w_2 > w_1 \quad w_2 / w_1 > 1 \quad \tau > 1$$

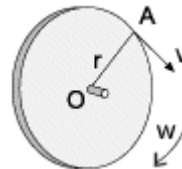
- Si l'eix de sortida gira a la mateixa freqüència angular que el d'entrada, tots dos tenen la mateixa velocitat angular. En aquest cas, però, pot passar que s'inverteixi el sentit de gir.

$$w_2 = w_1 \quad w_2 / w_1 = 1 \quad \tau = 1$$

Entre la velocitat angular  $w$  d'una roda i la velocitat lineal  $v$  dels seus punts hi ha la relació següent:

$$v = r \cdot w \quad \text{on:}$$

$v$  és la velocitat lineal (m/s)  
 $w$  és la velocitat angular (rad/s)  
 $r$  és el radi de la roda (m)



### Transmissió per corretja

En les politges unides per corretges o cadenes la relació de transmissió val:

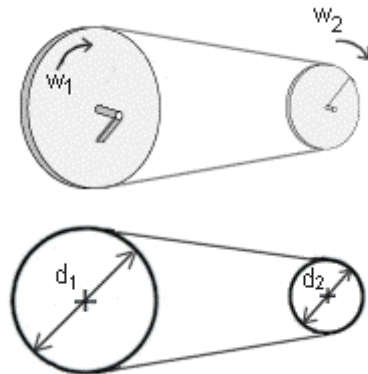
$$\tau = w_2 / w_1 = d_1 / d_2 \quad \text{on:}$$

$w_1$  és la velocitat angular de l'eix de la politja motriu

$w_2$  és la velocitat angular de l'eix de la politja conduïda

$d_1$  és el diàmetre de la politja motriu

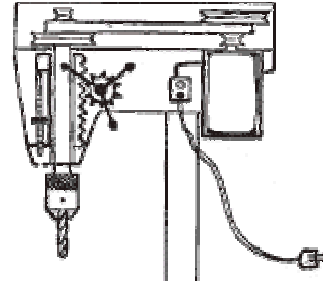
$d_2$  és el diàmetre de la politja conduïda



Aquest mecanisme es troba en molts electrodomèstics de la cuina, en les màquines de cosir de pedals, dins de la impressora, en màquines industrials, etc

Si s'uneixen diverses politges de diferents diàmetres sobre un mateix eix, s'obté una politja escalonada o tren de politges, el qual s'utilitza per a canvis de marxes fent diferents combinacions.

És el cas de la caixa de canvis del trepant de sobretaula.



### Transmissió per cadena

Per evitar el lliscament que es produeix entre la politja i la corretja, es pot optar per utilitzar rodes dentades i unir-les mitjançant una cadena.

En aquest cas es compleix:

$$\tau = w_2 / w_1 = z_1 / z_2 \quad \text{on:}$$

$w$  és la velocitat angular de l'eix (rad/s)

$z$  és el nombre de dents de la roda



Aquest mecanisme es troba a la bicicleta, on la cadena uneix el plat amb  $z_1$  dents i el pinyó amb  $z_2$  dents.

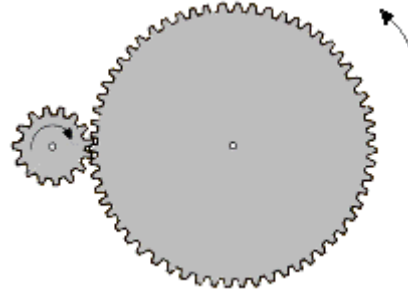
## Engranatges

Els engranatges són mecanismes de transmissió de moviment circular mitjançant rodes dentades que encaixen entre si. Això és possible perquè tenen el mateix pas (distància entre dues dents veïnes).

La relació de transmissió val:

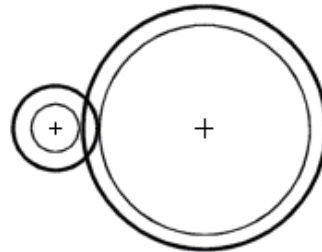
$$\tau = w_2 / w_1 = z_1 / z_2 \quad \text{on:}$$

$w$  és la velocitat angular de l'eix (rad/s)  
 $z$  és el nombre de dents de l'engranatge



Els engranatges poden ser rectes, cònics, interiors, vis sens fi i pinyó-cremallera (en aquest últim hi ha transformació de moviment de rectilini a circular o a l'inrevés).

Per representar gràficament els engranatges, com que és molt difícil dibuixar-los amb totes les dents, es fa un dibuix simbòlic en el qual la roda dentada es representa amb una circumferència.



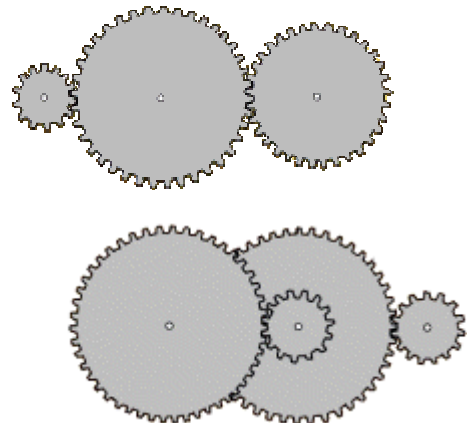
Un **tren d'engranatges** és un mecanisme compost de diversos engranatges. Es pot determinar la relació de transmissió per passos considerant parelles d'engranatges (motriu - conduït) fins a arribar a la darrera roda dentada. A l'hora de fer el càlcul, cal recordar que dues rodes dentades que giren al voltant del mateix eix tenen la mateixa velocitat angular i per tant  $\tau = 1$ .

Per a un tren d'engranatges:

$$\tau = w_{\text{última roda}} / w_{\text{primera roda}}$$

$$\tau = \tau_{12} \cdot \tau_{23} \cdot \tau_{34} \cdot \dots$$

$\tau$  = producte nombre de dents rodes motrius / producte nombre dents rodes conduïdes.



En un tren d'engranatges, una roda pot ser alhora motriu i conduïda, ja que primer rep el moviment i després el transmet a un altre engranatge. Però, atenció: si dues rodes estan muntades sobre el mateix eix de rotació, la roda que rep el moviment només serà conduïda, i la que transmet el moviment només serà motriu.

Finalment, cal tenir en compte que en reduir la velocitat d'una politja o roda dentada, augmenta la força que pot fer, per exemple, per pujar una càrrega, en foradar... Per això, la majoria de motors elèctrics, com el del trepant o el muntacàrregues, disposen d'un reductor per permetre reduir el nombre de voltes que fa el motor elèctric i multiplicar, de manera proporcional, la força que pot fer la roda conduïda.

1

- a. Calcula la velocitat angular d'una politja de 30 cm de diàmetre si rep el moviment a través d'una corda que passa per una roda acanalada de 15 cm de diàmetre i que gira a 100 rad/s.
- b. És un sistema reductor o multiplicador?



## resolució

- a. Les dades de l'enunciat són:

$$d_2 = 30 \text{ cm}$$

$$d_1 = 15 \text{ cm}$$

$$\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$$

I ens demanen la velocitat de la roda conduïda.

La relació de transmissió s'expressa:

$$\tau = \omega_2 / \omega_1 = d_1 / d_2$$

Per tant:

$$\tau = 15/30 = 0,5$$

Com que  $\tau = \omega_2 / \omega_1$ , aleshores:

$$\omega_2 = \tau \cdot \omega_1 = 0,5 \cdot 100 \text{ rad/s} = 50 \text{ rad/s}$$

- b. Es tracta d'un sistema reductor ja que per cada volta completa de la roda conduïda, la roda motriu n'ha de fer dues. La velocitat angular de la roda motriu és el doble de la velocitat angular de la roda conduïda, és a dir, la roda conduïda gira més a poc a poc que la roda motriu.

## solució

- a.  $\omega_2 = 50 \text{ rad/s}$
- b. Reductor



2

- a. Determina el radi que ha de tenir una politja que gira a 50 rad/s i que en fa girar una altra de radi 8 cm a 150 rad/s a través d'una corretja.
- b. És un sistema reductor o multiplicador?



## resolució

a. Les dades de l'enunciat són:

$r_2 = 8 \text{ cm}$ ; per tant,  $d_2 = 16 \text{ cm}$

$w_2 = 150 \text{ rad/s}$

$w_1 = 50 \text{ rad/s}$

I ens demanen el radi de la roda motriu.

La relació de transmissió s'expressa:  $\tau = w_2/w_1 = d_1/d_2$

Per tant:  $\tau = 150 \text{ rad/s} / 50 \text{ rad/s} = 3$

Com que  $\tau = d_1/d_2$

aleshores  $d_1 = \tau \cdot d_2 = 3 \cdot 16 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$

El radi és la meitat del diàmetre, per tant, el radi de la roda motriu és:

$r_1 = 48/2 = 24 \text{ cm}$

- b. Es tracta d'un sistema multiplicador per cada volta que fa la roda motriu, la roda conduïda en fa 3; la velocitat angular de la roda motriu és tres vegades inferior a la velocitat angular de la roda conduïda, és a dir, la roda conduïda gira més ràpid.

## solució

a.  $r_1 = 24 \text{ cm}$

b. Multiplicador



3

Quantes dents ha de tenir una roda dentada que gira a 40 rad/s i engrana amb una altra roda dentada amb 60 dents i velocitat de gir 10 rad/s?



## resolució

Considerem que la roda de la qual volem calcular el nombre de dents és la roda motriu. (Si es considerés al revés, s'obtidria el mateix resultat).

Les dades del problema són:

$$w_1 = 40 \text{ rad/s}$$

$$z_2 = 60$$

$$w_2 = 10 \text{ rad/s}$$

La relació de transmissió val:

$$\tau = w_2 / w_1 = 10 / 40 = 0,25$$

$$\text{Per tant: } z_1 = \tau \cdot z_2 = 0,25 \cdot 60 = 15 \text{ dents}$$

## solució

$$z = 15 \text{ dents}$$



4

- a. Considera dos engranatges rectes amb  $z_1 = 12$  dents i  $z_2 = 60$  dents.  
Si  $w_1 = 40$  rad/s, a quina velocitat angular gira l'altre engranatge?
- b. Hi ha canvi en el sentit de gir del segon engranatge?



## resolució

- a. La relació de transmissió val:

$$\tau = w_2 / w_1 = z_1 / z_2$$

Per tant, la relació de transmissió resulta:

$$\tau = z_1 / z_2 = 12 / 60 = 0,2$$

$$\text{La velocitat } w_2 = \tau \cdot w_1 = 0,2 \cdot 40 \text{ rad/s} = 8 \text{ rad/s}$$

- b. Sí que hi ha canvi en el sentit de gir: el sentit de gir de l'engranatge conduït és contrari al de l'engranatge motriu.

## solució

- a.  $w_2 = 8$  rad/s  
b. Sí





- a. Si en el problema anterior posem enmig dels dos engranatges un altre engranatge amb 24 dents, a quina velocitat gira el tercer engranatge?  
 b. Quina diferència hi ha amb el problema anterior?



## resolució

a. Ara tenim tres engranatges:  $z_1=12$ ,  $z_2=24$  i  $z_3=60$

$$\tau_{12} = z_1 / z_2 = 12 / 24 = 0,5$$

$$\tau_{23} = z_2 / z_3 = 24 / 60 = 0,4$$

La relació de transmissió del tren d'engrenatges és:

$$\tau = \tau_{12} \cdot \tau_{23} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

Com que  $\tau = w_3 / w_1$

$$w_3 = \tau \cdot w_1 = 0,2 \cdot 40 \text{ rad/s} = 8 \text{ rad/s}$$

Fixa't que la roda núm. 2 és primer una roda conduïda, però després també és una roda motriu.

b. La roda addicional no canvia la relació de transmissió del sistema ni tampoc la relació de velocitats. En els dos casos giren a la mateixa velocitat, però en intercalar aquesta roda dentada addicional, que s'anomena "roda boja", s'aconsegueix que la roda motriu i la conduïda girin en el mateix sentit. A diferència del problema anterior, la roda motriu i la conduïda giren en el mateix sentit!

## solució

a.  $w = 8 \text{ rad/s}$

b. No hi ha canvi en el sentit de gir, el tercer engranatge gira en el mateix sentit que el primer.



- En una bicicleta el plat té 54 dents i el pinyó 16. Si fas 60 pedalades cada minut:
- A quina velocitat gira la roda?
  - Calcula la velocitat amb què avança la bicicleta en km/h si el radi de la roda fa 30 cm.



## resolució

a. El plat conté la roda dentada motriu ( $z_1 = 54$ ) i el pinyó és la roda dentada conduïda ( $z_2 = 16$ ). Si fem 60 pedalades cada minut, vol dir que la freqüència de rotació amb la qual fem girar el plat on es troba l'eix dels pedals és:

$$n = 60 \text{ rpm (revolucions, cicles o pedalades senceres cada minut)}$$

Una freqüència de rotació d'1 rpm (1 revolució per minut) correspon a descriure una volta sencera (és a dir,  $360^\circ$  o  $2\pi$  radians) cada minut, és a dir, cada 60 segons.

Per tant, podem calcular la velocitat angular així:  $w = n \cdot 2\pi / 60$

Resulta:  $w_1 = 60 \cdot 2\pi / 60 = 2\pi \text{ rad/s}$

La relació de transmissió s'expressa:  $\tau = w_2/w_1 = z_1/z_2$

Per tant,  $\tau = 54/16 = 3,375$

La velocitat angular amb què gira el pinyó és:

$$w_2 = \tau \cdot w_1 = 3,375 \cdot 2\pi = 6,75\pi \text{ rad/s}$$

Com que el pinyó i la roda giren al voltant del mateix eix, la roda té la mateixa velocitat angular que el pinyó, és a dir, de  $6,75\pi \text{ rad/s}$ .

b. Apliquem la fórmula de l'enunciat que ens relaciona la velocitat de gir i la velocitat lineal  $v = r \cdot w$

Substituint:  $v = 0,3 \text{ m} \cdot 6,75\pi \text{ rad/s} = 0,3 \text{ m} \cdot 21,21 \text{ rad/s} = 6,36 \text{ m/s}$  ( $\pi = 3,1416$ )

La velocitat amb què avança la bicicleta és:

$$v = 6,36 \text{ m/s o també: } v = 6,36 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ km} / 1000 \text{ m} \cdot 3600 \text{ s} / 1 \text{ h} = 23 \text{ km/h}$$

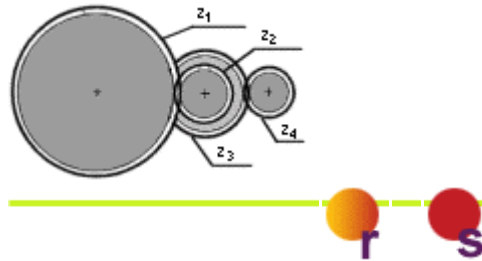
## solució

a.  $w = 6,75\pi \text{ rad/s}$

b.  $v = 23 \text{ km/h}$



- a. Calcula la velocitat de rotació del darrer engranatge (núm. 4) d'un tren d'engranatges en el qual el primer gira a 20 rad/s i  $z_1 = 40$ ,  $z_2 = 20$ ,  $z_3 = 30$  i  $z_4 = 15$ , si el núm. 2 i núm. 3 estan muntats sobre el mateix eix.
- b. El sistema és reductor o multiplicador?
- c. El sentit de gir de la roda núm. 4 és igual que el de la núm. 1?



## resolució

a. El problema es pot resoldre considerant els engranatges per parelles: 1-2, 2-3 (aquests estan muntats sobre el mateix eix i per tant giren a la mateixa velocitat,  $w_2 = w_3$ ) i 3-4.

$$\tau_{12} = z_1 / z_2 = 40 / 20 = 2 \quad \tau_{12} = w_2 / w_1 \quad w_2 = \tau_{12} \cdot w_1 = 2 \cdot 20 \text{ rad/s} = 40 \text{ rad/s}$$

$$w_2 = w_3 = 40 \text{ rad/s}$$

$$\tau_{34} = z_3 / z_4 = 30 / 15 = 2 \quad \tau_{34} = w_4 / w_3 \quad w_4 = \tau_{34} \cdot w_3 = 2 \cdot 40 \text{ rad/s} = 80 \text{ rad/s}$$

També es pot resoldre aplicant la fórmula pel cas d'un tren d'engrenatges:

$\tau$  = producte del nombre de dents de les rodes motrius / producte del nombre de dents de les rodes conduïdes =  $z_1 \cdot z_3 / z_2 \cdot z_4 = 40 \cdot 30 / 20 \cdot 15 = 4$

$$\text{Com que: } \tau = w_4 / w_1 \quad w_4 = \tau \cdot w_1 = 4 \cdot 20 \text{ rad/s} = 80 \text{ rad/s}$$

b. El sistema és multiplicador ( $\tau = 4 > 1$ ), ja que per cada volta de la primera roda, l'última roda fa 4 voltes completes.

c. Sí, el sentit de gir de la primera i de l'última roda és el mateix. La roda 2 i la 3, en trobar-se en el mateix eix, giren totes dues en el mateix sentit, contrari al de les rodes 1 i 4.

## solució

- a.  $w = 80 \text{ rad/s}$
- b. Multiplicador
- c. Sí



Imagina que has de construir un rellotge per posar al pati del teu institut.

Disposes d'un motor elèctric que gira a  $40\pi$  rad/s i un sistema reductor amb  $\tau = 1 / 200$  amb un vis sense fi acoblat a la sortida ( $z_2 = 1$ ).

- Quantes dents ha de tenir la roda que porta enganxada l'agulla dels minuts?
- I la de l'agulla de les hores?



## resolució

Element 1: motor elèctric

Element 2: vis sense fi

Element 3: roda de l'agulla dels minuts

Element 4: roda de l'agulla de les hores

En acoblar el reductor a l'eix del motor elèctric, la nova velocitat de gir, tramesa al vis sense fi és:

$$w_2 = \tau_{12} \cdot w_1 = (1 / 200) \cdot 40\pi \text{ rad/s} = 40\pi \text{ rad/s} / 200 = 0,2\pi \text{ rad/s}$$

$w_2$  és la velocitat de gir del vis sense fi. A cada volta sencera del vis sense fi, les rodes associades a les agulles del rellotge avancen una dent (pas de la roda dentada).

a. La roda que porta l'agulla dels minuts ha de fer una volta cada 60 segons, per tant la seva velocitat angular ha de ser:

$$w_3 = 2\pi \text{ rad} / 60 \text{ s} = \pi \text{ rad} / 30 \text{ s}$$

I la relació de transmissió entre el vis i la roda de l'agulla:

$$\tau_{23} = w_3 / w_2 = 1/6 \quad \text{i també,} \quad \tau_{23} = z_2 / z_3$$

En el vis sense fi,  $z_2 = 1$ , per tant,  $z_3 = z_2 / \tau_{23} = 1 / (1/6) = 6$  dents

La roda que té enganxada l'agulla que marca els minuts ha de tenir sis dents.

b. La roda que porta l'agulla de les hores ha de fer una volta cada 3.600 segons, per tant la seva velocitat angular ha de ser:

$$w_4 = 2\pi \text{ rad} / 3.600 \text{ s} = \pi \text{ rad} / 1.800 \text{ s}$$

$$\tau_{24} = w_4 / w_2 = (\pi \text{ rad} / 1.800 \text{ s}) / (0,2\pi \text{ rad/s}) = 1 \text{ rad} / 360 \text{ s}$$

En el vis sense fi,  $z_2 = 1$ , per tant,  $z_4 = z_2 / \tau_{24} = 360$  dents

La roda que té enganxada l'agulla que marca les hores ha de tenir 360 dents.

## solució

a. 6 dents

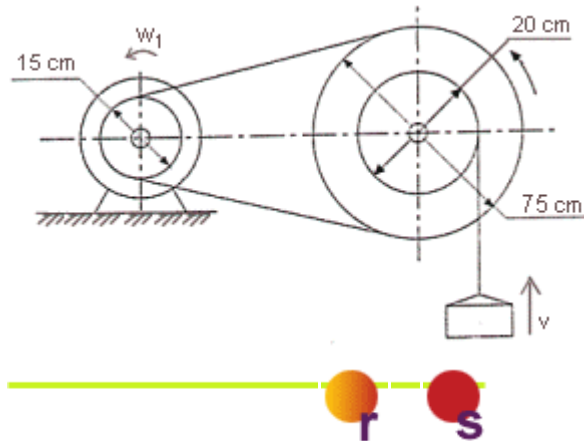
b. 360 dents

## 9

La figura representa un muntacàrregues. Un motor elèctric fa girar una roda de diàmetre 15 cm a 60 rad/s i transmet el moviment a una politja de diàmetre 75 cm, a l'eix de la qual hi ha un tambor que, en girar, enrotlla la corda i aixeca la càrrega.

a. Calcula la relació de transmissió del sistema.

b. Si el cilindre sobre el qual s'enrotlla la corda té un diàmetre de 20 cm, a quina velocitat puja la caixa?



## resolució

a. En les politges unides per corretges o cadenes la relació de transmissió val:

$$\tau = d_1 / d_2$$

Per tant, si:

$$d_1 = 15 \text{ cm} \quad \text{i} \quad d_2 = 75 \text{ cm}, \quad \tau = 15 / 75 = 0,2$$

$$\text{b. } \tau = w_2 / w_1, \text{ aleshores } w_2 = \tau \cdot w_1 = 0,2 \cdot 60 \text{ rad/s} = 12 \text{ rad/s}$$

Aquesta també és la velocitat del tambor perquè està muntat sobre el mateix eix de gir que la segona politja.

La corda que s'està enrotllant està a una distància de l'eix de rotació de  $r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

Per tant, aplicant la fórmula que ens relaciona la velocitat angular amb la velocitat de translació:

$$v = w \cdot r \quad \text{resulta: } v = 12 \text{ rad/s} \cdot 0,1 \text{ m} = 1,2 \text{ m/s}$$

Per tant, si aquesta és la velocitat que té la corda quan s'està enrotllant i la caixa està lligada amb aquesta corda, aleshores la caixa també puja a 1,2 m/s.

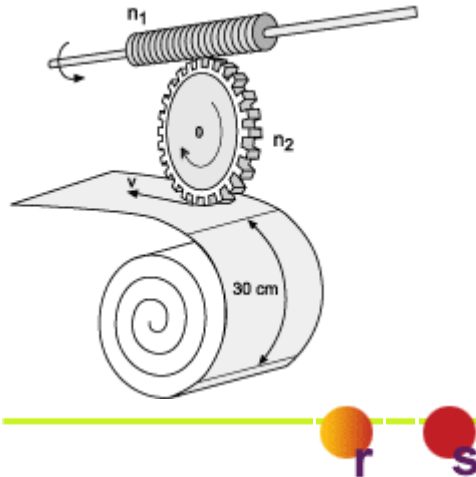
## solució

a.  $\tau = 0,2$

b.  $v = 1,2 \text{ m/s}$

## 10

Un vis sans fi que gira a 100 rad/s fa girar una roda dentada de diàmetre 20 cm i amb 50 dents que alimenta una impremta. Si els fulls tenen una llargada de 30 cm, quanta estona ha de funcionar el vis sans fi per imprimir 100 fulls?



## resolució

El vis sans fi ha de girar 50 vegades per engranar amb les 50 dents de la roda dentada i aconseguir, així, una volta sencera. En el vis sense fi només engrana una dent per cada volta sencera i per tant es considera que només té una dent ( $z_1 = 1$ )

Per tant:

$$z_1 = 1 \quad \text{i} \quad z_2 = 50 \quad \tau = z_1 / z_2 = 1/50 = 0,02$$

La roda dentada gira a:  $\omega_2 = \tau \cdot \omega_1 = 0,02 \cdot 100 \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}$

Els fulls estan en contacte amb la roda dentada a una distància que coincideix amb el radi de la roda dentada. En aquest punt la velocitat de translació dels fulls val:

$$v = r \cdot \omega \quad v = 0,1 \text{ m} \cdot 2 \text{ rad/s} = 0,2 \text{ m/s}$$

La longitud total dels fulls és  $100 \cdot 30 \text{ cm} = 3.000 \text{ cm} = 30 \text{ m}$

El temps necessari perquè la roda dentada arrossegui 30 metres de paper que avança a 0,2 m/s cap a l'impremta es calcula així:

$$t = x/v = 30 \text{ m} / (0,2 \text{ m/s}) = 150 \text{ s} = 2 \text{ minuts i } 30 \text{ segons}$$

## solució

$$t = 2 \text{ minuts i } 30 \text{ segons}$$