

EXERCICI

Quan serà incompatible el següent sistema?

$$\begin{cases} 5x - 2y = k-6 \\ 4x + (k-1)y = 26 \\ -3x - 8y = -54 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & k-6 \\ 4 & k-1 & 26 \\ -3 & -8 & -54 \end{array} \right)$$

Perquè sigui incompatible caldrà que $\text{rang } A \neq \text{rang } A'$.

Observem que $\begin{matrix} c_1 & c_2 \\ F_1 & 5 & -2 \\ F_3 & -3 & -8 \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} = -40 - 6 = -46 \neq 0 \rightarrow \text{rang } A \geq 2$. Però

no pot ser 3, ja que A no té prou columnes $\rightarrow \boxed{\text{rang } A = 2}$ independentment del valor del paràmetre k.

Com que $\text{rang } A' \geq \text{rang } A \Rightarrow \text{rang } A' \geq 2$.

Com que $\text{rang } A = 2$, caldrà que $\text{rang } A' = 3$ perquè el sistema sigui incompatible. Això s'aconseguirà si el menor $|A'| \neq 0$.

$$|A'| \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -2 & k-6 \\ 4 & k-1 & 26 \\ -3 & -8 & -54 \end{vmatrix} = -270(k-1) - 32(k-6) + 156 + 3(k^2 - 7k + 6) -$$

$$-432 + 1040 = \dots = 3k^2 - 323k + 1244 \stackrel{?}{=} 0$$

Ara resol l'equació de 2n grau.

$$k = \frac{323 \pm \sqrt{(-323)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1244}}{2 \cdot 3} = \dots = \frac{311}{3}$$

Llavors, si $k = \frac{311}{3}$ o $k = 4 \rightarrow |A'| = 0$ (en aquest cas el rang $A' = 2$, i com que $\text{rang } A = 2$ i ním. d'incògnites $\text{h} = 2 \rightarrow \text{SCD}$).

Recordem que perquè el sistema sigui incompatible calia que $\text{rang } A' = 3$, ja que $\text{rang } A = 2$, i, per tant, calia que $|A'| \neq 0$. Això passa si $\boxed{k \neq \frac{311}{3} \text{ i } k \neq 4}$.