PROVA DE SELECCIÓ. 22 de maig de 2004
SEGONA PART DE LA PROVA

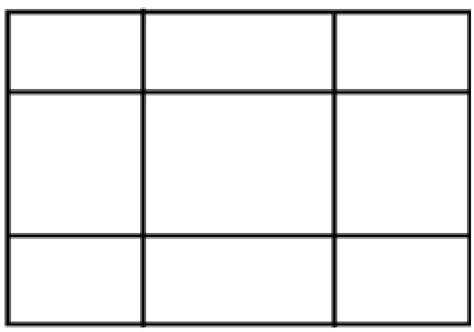
Problema 1

Al problema 1 de la primera part de la prova has estudiat la situació que es dóna quan un rectangle gran es divideix en quatre rectangles més petits per línies rectes paral·leles als costats, i coneixes les àrees de tres rectangles petits.

A. Creus que podries proposar un problema similar posant com a valors de les àrees de tres rectangles petits tres nombres positius qualssevol? Per què?

B. Quines condicions haurien de complir tres nombres enters (sense decimals) que poguessin ser els valors de les tres àrees donades, de manera que els costats de tots els rectangles siguin nombres enters?

C. Ara imagina que tens un rectangle dividit en nou rectangles més petits, de manera semblant al que hem vist abans. Coneixent algunes de les àrees dels rectangles petits, ja es poden determinar totes, és a dir, no totes les 9 àrees poden tenir valors fixats independentment.



Quin és el màxim nombre d'àrees de rectangles petits a les quals podries posar valors arbitraris (els que vulguis, enters o no) i quins haurien de ser aquests rectangles, de manera que a partir d'aquestes àrees ja es poguessin trobar totes les altres i que cadascuna només pogués tenir un valor?

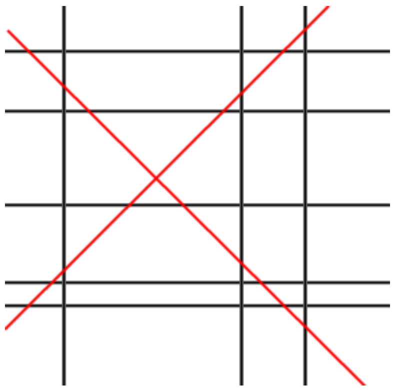
Problema 2

Al problema 2 de la primera part de la prova, has estudiat el nombre de regions que es creen en el pla quan es dibuixen un conjunt de rectes horitzontals i verticals.

A. Si sabessis el nombre de rectes “verticals” i el nombre de rectes “horitzontals” que s’han dibuixat, explica com podries calcular el nombre de regions que es formen.

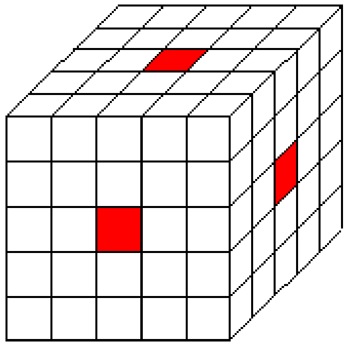
B. Explica com es pot saber el nombre de regions que hi haurà si, a més de les anteriors, dibuixes una altra línia recta “inclinada” que no passa per cap dels punts on es tallen les altres rectes.

C. Si ara dibuixes una altra línia recta inclinada que no sigui paral·lela a cap de les anteriors, i que no passi per cap dels punts on es tallen les altres rectes (com en el dibuix), explica com podries calcular el nombre de regions que hi haurà en total.



Problema 3

Al problema 3 de la primera part de la prova has estudiat el nombre de cubs petits que queden al treure'n alguns, així com la superfície exterior de la figura que tornem a reproduir:



A. Si el cub gran inicial, en comptes de ser de 5 x 5 x 5, fos de 33 x 33 x 33 cubs petits, quants cubs quedarien després de treure tres fileres centrals com les assenyalades en el dibuix? Explica també com trobaries el nombre de cubs petits que quedarien si cada costat del cub gran estigués format per un nombre senar (imparell) qualsevol de cubs petits.

B. Si es submergeix la figura en un pot de pintura, quants cubs petits quedaran amb tres cares pintades? Explica quins seran.

C. Si es submergeix la figura en un pot de pintura, quina és la superfície total que quedarà pintada en el cas del cub de 5 x 5 x 5? Explica com ho calcularies en general.

Problema 4

Al problema 4 de la primera part de la prova has estudiat les matrícules actuals dels cotxes. Recorda que fan servir una combinació de quatre números (des del 0000 al 9999) i tres lletres (des de BBB a ZZZ). Per diferents raons només es fan servir aquestes 20 lletres: B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N, P, R, S, T, V, W, X, Y, Z.

A. Els nombres com ara el 1221, que es llegeixen igual d'esquerra a dreta que de dreta a esquerra, s'anomenen cap-i-cues. Quantes matrícules amb nombres cap-i-cues hi haurà? Pot ser que algun cap-i-cua de 4 xifres sigui un nombre primer? Explica com has trobat les respostes.

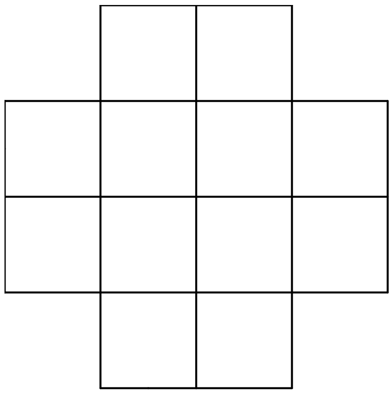
B. Quantes matrícules acabaran amb la lletra X? Quantes matrícules contindran la lletra X? Explica com has trobat les respostes.

C. Quantes matrícules diferents hi ha entre 9222 DJT i 0123 HMM? Explica com has trobat la resposta. (Per calcular el nombre de matrícules has de saber quin ordre segueixen: per exemple, després de 9222 DJT ve 9223 DJT; després de 9999 DJT ve 0000 DJV; després de 9999 DJZ ve 0000 DKB i després de 9999 DZZ ve 0000 FBB).

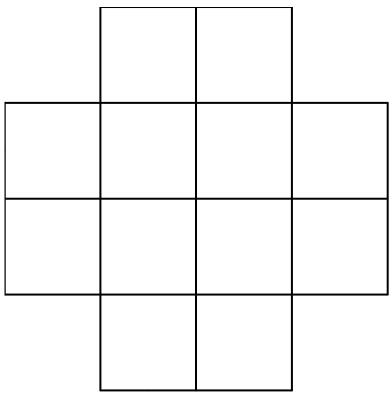
Problema 5

Al problema 5 de la primera part de la prova has estudiat els recorreguts d'un cavall del joc dels escacs en un tauler de 3 x 3. Ara estudiarem recorreguts d'un cavall en altres taulers diferents.

A. És possible ocupar totes les caselles de la figura següent fent salts amb un cavall del joc d'escacs i de manera que cada casella només s'ocupi una vegada. Troba diferents solucions i explica què tenen en comú. (Reprodueix una figura com la del tauler al full de respostes i llavors pots posar els successius nombres, 1, 2, 3,.... a dins de les caselles per indicar l'ordre que seguirà el cavall per aconseguir l'objectiu).



B. Com ha de ser el recorregut si, a més, volem que sigui tancat, és a dir, de manera que quan arribem a l'última casella puguem, seguint el salt del cavall, tornar a la primera? Explica com l'has trobat. Hi haurà més d'una solució?



C. Ara el tauler és un quadrat de 5 x 5 com el de la figura. Sabries trobar un recorregut d'un cavall que passés per totes les caselles, sense ocupar-ne cap dues vegades? Explica com ho has fet.