DIBUIX TÈCNIC, 2n BATXILLERAT

1r CRÈDIT: GEOMETRIA PLANA

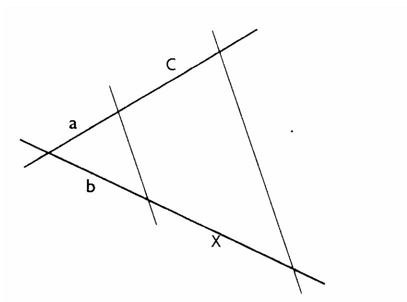
IES Puig de la Creu
Departament d'Expressió Visual i Plàstica

INDEX

1.- TEMA 1: PROPORCIONALITAT

1.1.- Proporcionalitat directa e inversa

1.2.- Quarta i tercera proporcional



Quarta proporcional

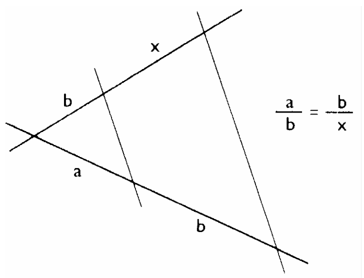
Donats tres segments o tres de les quatre magnituds que formen la relació de proporcionalitat, trobar-ne la quarta tal que es mantingui la raó de proporcionalitat:

a/b = c/x

Tercera proporcional

En una proporció contínua només hi ha tres termes diferents, dos són iguals. Si en coneixem dos, cal trobar-ne el tercer.

a/b = b/x

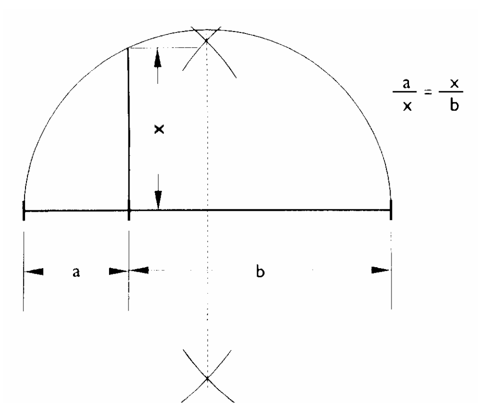


1.3.- Mitjana proporcional

El terme que es repeteix en una proporció contínua rep el nom de mitjana proporcional.

a/x =x/b

L'obtenció gràfica de la qual es basa en la propietat següent: en tota circumferència la semicorda perpendicular a un diàmetre és mitjana proporcional entre les parts en que queda dividit. També es poden aplicar els teoremes de l'altura i del catet d'un triangle rectangle (x^2 = a.b).

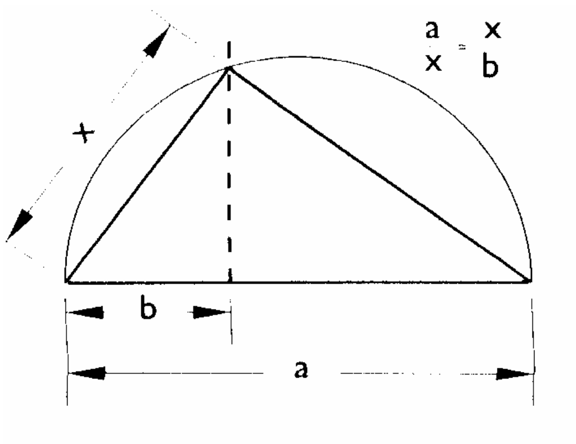


Relacions de proporcionalitat en els triangles

Hi ha dos teoremes relatius al triangle rectangle que també ens permeten trobar la mitjana proporcional entre dos segments.

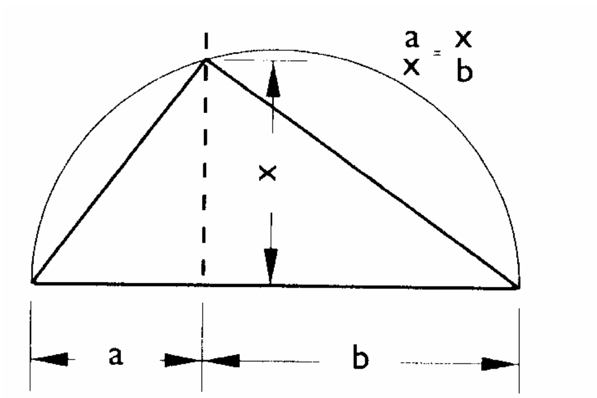
Teorema del catet

Un catet és mitjana proporcional entre la hipotenusa (a) i la projecció ortogonal d'aquest catet sobre ella (b).
Per tant per trobar la mitjana proporcional entre dos segments farem la següent operació:
1.- situar els dos segments en posició de superposició amb un extrem comú.
2.- dibuixar l'arc capaç de 90º que permet dibuixar un triangle rectangle (és la semicircumferència, per tant abans cal trobar el punt mig del segment més gran)
3.- aixecar una perpendicular des de l'extrem no comú del segment menor. Aquesta recta ens dóna el vèrtex del triangle rectangle i el catet menor és la solució.



Teorema de l'altura

L'altura d'un triangle rectangle és mitjana proporcional entre els segments que determina sobre la hipotenusa (a+b).
Per trobar la mitjana proporcional segons aquest teorema caldrà:
1.- situar els dos segments alineats
2.- traçar l'arc capaç de 90º de la suma dels segments
3.- la perpendicular per l'extrem comú dels segments, que és l'altura del triangle rectangle, ens proporciona la solució



1.4.-Secció àuria

La proporció harmònica o Divina proporció, com ell l'anomenava, va ser descoberta pel monjo franciscà Fra Luca Pacioli (1445-1517). Durant el segle XV a Italia els estudis sobre la proporció del cos humà, la visió harmònica de l'univers i la recerca d'un principi universal de bellesa van ser molt importants i fonamentals per a posteriors aplicacions en art, arquitectura (modulor de Le Corbusier), geometria, etc i apareix en la natura i en el pròpi cos humà. Leonardo Da Vinci va anomenar aquesta proporció número d'or o secció àuria.
En art la secció àuria es defineix de la següent manera: perquè un espai dividit en dues parts iguals resulti agradable i estètic ha d'haver entre la part més petita i la més gran la mateixa relació que entre la part major i el tot.

La secció àuria d'un segment AB és la seva divisió en dues parts AX, BX, mitjana i extrema raó de la proporció, i compleixen la següent condició:

AB/AX = AX/XB

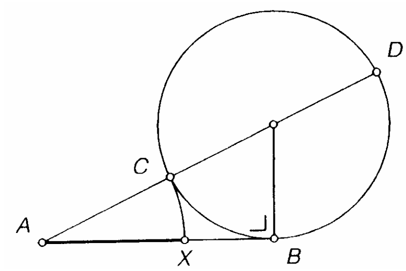
El punt X divideix el segment en mitjana i extrema raó quan la part major AX és la mitjana proporcional entre el segment total i el menor XB. El segment AX és el segment auri del segment total AB. A la vegada que el segment menor XB és el segment auri de la part major AX.

AX és el segment auri d' AB

Per a les següents construccions s'apliquen les propietats de la potència que veurem més endavant.

.- Construcció del segment auri d'un segment donat (divisió del segment en extrema i mitjana raó)

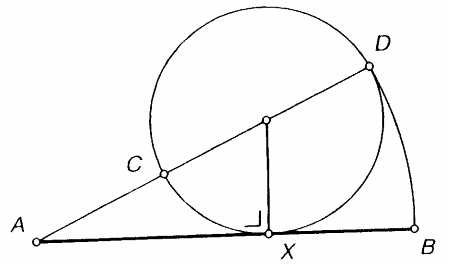
1.- Donat el segment AB traçar-hi la mediatriu i amb radi AB/2 traçar una circumferència tangent en el punt B. (per això cal primer aixecar una perpendicular al segment des de B)
2.- Unir el centre de la circumferència amb l'altre extrem A i obtindrem un punt C de la circumferència.
3.- AC serà el segment àuri d' AB
4.- Transportar C sobre AB, i obtindrem X sobre el segment total.



Radi : AB/2 AX és el segment auri d'AB

.- Construcció d'un segment donat el seu segment auri.

La construcció és igual a l'anterior. Donat el segment AX es traça una circumferència de diàmetre AX, tangent en X .
Al unir el centre de la circumferència amb l'altre extrem A s'obté el segment AB, del qual AX és la seva secció àuria.



Radi : AB/2 AX és el segment auri d'AB

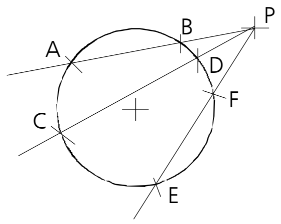
FALTA RECTANGLE AURI

TEMA 2 .- POTÈNCIA: EIX RADICAL I CENTRE RADICAL -APLICACIONS-

2.1.- Potència d'un punt respecte d'una circumferència

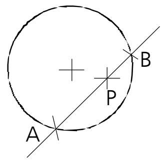
La potència d'un punt respecte d'una circumferència és el producte de dos segments determinats per una recta secant a la circumferència i que passa pel punt P. És una costant. = K.

$\overline{PA}$. $\overline{PB}$.=$\overline{PC}$ $\overline{PD}$= $\overline{PE}$. $\overline{PF}$= K



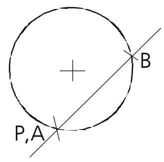
També és vàlid quan el punt P és al interior de la circumferència.

$\overline{PA}$. $\overline{PB}$.= K



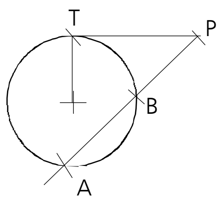
Si el punt P és un punt de la circumferència la potència val 0, ja que un dels segments (PA) val 0.

$\overline{PA}$. $\overline{PB}$.= 0



La potència d'una recta tangent, que es pot demostrar pel teorema del triangle rectangle de Pitàgores, val:

$\overline{PA}$. $\overline{PB}$.= $\overline{PT}$ 2

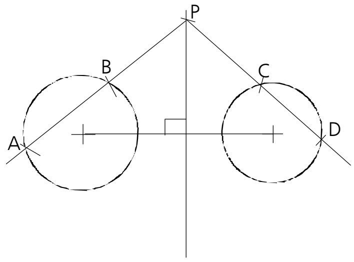


Les aplicacions directes que té la potència ajuden a resoldre problemes de proporcionalitat, ja vistos en el tema corresponent, com són la determinació gràfica de la mitjana proporcional (pel teorema del catet i de l'altura), la secció àuria d'un segment, la construcció d'un segment auri, i la construcció d'un segment donat el seu segment auri. Les demostracions matemàtiques de les quals es poden resoldre aplicant el principi de potència.

Però la potència és fonamental pel tema de tangències perquè hi ha una sèrie de problemes que també cal resoldre aplicant aquesta propietat.

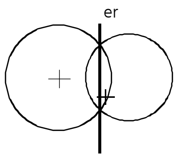
2.2.- Eix radical.

L'eix radical de dues circumferències és el lloc geomètric dels punts del pla que tenen **igual** potència respecte a dues circumferències. Tots els punts de l'eix radical compleixen aquesta propietat.
Aquest eix sempre serà perpendicular a la recta que uneix els centres d'ambdues circumferències

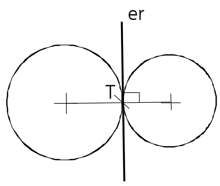


Per dibuixar l'eix radical de dues circumferències cal tenir en compte la seva posició relativa:

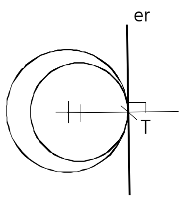
.- Circumferències secants
unir els dos punts d'intersecció M i N els quals tenen la mateixa potència respecte a ambdues circumferències, ja que hi pertanyen.



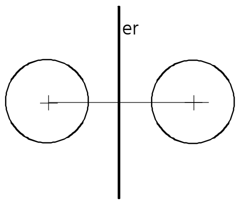
.- Circumferències tangents exteriors.
l'eix ha de passar pel punt T, comú a ambdues circumferències i serà perpendicular a la recta que uneix els centres



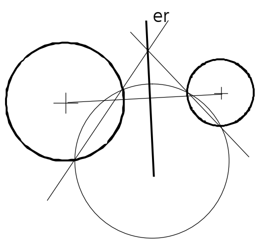
.- Circumferències tangents interiors.
.- l'eix ha de passar pel punt T, comú a ambdues circumferències i serà perpendicular a la recta que uneix els centres.



.- Circumferències exteriors de mateix radi.
.- l'eix serà perpendicular a la recta que uneix els centres i passarà pel punt mig (mediatriu).

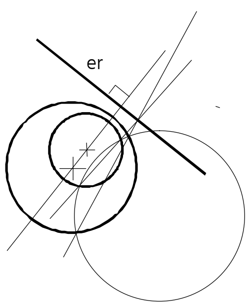


.- Circumferències exteriors de diferent radi.
.- cal traçar una circumferència auxiliar que talli a les dues donades per buscar els eixos radicals d'aquesta amb cadascuna de les dades.
.- el punt d'intersecció dels dos eixos auxiliars servirà per fer passar l'eix solució que a més serà perpendicular a la recta que uneix els centres de les dades.



.- Circumferències interiors.
.- cal traçar una circumferència auxiliar que talli a les dues donades per buscar els eixos radicals d'aquesta amb cadascuna de les dades.

.- el punt d'intersecció dels dos eixos auxiliars servirà per fer passar l'eix solució que a més serà perpendicular a la recta que uneix els centres de les dades.

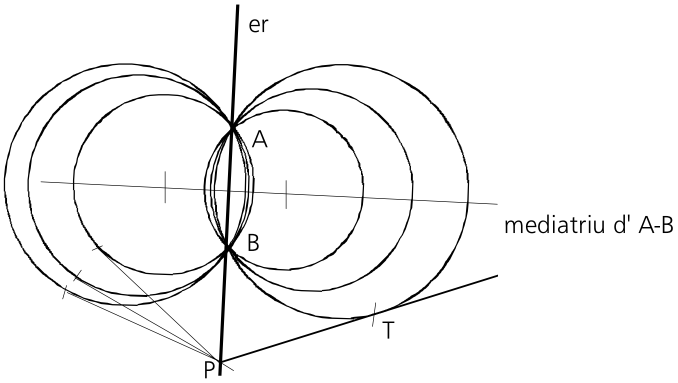


2.3.- Circumferències corradicals

Les circumferències corradicals són les que tenen un eix radical comú. Els seus centres han d'estar sobre una mateixa recta perpendicular a aquest eix radical, com és la mediatriu de dos punts que tinguin en comú les circumferències corradicals (recta dels centres).

Per tant, es complirà el següent: si des d'un punt qualsevol de l'eix radical, P, es traça una recta tangent a qualsevol circumferència, la distància de P al punt de tangència – TP - serà la mateixa per a totes les circumferències.

Aplicació en tangències:
Segons aquesta propietat de les circumferències corradicals, es podrà dibuixar una circumferència corradical amb les circumferències solució, que encara no es coneixen, per tal de conèixer la distància TP, d'un punt de tangència a un punt de l'eix radical.

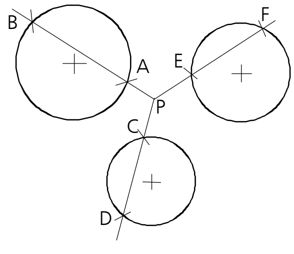


2.4.- Centre radical de tres circumferències

El centre radical de tres circumferències és un punt que te la mateixa potència respecte a tres circumferències.

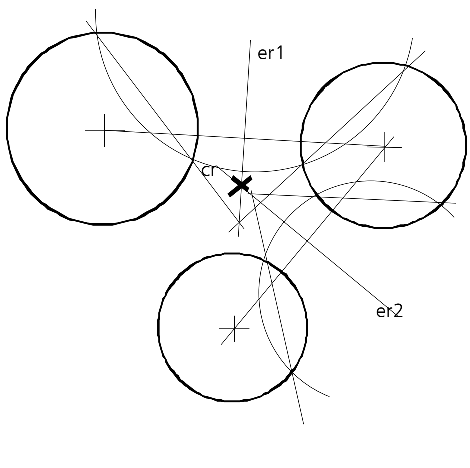
PA.PB = PC.PD = PE.PF

P = centre radical



El centre radical –es el punt on es tallen els eixos radicals dels parells de circumferències. Per determinar-lo, però, només cal dibuixar dos eixos de dos parells de circumferències, tenint en compte la seva posició relativa.

Aquest punt també ajuda a resoldre casos de tangències, ja que desde el centre radical es poden traçar tangents de igual dimensió per a tres circumferències. Només cal conèixer alguna de les circumferències, el centre radical (que es pot trobar mitjançant circumferències corradicals a les que es busquen) i la distància del centre radical al punt de tangència.



2.5.- Casos resolts aplicant potència.

Hi ha casos de tangències que només es poden resoldre aplicant les propietats desenvolupades en aquest apartat. Per poder-los resoldre caldrà fer el següent:

Aplicar i recordar els principis bàsics sobre tangències, per traçar-los en algun pas del problema:
.- distància entre els centres de circumferències tangents
.- recta tangent a circumferència per un punt d'aquesta
.- circumferència tangent a recta per un punt d'aquesta
.- circumferències que passen per dos punts: els seus centres es troben sobre la seva mediatriu
.- rectes tangents a circumferència per un punt exterior

Aplicar i recordar les propietats de eix i centre radical, per dibuixar-los en algun pas del problema:
.- procediments per trobar l'eix i el centre radical
.- recta tangent a dues circumferències des d'un punt del seu eix radical
.- circumferències corradicals: recta on situar els centres (mediatriu de dos punts comuns a totes elles)

Analitzar a fons el problema i fer un croquis a ma alçada de com han de ser les solucions, tenint en compte les dades donades.

Determinar quins elements es poden dibuixar ja d'entrada imprescindibles per poder traçar les solucions: línea on situar els centres (mediatriu de dos punts, perpendicular a una recta, alineant centre i punt de tangència, etc), eix radical de la dada amb una circumferència corradical amb la solució, etc

MÈTODE GENERAL: PASSOS A SEGUIR

1.- Determinar la recta sobre la qual situar els centres de les solucions:
.- mediatriu de dos punts
.- bisectriu d'un angle
.- perpendicular a recta r en T (punt de tangència donat)
.- perllongar la unió de centre O amb punt T.

2.- Buscar un punt M que tingui la mateixa potència respecte a la dada i les solucions, per trobar la distància de M a un punt de tangència T, mitjançant un o dos passos (base del problema):
.- un pas: ens donen T, cal buscar M
.- dos passos: caldrà buscar M i després T

per això caldrà fer algun o alguns d'aquests traçats:
.- dibuixar circumferència auxiliar que tingui les mateixes característiques que les solucions: que passi per A i B, que sigui tangent en el punt donat T, etc.
.- dibuixar l' eix radical de les solucions
.- dibuixar l'eix radical de la dada amb una auxiliar
.- dibuixar una circumferència auxiliar i una recta tangent
.- dibuixar el centre radical de la dada i auxiliar

3.- Tralladar la distància MT a una o més de les dades

4.- Determinar els centres i els punt de tangència fent perpendiculars a una recta des de T o bé unint centres amb punt T

5.- Dibuixar les solucions

Consultar dossier de classe per a cada cas particular.