

PRENDRE DECISIONS AMB LA χ^2

Bibliografia: SPIEGEL, Murray R.; STEPHENS, Larry, J. **Estadística**. Serie Schaum. Editorial Mc Graw Hill. Any 2002. [Teniu aquest llibre a la biblioteca del centre.] Per a més detalls, consulteu capítol 12 ***La prueba chi-cuadrada***.

Suposem que el 35% dels alumnes de Catalunya tenen el cabell ros, el 50% el tenen fosc i el 15% restant són pelrojos.

Si agaféssim una mostra de 80 alumnes del nostre IES triats aleatòriament, quants esperaríem que sortissin de cada tipus? Com que la mostra té 80 alumnes, seria d'esperar que hi hagués 35% de 80= 28 rossos, 50% de 80= 40 amb cabell fosc i 15% de 80=12 pelrojos. Òbviament això no vol dir que si triem 80 alumnes ens hagin de sortir exactament 28 rossos, 40 amb cabell fosc i 12 pelrojos, però si les nostres observacions han de ser compatibles amb l'estudi a nivell de tota Catalunya, els resultats haurien de ser semblants.

Imaginem-nos que en la mostra particular dels 80 alumnes del nostre IES tenim 25 rossos, 46 amb cabell fosc i 9 pelrojos.

Com podem tenir un criteri que ens digui si els resultats de la nostra mostra són compatibles amb la predicció teòrica esperada? Vegem-ho:

Primer, podríem organitzar la informació així:

Tipus de cabell	Freqüència <u>esperada</u> e_i teòrica (a nivell de Catalunya)	Freqüència <u>observada</u> o_i (a nivell del nostre IES)
Ros	28	25
Color fosc	40	46
Pelroig	12	9
Totals	80	80

Ara, per a cada tipus de cabell, calcularem la quantitat següent (després col·locarem la nova columna a la dreta en la taula anterior):

$$\left(\frac{o_i - e_i}{e_i} \right)^2 \cdot e_i = \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

la quantitat anterior és el quadrat de la diferència entre l'observat i l'esperat relativa a l'esperat, sopesat per la freqüència esperada (és més difícil dir-ho en paraules que escriure-ho!).

Està clar que, com més gran sigui aquesta quantitat, més diferència hi ha entre la freqüència observada i l'esperada (si es volgués que l'esperat i l'observat fossin iguals, aquesta quantitat hauria de ser 0).

Si ampliem la taula anterior afegint la columna esmentada tindríem:

Tipus de cabell	Freqüència <u>esperada</u> e_i teòrica (a nivell de Catalunya)	Freqüència <u>observada</u> o_i (a nivell del nostre IES)	$(o_i - e_i)^2 / e_i$
Ros	28	25	0,32142857
Color fosc	40	46	0,9
Pelroig	12	9	0,75
Totals	80	80	1,9714286

← χ^2

[Aquests càlculs es poden fer a mà o amb un full de càlcul com Excel.]

La quantitat χ^2 s'anomena **ji-quadrada (ji-quadrada observada)**, podríem dir-li). Dir-li “ji-quadrada” està bé, ja que com que és sempre positiva, va molt bé dir-li “quadrada” perquè els quadrats dels nombres reals són sempre positius (com la χ^2).

Com més gran és la χ^2 (ji-quadrada observada), més s'allunyen les nostres observacions de les esperades (i, per tant, pitjor és la concordància amb el model esperat).

La χ^2 s'ha calculat, doncs, amb a fórmula següent:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad (k \text{ és el nombre de categories, } k=3 \text{ en el nostre cas})$$

Resulta que hi ha un “tope” que, si la χ^2 sobrepassa, ens faria dir que les quantitats observades s'allunyen massa de les esperades. Aquest “tope”, que s'anomena χ_e^2 (**ji-quadrada esperada**) o χ_c^2 (**ji-quadrada crítica**) depèn de dues coses: del nombre de **graus de llibertat** i del **nivell de confiança** amb què es treballa.

Aquí no entrarem en molt de detall perquè s'escapa del nivell que correspon a 2n de BTX, no obstant comentarem que:

- En l'exemple anterior, en què el cabell dels alumnes podia tenir 3 valors diferents (ros, fosc o pelroig), és a dir, hi havia $k=3$ categories, el nombre de graus de llibertat és $3-1=2$ (normalment **el nombre de graus de llibertat v** = $k-1$, o sigui, és el nombre de categories menys 1 –consulteu la bibliografia per a més detalls i altres casos–).
- El nivell de confiança és una quantitat en tant per un o en tant per cent que es fixa prèviament. Normalment el **nivell de confiança** amb què es el 0,95, és a dir, el 95%.

En el nostre cas, la χ_e^2 (**ji-quadrada esperada**) o χ_c^2 (**ji-quadrada crítica**) per a dos graus de llibertat i un nivell de confiança del 95% val:

$$\chi_e^2 = 5,99$$

(els valors esperats –crítics– per a casos diferents es poden consultar en taules que porten els llibres d'estadística (a la seva part final) o usant la funció d'Excel

PRUEBA.CHI.INV(probabilitat;graus_de_llibertat)

Si useu aquesta funció d'Excel, en *probabilitat* heu de posar el que s'anomena **nivell de significació** en tant per un. Cal tenir en compte que

nivell de significació = 1 – nivell de confiança

Si treballem amb un nivell de confiança de 0,95 (95%) el nivell de significació serà del 0,05 (5%), o sigui, que, per trobar la χ_e^2 que estem buscant hauríem d'escriure a l'Excel en alguna casella:

=PRUEBA.CHI.INV(0,05;2)

a la casella veuríem que apareix el valor 5,99147636, que és el 5,99 que havíem obtingut abans mirant les taules del final dels llibres d'estadística.

El fet que $\chi_e^2 = 5,99$ significa que en un 95% dels casos la χ^2 d'un problema qualsevol amb 2 graus de llibertat tindrà un valor inferior a $\chi_e^2 = 5,99$. El 5% restant correspondria a casos en què la χ^2 sortiria major que $\chi_e^2 = 5,99$ i significaria que les nostres observacions estarien “massa” llunyanes en comparació a les esperades.

Si tornem al nostre exemple concret podem decidir que:

A un nivell de confiança del 95%, per als nostres 2 graus de llibertat, com que la nostra $\chi^2=1,9714286$ és menor que la $\chi_e^2=5,99$, podem dir que les nostres observacions són compatibles amb la hipòtesi inicial que el 35% dels alumnes de Catalunya tenen el cabell ros, el 50% el tenen fosc i el 15% restant són peljocs (és a dir, no n'estem massa allunyats).

Si hagués sortit que la nostra χ^2 fos superior a $\chi_e^2=5,99$ hauríem d'haver dit que les nostres observacions no serien compatibles amb la hipòtesi inicial (al nivell de confiança del 95%), el que significaria que el nostre IES és un cas molt rar (o bé que la hipòtesi dels percentatges esmentats al principi a nivell de Catalunya no és correcta).

En resum, comparar la χ^2 del nostre problema amb χ_e^2 (esperada) ens ha ajudat a decidir si les nostres observacions quadren amb la hipòtesi inicial al nivell de confiança del 95%.

Exercici 1:

Es llança un dau 48 vegades. Surten 8 uns, 7 dosos, 16 tresos, 9 quatsres, 3 cincs i 5 sisos. Usant la prova χ^2 a un nivell de confiança del 95%, determina si el dau és normal, és a dir, si el dau no està trucat.

[Suggeriments: tingues en compte que dir que el dau és normal significa que la probabilitat que surti cada número és igual per a tots els casos. Llavors és fàcil saber en quants casos s'esperaria que sortís un 1, en quants que sortís un 2, en quants que sortís un 3, etc. Tingues en compte també a l'hora de buscar la χ_e^2 corresponent, quin és el nombre de graus de llibertat d'aquest problema.]

Exercici 2:

S'encarrega a una persona que dissenyi una moneda que estigui trucada, de manera que, en teoria, la probabilitat que surti cara és d'un 70%, mentre que la de sortir creu és d'un 30%. S'agafa aquesta moneda i se tira 200 vegades. S'observa que surten 125 cares i 75 creus.

- a) Determina si el que s'ha observat quadra amb la hipòtesi inicial treballant a un nivell de confiança del 95%.
- b) El resultat observat seria compatible amb la hipòtesi inicial treballant al 99% de nivell de confiança?
- c) El resultat observat seria compatible amb una hipòtesi que suposés que sortirien un 60% de cares i un 40% de creus treballant al 95% de nivell de confiança?