

Matemàtiques. 2n de BTX.

Derivació de funcions compostes. Regla de la cadena.

Tots sabem que si $f(x)=\sin x$ llavors $f'(x)=\cos x$. Però ¿què passa amb la derivada si tenim una funció que no és una funció elemental, és a dir, que és una funció composta, com per exemple $f(x)=\sin(5x^3-4x^2-7x+1)$?

Aquesta funció és la composició de dues funcions: una que porta la x a $5x^3-4x^2-7x+1$ (la podríem representar per $f_1(x)=5x^3-4x^2-7x+1$) i l'altra que porta el resultat al seu sinus (la podríem representar per $f_2(x)=\sin x$), és a dir, $f(x)=(f_2 \circ f_1)(x)$.

Per calcular la derivada de $f(x)=\sin(5x^3-4x^2-7x+1)$ tindrem en compte que la nostra funció és un sinus d'alguna cosa i, per tant, la derivada de sinus és cosinus, però com que l'argument del sinus no és una x sinó que és una altra funció ($5x^3-4x^2-7x+1$), a la derivada (el cosinus) se li ha d'afegir a la dreta multiplicant la derivada de la funció $5x^3-4x^2-7x+1$, que és $15x^2-8x-7$, per tant,

$$\text{Si } f(x)=\sin(5x^3-4x^2-7x+1) \rightarrow f'(x)=\cos(5x^3-4x^2-7x+1) \cdot (15x^2-8x-7)$$

Com acabem de veure el procés no és gens complicat (només cal anar afegint a la dreta multiplicant la derivada dels arguments que ens anem trobant).

Vegem a continuació altres exemples (el primer és una mica més llarg que l'exemple anterior perquè la nostra funció és composició de tres funcions).

a) $f(x)=\cos(5x-2)^4 \rightarrow f'(x)=4 \cdot \cos(5x-2)^3 \cdot [-\sin(5x-2)] \cdot 5 = \text{operem...} = -20 \cdot \cos(5x-2)^3 \cdot \sin(5x-2)$

b) $f(x)=3 \cdot \ln(2x^3-9x+4) \rightarrow f'(x)=3 \cdot \frac{1}{2x^3-9x+4} \cdot (6x^2-9) = \frac{3(6x^2-9)}{2x^3-9x+4}$

c) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{2x-4}{3x-5}\right) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x-4}{3x-5}\right)} \left[\frac{2 \cdot (3x-5) - (2x-4) \cdot 3}{(3x-5)^2} \right] = \text{operem...} =$
$$= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x-4}{3x-5}\right)} \left[\frac{6x-10-6x+12}{(3x-5)^2} \right] = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x-4}{3x-5}\right)} \cdot \frac{2}{(3x-5)^2} = \frac{2}{(3x-5)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2x-4}{3x-5}\right)}$$

d) $f(x)=5^{\sin(4x^2-7x-5)} \rightarrow f'(x)=5^{\sin(4x^2-7x-5)} \cdot \ln 5 \cdot \cos(4x^2-7x-5) \cdot (8x-7)$

Per practicar, refes-te els exercicis anteriors i comprova que et surten els resultats correctes.