

## TEMA 6. FUNCIONS EXPONENCIAL I LOGARÍTMICA

*Observació: No hem tingut temps de veure aquest tema durant el curs i és un tema que no us explicaran amb detall en el futur, però sí us sortiran coses relatives a d'ell en qualsevol estudi universitari que feu, ja sigui de ciències (matemàtiques, estadística, físiques, químiques, qualsevol enginyeria...) o de lletres (psicologia -la part d'estadística-, etc.) per tant, us recomano que us el mireu si teniu unes estones lliures. Si trobeu dificultats potser us serà d'utilitat consultar el llibre de 2n de BUP, a la pàgina 245.*

### 1.- POTENCIACIÓ (INTRODUCCIÓ I REPÀS)

Recordem que tenim els següents convenis en matemàtiques:

- $a^m = a \cdot a \cdot \dots^{\text{m vegades}} \dots \cdot a$  ;  $a^0=1$  ; Ex.:  $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  ;  $3^0=1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$  ; Ex.:  $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$  ;  $x^{-8} = \frac{1}{x^8}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  ; Ex.:  $5^8 \cdot 5^3 = 5^{11}$  ;  $x^4 \cdot x^2 = x^6$  ;  $x^5 \cdot 3x^2 = 3x^7$  ;  $2 \cdot 2^x = 2^{1+x}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$  ; Ex.:  $5^8 / 5^3 = 5^5$  ;  $x^4 : x^2 = x^2$  ;  $\frac{x^5}{3x} = \frac{x^4}{3}$  ;  $2/2^x = 2^{1-x}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  ; Ex.:  $(3^2)^3 = 3^6$  ;  $(x^5)^2 = x^{10}$
- $\sqrt[m]{a} = n^{\circ}$  tal que multiplicat per sí mateix m vegades, dona "a", o sigui:  $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \dots^{\text{m}} \dots \sqrt[m]{a} = (\sqrt[m]{a})^m = a$   
Això permet, per exemple, treure nombres d'una arrel: Ex.:  $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3 \cdot \sqrt[3]{3^2}$  (això està explicat als apunts de radicals d'anys passats: es fa la descomposició factorial del 243 i es divideixen els possibles exponents que surtin -un 5 en aquest cas- entre l'índex de l'arrel -un 3 en aquest cas-: el quocient de la divisió em diu quants trossos surten fora -un tres només-, i el residu, els que es queden a dintre de l'arrel -dos trossos-).

Recordem que, també, quan un nombre entra dintre d'una arrel, el seu exponent es veu multiplicat per l'índex de l'arrel, com per ex.:

$$2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^{3+2}} = \sqrt[3]{2^5} \quad (\text{seria el procés contrari a extreure nombres d'una arrel}).$$

$$\cdot \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \text{Ex.: } \sqrt[7]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[28]{x}$$

$$\cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} ; \text{Ex.: } \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}} ; \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}} ; \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$$

Ex.: Calcula i expressa en forma de potència. Solució: Una forma de les múltiples formes de fer-ho seria descomponent els radicands expressant els radicals que queden com a potències. Com que en aquests cas particular surten potències de la mateixa base multiplicades, els exponents es poden multiplicar (es fa la suma dels exponents i finalment s'expressa el resultat de nou com a radical):

$$\sqrt[3]{128} \cdot \sqrt{16} = \sqrt[3]{2^7} \cdot \sqrt{2^4} = 2^{\frac{7}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{2}} = 2^{\frac{7}{3} + \frac{4}{2}} = 2^{\frac{35}{6} + \frac{12}{6}} = 2^{\frac{47}{6}} = \sqrt[6]{2^{47}}$$

$$\cdot (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m ; \text{Ex.: } (2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$$

$$\cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} ; \text{Ex.: } \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3} ; \left(\frac{3}{x}\right)^4 = \frac{3^4}{x^4} = \frac{81}{x^4} ; \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\cdot \sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} ; \text{Ex.: } \sqrt[4]{16x^8} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x^8} = 2x^2$$

A continuació entrem de ple en el tema que ens ocupa

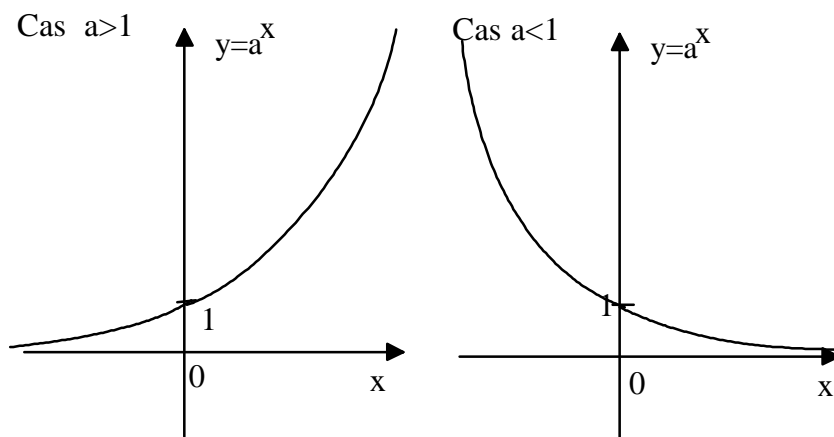
### 2.- LA FUNCIÓ EXPONENCIAL

#### 2.a.- DEFINICIÓ:

Donat un nombre real positiu "a", es defineix la **funció exponencial de base a** com  $f(x) = a^x$  o també  $y = a^x$ .

## 2.b.- REPRESENTACIÓ DE LA FUNCIÓ EXPONENCIAL

La forma d'aquesta funció exponencial és sempre molt semblant a un d'aquests dos casos (durant curs passats heu representat les funcions exponencials de base 2 i de base 1/2 -ho recordeu?-):



Per fer una representació d'una funció generalment es fa una taula de valors i es col·loquen els punts on correspon en el diagrama d'eixos. Per fer la taula de valors s'ha d'emprar la calculadora perquè faci les potències. La calculadora té una tecla simbolitzada generalment així:

$$\boxed{\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}}$$

Per calcular  $2^{10}$  premeríem a la calculadora el nº 2, després la tecla en qüestió i després el 10. Hauria de sortir 1024.

Per calcular  $3^{10}$  faríem el mateix i sortiria 59049.

Si l'exponent o la base tenen decimals, tampoc no hi ha problema, per exemple:  $10^{3,8}$  dona 6309,5734.

També es poden fer potències de base "e" (ja coneixeu aquest número, no? Ja se sap que no és tan famós com el nº  $\pi$ ). En aquest cas no cal que introduïm el valor del nº e, ja que hi ha una altra tecla especial que permet calcular els valors d'aquest tipus particular de funció exponencial, i és la tecla:

$$\boxed{\begin{matrix} x \\ e \end{matrix}}$$

Per exemple, el resultat de fer  $e^{-5}$  és  $6,737947 \cdot 10^{-3}$ . Això està expressat en notació científica. [Recordeu la notació científica? Potser en física ja l'heu utilitzat també. Per exemple, si us demanen treballar amb la càrrega de l'electró, haureu d'introduir a la calculadora la quantitat  $1,6 \cdot 10^{-19}$ . Hauríeu de fer el següent: posar 1,6 i després prémer la tecla E (o EXP en algunes calculadores) i després posar el -19.]

No heu de confondre treballar en notació científica amb la funció exponencial de base 10, que té també, com l'exponencial de base e, una tecla específica, que és la següent:

$$\boxed{\begin{matrix} x \\ 10 \end{matrix}}$$

i permet calcular, per exemple, el valor de  $10^{4,2}$ , que surt 15848,932.

Les calculadores també permeten calcular arrels de qualsevol índex, encara que sigui molt rar, com per exemple, l'arrel següent:

$\sqrt[3,8]{23} = 2,2821776$ . Això es pot fer amb una tecla especial que ve

simbolitzada per  $\boxed{\sqrt[x]{\quad}}$  o per  $\boxed{y^{\frac{1}{x}}}$ . Per practicar, podeu provar si us van sortint aquests resultats amb la calculadora.

Ja hem dit que en general, una funció exponencial de base  $a$ , té la forma  $y=a^x$ . Doncs, bé, heu de recordar que en el cas particular que la base sigui 10, la funció s'anomena funció exponencial de base 10:

**$y=10^x$  --> funció exponencial de base 10**

i quan la base és el  $n^o$  e, la funció s'anomena exponencial de base e:

**$y=e^x$  --> funció exponencial de base e.**

Com que ja teniu feta la representació de les funcions  $y=2^x$ ,  $y=0,5^x$  i  $y=e^x$ , mireu-les i comproveu que tenen la forma que s'indica en aquest apartat.

## 2.c.- PROPIETATS DE LA FUNCIO EXPONENCIAL

- Està definida per a tots els valors de  $x$  (el seu dom  $f = \mathbf{R}$ ).
- Sempre és positiva (per a qualsevol  $x$ ).
- Sempre és contínua.
- Sempre és injectiva (això vol dir que si  $y_1 = y_2 \rightarrow x_1 = x_2$ , o sigui, que si  $a^{x_1} = a^{x_2} \rightarrow x_1 = x_2$ , és a dir, que si els dos valors de la  $y$  són iguals és perquè els exponents són també els mateixos). Aquesta propietat serveix per resoldre alguns tipus d'equacions concrets, com per exemple: Resol l'equació:  $9^x = 3^2$  -->  $(3^2)^x = 3^2$  -->  $3^{2x} = 3^2$  -->  $2x=2$  -->  $x=1$ .
- Sempre valen 1 en  $x=0$  (és clar, ja que  $a^0 = 1$ ).
- En el cas que la base sigui  $a>1$ , llavors,  $a^x<1$  per a les  $x<0$  i  $a^x>1$  per a les  $x>0$ ; i a més a més la funció és sempre creixent.
- I en cas que la base sigui  $a<1$ , llavors,  $a^x>1$  per a les  $x<0$  i  $a^x<1$  per a les  $x>0$  (això es veu fàcilment als gràfics de les seves representacions); i a més a més, la funció sempre és decreixent.
- En el cas que la base sigui  $a>1$ , llavors,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  (vegeu les representacions).

· En el cas que la base sigui  $a<1$ , llavors,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  (vegeu les representacions).

- Exemples pràctic d'on pot sortir la funció exponencial:

Ex. 1.- Un bacteri es reproduïx per bipartició, és a dir, cada cert temps, es divideix en dos bacteris fills, i així successivament. Suposem que  $x$  representa el nombre d'interval de temps que van passant ( $x=1$  voldrà dir que ha passat un interval de temps,  $x=2$  voldrà dir que han passat dos interval de temps, etc.). Aleshores, el nombre de bacteris que hi haurà en haver transcorregut  $x$  interval de temps serà una potència de 2, ja que cada vegada, el nombre de bacteris es va multiplicant per 2, és a dir, ve representat per la funció exponencial de base dos,  $y=2^x$ . Si per exemple volem calcular quants bacteris hi haurà després d'haver transcorregut 1 interval de temps, 2 interval de temps, 3 interval de temps, ... o 10 interval de temps, podem fer els càlculs amb la calculadora. Us hauria de sortir això:

Inicial (han transcorregut $x=0$ intervals)	Per a $x=1$ intervals	Per a $x=2$ intervals	Per a $x=3$ intervals	...Per a $x$ intervals	Per a 10 intervals
1	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^x=y$	$2^{10}=1024$

Com es pot veure, el nombre de bacteris augmenta moltíssim en transcórrer el nombre d'interval de temps (és un típic cas de funció exponencial de base  $a>1$  -"explota", es fa molt gran de seguida-).

Ex. 2.- Una substància radioactiva es desintegra seguint la fórmula següent:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-t/1000}$$

En aquesta fórmula les lletres signifiquen el següent:

$N_t$  = nombre de partícules que queden en un instant  $t$ .

$N_0$  = nombre de partícules que hi havia en l'instant inicial (en  $t=0$ ).

$t$  = temps transcorregut comptat des de l'instant inicial (en segons).  
 Encara que no ho sembli, aquesta funció s'assembla a una funció exponencial. Les úniques coses que la diferencien d'ella són que com que hi ha el  $N_0$  multiplicat, no passa per  $y=1$  per a  $x=0$  (o sigui, no passa per  $N_t = 1$  per a  $t=0$  -com les funcions exponencials habituals-, passa per  $N_t = N_0$  per a  $t=0$ ); i com que l'exponent té un menys davant, s'assemblaria a una exponencial de base menor que 1 però amb exponent positiu (és a dir, és d'aquelles que s'aproxima a zero quan l'abscissa es va fent més i més gran).

Es tracta de calcular, amb ella, el nombre de partícules que queden després de transcórrer 1 hora, sabent que inicialment hi havia  $6,023 \cdot 10^{23}$  partícules; i després, de dir quin percentatge queda respecte al total inicial.

**Solució:** 1 h = 3600 s (hem de posar el temps en segons perquè ens ho deia qui ens havia donat la fórmula). Ara només cal substituir-hi:

$$N_{3600} = 6,023 \cdot 10^{23} \cdot e^{-3600/1000} = 6,023 \cdot 10^{23} \cdot e^{-3,6} =$$

$6,023 \cdot 10^{23} \cdot 0,0273237224 = 1,6457078 \cdot 10^{22}$  partícules queden  
 Per calcular el percentatge de les que queden respecte a l'original, haurem de dividir les partícules que queden entre les inicials, i multiplicar el resultat (que surt en tant per 1) per cent. Surt que queden només un 2,73 % partícules de les que hi havia inicialment (aproximadament).

## 2.d.- EQUACIONS EXPONENCIALS

Són equacions en què la incògnita apareix com a variable d'una exponencial. Les equacions amb una incògnita es resolten intentant modificar les expressions que ens apareixen de manera que ens quedi alguna cosa com  $a^{H_1} = a^{H_2}$ , ja que així podrem dir que  $H_1 = H_2$  i és quasi segur que es podrà resoldre l'equació. En altres casos la resolució es fa utilitzant un canvi de variable, és a dir, donant-li un nom a la

funció exponencial i tractant l'equació que queda en la nova variable com si fos una senzilla equació de 1r o 2n grau. El que és clar, és que s'han de dominar totes les propietats vistes fins ara per poder resoldre equacions d'aquest tipus.

Exemples: Resol:

Ex. 3.- Equació  $2^{5-x}=1$ . Solució: Com que podem escriure el nombre 1 com  $2^0$ , podem escriure l'equació inicial com a  $2^{5-x}=2^0$ , i per tant, si la base és la mateixa els exponents també hauran de ser els mateixos, és a dir,  $5-x=0$ , amb la qual cosa  $-x=-5$  i  $x=5$ .

Ex. 4.- Equació  $(4^{3-x})^{2-x}=1$  Solució: podem fer  $4^{(3-x)(2-x)}=1$ , i com que  $1=4^0$  ens quedaria  $4^{(3-x)(2-x)}=4^0$  i per tant  $(3-x)(2-x)=0$ , que és una equació de 2n grau que si la resolguem dona  $x_1=3$  i  $x_2=2$ .

Ex. 5.- Equació  $3^x=9^{x^2-3}$ . Solució: Busquem alguna cosa com  $3^{H_1}=3^{H_2}$ . Si aprofitem que el  $9=3^2$ , l'equació inicial la podem escriure com  $3^x=(3^2)^{x^2-3}$ , i llavors  $3^x=3^{2x^2-6}$ , i per tant,  $x=2x^2-6$ , que és una equació de 2n grau que si la resolguem dona  $x_1=2$  i  $x_2=-3/2$ .

Ex. 6.- Equació  $10^{3-x}=1$ . Solució:  $x=3$  [Suggeriment: com el 3]

Ex. 7.- Equació  $5^{x^2-3}=25$ . Solució:  $x=\pm\sqrt{5}$ . [Sugger.: com el 5]

Ex. 8.- Equació:  $\sqrt[3]{5}=125$ . Solució: Aprofitem que  $\sqrt[m]{A}=A^{\frac{1}{m}}$  i llavors ens queda  $5^{\frac{1}{x}}=125$ . Si descomponem factorialment el 125 és  $5^3$ , i per tant, l'equació ens queda  $5^{\frac{1}{x}}=5^3$ . Per tant,  $\frac{1}{x}=3 \rightarrow x=\frac{1}{3}$ .

Ex. 9.- Equació:  $\sqrt{x^2} = 81$  . Solució:  $x = \pm \frac{1}{2}$  . [Sugg. com el 8]

Ex. 10.- Equació:  $\sqrt[3]{2^{5x}} = 2 \cdot 4^x$  . Solució:  $x = -3$  [Suggeriments: el 4 descompondre'l com  $2^2$  i després tenir en compte que al 2n membre quedarà  $2^{1+2x}$ . Com que el primer membre es pot expressar com  $2^{\frac{5x}{3}}$ , després l'exercici es conclouria igualant els exponents que tenen els dosos del primer membre i del 2n membre.]

Ex. 11.- Equació:  $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$  . Solució: L'equació la podem anar transformant així:  $5^{2x-1} = \sqrt[3]{(5^2)^{x^2-\frac{1}{4}}} \rightarrow$   
 $\rightarrow 5^{2x-1} = (5)^{\frac{2 \cdot (x^2-\frac{1}{4})}{3}} \rightarrow 2x-1 = \frac{2 \cdot (x^2-\frac{1}{4})}{3} \rightarrow$  Això ja és una equació que s'arregla, queda de 2n grau, s'aplica la fórmula i surten com a solucions  $x_1 = 5/2$  i  $x_2 = 1/2$  .

A continuació exposem alguns exercicis que es resolen amb canvi de variable:

Ex. 12.- Equació:  $3^x + 5 \cdot 3^x = 486$  . Solució: Fem un canvi de variable i li diem  $z = 3^x$  . Llavors, l'equació inicial quedaria  $z + 5z = 486$ , que és una equació de 1r grau en  $z$ , que té fàcil solució. Surt  $z = 81$ . Per tant, si  $z = 81$ , com que  $z = 3^x$  estem dient que  $3^x = 81$  . Ara es podria descompondre el 81 factorialment ( $81 = 3^4$ ) i substituir-hi en l'equació anterior, quedant  $3^x = 3^4$ , que té com a solució  $x = 4$ .

Ex. 13.- Equació:  $2^{x-1} - 9 \cdot 2^{x+3} + 143 = 0$ . Solució: L'equació anterior la podem anar transformant així:  $2^x \cdot 2^{-1} - 9 \cdot 2^x \cdot 2^3 + 143 = 0$ . Ara fem el canvi de variable següent: A  $2^x$  li diem  $z$ , o sigui,  $z = 2^x$ . L'equació que

teníem ens quedaria  $z \cdot 2^{-1} - 9 \cdot z \cdot 2^3 + 143 = 0$ , que arreglada seria  $\frac{z}{2} - 72z + 143 = 0$ . Això és una eq. de 1r grau que dona  $z = 2$ , i per tant, com que  $z = 2^x$ , serà  $2^x = 2$ , i llavors  $x = 1$  (ja que l'exponent d'un dos solt és 1 encara que no es posi).

Ex. 14.- Equació:  $2^{2x} + 2^{2x+1} + 2^{2(x-1)} + 2^{2x-3} + 2^{2(x-2)} = 3520$  . Solució:  $x = 5$ . [Suggeriment: com el 13].

Ex. 15.- Equació:  $2^x + 4^x = 272$  . Com que  $4 = 2^2$ , quedarà  $2^x + (2^2)^x = 272 \rightarrow 2^x + 2^{2x} = 272$  . Ara fem el canvi  $z = 2^x$  i queda:  $z + z^2 = 272$ , que és una eq. de 2n grau que si es resol bé surt  $z_1 = 16$  i  $z_2 = -17$ .

- si  $z_1 = 16$ , com que  $z = 2^x$  tindrem que  $2^x = 16$ , i com que  $16 = 2^4$ , si comparem els exponents, queda que  $x_1 = 4$ .
- si  $z_2 = -17$ , com que  $z = 2^x$  tindrem que  $2^x = -17$ , la qual cosa és impossible, ja que l'exponencial  $2^x$  (com totes) no pot ser mai negativa (sempre és positiva), i per tant, d'aquí no surt altra solució.

En resum, en aquest exercici només hi ha una solució vàlida, que és  $x = 4$ .

Ex. 16.- Equació:  $9^x - 7 \cdot 3^x = 18$  . Podem començar expressant el 9 com  $3^2$  i així quedaria:  $3^{2x} - 7 \cdot 3^x = 18$ . Ara fem el canvi de variable  $z = 3^x$  i quedaria  $z^2 - 7z = 18$  . Això és una eq. de 2n grau que si es resol bé surt  $z_1 = 9$  i  $z_2 = -2$ . Llavors,

- si  $z_1 = 9$ , com que  $z = 3^x$ ,  $9 = 3^2$ , per tant,  $3^2 = 3^x$  i llavors,  $x_1 = 2$ ;
- si  $z_2 = -2$ , com que  $z = 3^x$ ,  $-2 = 3^x$ , que no té solució, ja que l'exponencial  $3^x$ , com totes, és una funció sempre positiva i no podrà donar mai  $-2$ .

Per tant, en aquest exercici l'única solució vàlida és  $x = 2$ .

Ex. 17.- Equació:  $2^{x+3} + 2^{2x+2} = 320$  . Anem transformant l'equació així:

$2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^2 = 320 \rightarrow 2^x \cdot 8 + 2^{2x} \cdot 4 = 320$  Ara fem el canvi de variable  $z=2^x$  i ens queda  $z \cdot 8 + z^2 \cdot 4 = 320$ , que és una equació de 2n grau que si es resol bé surt  $z_1=8$  i  $z_2=-10$ .

- si  $z_1=8$ , com que  $z=2^x$  tenim que  $2^x=8$  i com que  $8=2^3$  serà  $2^x=2^3$ , amb la qual cosa  $x=3$ .
- si  $z_2=-10$ , com que  $z=2^x$  tenim que  $2^x=-10$ , que no té equació, ja que l'exponencial  $2^x$  (com totes les exponencials) ha de ser sempre positiva. Per tant, en aquest exercici l'única solució vàlida és  $x=3$ .

Ex. 18.- Equació:  $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$ . Després d'arreglar algunes coses es podria fer el canvi de variable  $z=3^x$ . D'aquesta manera surt que  $z_1=3$  i  $z_2=\frac{1}{9}$ . Aleshores,

- si  $z_1=3$ , com que  $z=3^x$ , tenim que  $3^x=3$ , amb la qual cosa  $x_1=1$ .
- si  $z_2=\frac{1}{9}$ , com que  $z=3^x$ , tenim que  $3^x=\frac{1}{9}$ . Ara bé, com que podem expressar el  $\frac{1}{9}$  així  $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ , tindríem que  $3^x=3^{-2}$ , i llavors,  $x_2=-2$ .

Ex. 19.- Equació:  $3^x + 3^{1-x} = 4$ . Això es pot expressar com  $3^x + 3^1 \cdot 3^{-x} = 4$ , i això com  $3^x + 3 \cdot \frac{1}{3^x} = 4$ . Si anomenem  $z=3^x$ , ens quedaria això:  $z + \frac{3}{z} = 4$ . Aquesta equació es pot resoldre multiplicant-la tota per  $z$  perquè marxi la  $z$  del denominador del 2n sumand (és com reduir a comú denominador tota l'equació i tatxant les  $z$  dels denominadors iguals que surten). Quedaria, després de fer això,  $z^2 + 3 = 4z$ , que és una eq. de 2n grau, que, degudament resolta, dóna  $z_1=3$  i  $z_2=1$ . Per tant,

- si  $z_1=3$ , com que  $z=3^x$ , queda  $3^x=3$ , i per tant,  $x_1=1$ ;
- si  $z_2=1$ , com que  $z=3^x$ , queda  $3^x=1$ , i com que 1 es pot escriure com  $3^0$ , tindríem que  $3^x=3^0$ , i per tant,  $x=0$ .

### Sistemes d'equacions exponencials:

Ara que ja dominem una mica la resolució d'equacions exponencials, podem iniciar-nos en la resolució de sistemes d'equacions amb exponencials. En ells hem d'aplicar molts dels "trucs" emprats anteriorment, per tant, ja us els hauríeu de conèixer bé.

Exemples: Resol els següents sistemes d'equacions amb exponencials:

Ex. 20.- Sistema: 
$$\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$$
 Li farem els passos següents:

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 3^2 \\ 3^{2x-y} = 3^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 2 \\ 2x-y = 1 \end{cases}$$
 Aquest sistema ja es pot resoldre pel mètode que vulgueu (substitució, igualació o reducció). La seva solució és  $x=1$  ;  $y=1$ .

Ex. 21.- Sistema: 
$$\begin{cases} x+y = 11 \\ 3^x = 3^2 \cdot 3^y \end{cases}$$
 Li farem els passos següents:

$$\begin{cases} x+y = 11 \\ 3^x = 3^{2+y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y = 11 \\ x = 2+y \end{cases}$$
 Si arregleu el sistema i el resoleu us sortirà  $x=13/2$  i  $y=9/2$ 

Ex. 22.- Sistema: 
$$\begin{cases} 2^{3x} \cdot 2^y = 2^4 \\ 3^{2x-3} = 3^2 \cdot 3^{2-3y} \end{cases}$$
 La seva solució és  $x=5/7$  ;  $y=13/7$ .

Alguns dels sistemes convé resoldre'ls fent canvis de variable, com per exemple aquests:

Ex. 23.- Sistema:  $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$  Convé expressar-lo així:

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^y \cdot 6^1 = 807 \\ 15 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 6^y = 339 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ \frac{15}{5} \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases} \rightarrow \text{Ara, a la}$$

2a equació, tenint en compte que  $15/5=3$ , i si fem els canvis de variable

$$z=5^x \quad i \quad t=6^y, \text{ el sistema ens quedaria: } \begin{cases} 3z + 12t = 807 \\ 3z - 6t = 339 \end{cases}, \text{ que es}$$

pot simplificar i resoldre pel mètode que vulgueu. El resultat és que  $z=125$  i  $t=36$ , llavors, com que

·  $z=125$  i  $z=5^x$ , serà  $125=5^x$ , i com que  $125=5^3 \rightarrow 5^3=5^x \rightarrow x=3$

·  $t=36$  i  $t=6^y$ , serà  $36=6^y$ , i com que  $36=6^2 \rightarrow 6^2=6^y \rightarrow y=2$ .

Ex. 24.- Sistema:  $\begin{cases} 5 \cdot 2^x - 13 \cdot 3^{y-1} = -107 \\ 8 \cdot 2^{x-2} + 2 \cdot 3^{y+2} = 490 \end{cases}$  Solució:  $x=1$  ;  $y=3$ .

### 3.- LA FUNCIÓ LOGARISME

Introducció: Recordeu que la funció inversa (o recíproca) de l'arrel quadrada és la potència que eleva a 2? I recordeu que la funció inversa del sinus d'un angle és l'arcsinus? Hi ha moltes funcions que tenen funció inversa. La funció exponencial també la seva funció inversa és una funció que s'anomena funció logaritme.

#### 3.a.- DEFINICIÓ

Es defineix el logaritme d'un nombre positiu **x** en una base **a** (major que zero) com l'exponent **y** al qual s'ha d'eleva la base **a** per obtenir el nombre **x**, és a dir,

Si en fer el logaritme en base **a** de **x** surt **y** és perquè **a** elevat a **y** dona **x**.

O expressat en llenguatge matemàtic,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Recordeu que  $\log_a x$  es llegeix així: "logaritme en base a de x".

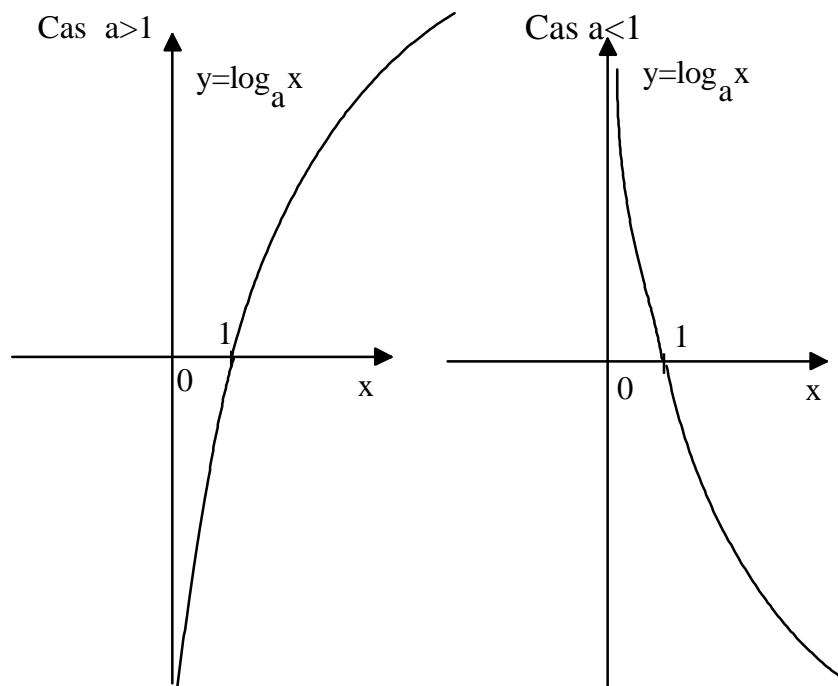
De la mateixa manera que teníem exponencials molt particulars que corresponien a treballar en base 10 (exponencial de base 10) o en base "e" (exponencial de base "e"), també hi ha logaritmes en bases concretes. Així doncs,

·  $\log_{10} x$  = logaritme decimal (logaritme en base 10) de x. Hem de destacar que quan es treballa en base 10 moltes vegades no s'indica la base (se sobreentén), és a dir, se simbolitza per  $\log x$  (i tothom entén que es vol dir  $\log_{10} x$ ).

·  $\log_e x$  = logaritme en base e de x. Hem de destacar que quan es treballa en base e aquest logaritme també se simbolitza amb moltíssima freqüència així **ln x** o bé **L x** (que vol dir **logaritme neperià de x**, en honor al matemàtic que el va estudiar -un senyor que es deia Néper-).

#### 3.b.- REPRESENTACIÓ DE LA FUNCIÓ LOGARISME

De la mateixa manera que teníem dos casos a l'hora de representar les funcions exponencials, segons que la base a fos major o menor que 1, aquí, a l'hora de representar la funció logarisme, resulta que les formes de les funcions també depenen d'aquest fet; tant és així que:



Naturalment, per fer la representació gràfica hem hagut d'utilitzar la calculadora. Aquesta té unes tecles especials que permeten calcular els logaritmes decimals ( $\log_{10} x$ ) i els logaritmes neperians ( $\ln x$ ). Intenteu localitzar-les. Si voleu practicar, podeu calcular els logaritmes següents:

- $\log 5,3 = 0,7242$ . Què està fent aquí la calculadora realment? Com que està buscant el  $\log_{10} 5,3$ , està buscant l'exponent al qual s'hauria d'eleva la base (10) perquè sortís 5,3. El troba i ens diu que aquest exponent hauria de ser 0,7242, és a dir, que si es fa  $10^{0,7242} = 5,3$ .
- $\ln 0,38 = -0,9676$ . Què està fent aquí la calculadora realment? Com que està buscant el logaritme neperià de 0,38, és a dir, busca el  $\log_e 0,38$ , està buscant l'exponent al qual s'hauria d'eleva la base (e)

perquè sortís 0,38. El troba i ens diu que aquest exponent hauria de ser -0,9676, és a dir, que si fem  $e^{-0,9676} = 0,38$ .

- Un altre exemple senzill és  $\log 1000$  (naturalment, si no s'indica res és en base 10). Hauria de sortir 3, ja que  $10^3 = 1000$ . Feu-ho!

Ara ja podríeu fer una representació, fent primer una taula de valors, de les funcions  $y = \log x$  i  $y = \ln x$  per veure si efectivament tenen la forma que us hem avançat abans. Us adonareu que no podem calcular logaritmes de nombres negatius o zero (o sigui, el domini de la funció logaritme és  $\text{dom} f = ]0, +\infty[$ , ja que això equivaldria a dir que la base elevada a l'exponent dóna un nombre negatiu (cosa que ja sabem de les funcions exponencials que és impossible).

Si anéssiu agafant valors  $x=0,1$ ;  $x=0,2$ ;  $x=0,3$ ; ... ;  $x=1$ ;  $x=1,1$ ; ... ;  $x=2$ ; ... observariu les propietats següents:

### 3.c.- PROPIETATS DE LA FUNCIO LOGARISME

(Mireu les gràfiques dibuixades abans)

- Està definida només per a  $x > 0$ , és a dir, el seu domini és  $]0, +\infty[$ .
- És contínua en tot l'interval en què està definida.
- És injectiva, és a dir, si  $y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$ , o més clarament, si  $\log_a x_1 = \log_a x_2 \implies x_1 = x_2$ .
- Val 0 per a  $x=1$  (o sigui,  $\log_a 1 = 0$ , ja que l'exponent "y" al qual s'ha d'eleva la base "a" perquè doni "1" és 0).
- En cas que la base a sigui  $> 1$ , llavors  $\log_a x < 0$  en  $x < 1$  i és  $\log_a x > 0$  en  $x > 1$ . En aquest cas, la funció és creixent.
- En cas que la base a sigui  $< 1$ , llavors  $\log_a x > 0$  en  $x < 1$  i és  $\log_a x < 0$  en  $x > 1$ . En aquest cas, la funció és decreixent.



Bé, ja hem dit que la funció logarisme és la inversa de la funció exponencial. Aleshores en quins tipus de problemes podrien sortir? Per exemple en aquells dels bacteris en què ens donaven el temps i ens preguntaven els bacteris: si ara ens donen els bacteris i ens demanen el temps, es pot fer servir la funció logaritme. Vegem-ho:

Ex. 25.- Un bacteri es reproduïx per bipartició, tenint lloc una bipartició cada cert interval de temps (quan passi aquest interval de temps hi hauran dos bacteris, quan passin dos intervals de temps hi hauran 4 bacteris, quan passin tres intervals de temps hi hauran 8 bacteris, etc.). Calcula el nombre d'intervals de temps que han de transcórrer perquè hi hagin 4096 bacteris.

Solució: Si anomenem B al nombre de bacteris i "n" al nombre d'intervals de temps, la fórmula que ens dona el nombre de bacteris serà:  $B = 2^n$ . Si féssim una taula de valors quedaria així:

Nº intervals transcorreguts (n)	0	1	2	3	...	n
Nº bacteris (B)	1	2	4	8	...	$B=2^n=4096$

Per tant,  $2^n=4096$ . Què hem de fer, doncs? Hem de buscar el nombre n al qual s'ha d'eleva el 2 (base) per trobar el 4096, és a dir, necessitem calcular el  $\log_2 4096$  (això és la n buscada).

Realment, si  $2^n=4096$ , podem utilitzar els mètodes vistos en pàgines anteriors per resoldre-ho. Podem descompondre factorialment el 4096 (surt  $2^{12}$ ), i aleshores, el que hem de resoldre és  $2^n=2^{12}$ , i per tant,  $n=12$ , és a dir, l'exponent al qual hem d'eleva la base (2) perquè surti 4096 és 12, és a dir,  $12=\log_2 4096$ . Aleshores, haurien d'haver transcorregut 12 intervals de temps perquè hi haguessin 4096 bacteris.

Vosaltres pensareu que... i si resulta que no es pot fer la descomposició factorial perquè tenim un nombre decimal o senzillament no surten potències de 2? Aleshores hauríem de recórrer a la calculadora, però

atenció! Resulta que la calculadora no pot fer logaritmes en qualsevol base! Només pot fer logaritmes decimals (en base 10) i logaritmes neperians (en base "e"). Com ho fem, doncs?

No hi ha problema, ja que existeix una fórmula que permet canviar de base els logaritmes, és a dir, si jo necessito fer  $\log_2 53941,23$  i la meua calculadora no té tecla per fer logaritmes en base dos, no passa res, existeix una fórmula (que veureu una mica mes endavant) que permet calcular aquest  $\log_2 53941,23$  utilitzant logaritmes en bases que sí tingui la calculadora (base 10 o base "e").

Però i si arribeu a un examen i no us recordeu de la fórmula del canvi de base de logaritmes? Tampoc no hi ha problema: hi ha una senzilla propietat dels logaritmes que permetria resoldre el nostre problema dels bacteris sense complicar-nos massa la vida, utilitzant l'esmentada propietat: Aquesta propietat és la següent:

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

És a dir, si hem de fer el logaritme d'una potència, el resultat és com si multipliquéssim l'exponent de la potència pel resultat de fer el logaritme de la quantitat en qüestió però sense l'exponent.

Com podem aplicar això al nostre exercici dels bacteris? Recordem que teníem que  $2^n=4096$ . Aquí jo puc fer un "truc", que és fer el logaritme (en la base que jo vulgui, per exemple, en base 10, que la té la calculadora) als dos membres de la igualtat. Em quedaria ara això:

$$\log 2^n = \log 4096$$

Ara bé, si tinc en compte aquesta propietat dels logaritmes que hem comentat ara mateix, l'exponent n podria passar davant del log 2 multiplicant-lo:

$$n \cdot \log 2 = \log 4096$$

Ara el log 2 i el log 4096 (en base 10) els puc fer amb la calculadora tranquil·lament, i l'equació anterior em queda:

$$n \cdot 0,3010299957 = 3,612359948$$

i si aïllem d'aquí la n surt  $n = \frac{3,612359948}{0,3010299957} = 12$  (com era d'esperar!).

Ja veieu doncs, com sempre, que hi ha moltes maneres diferents de resoldre un mateix problema.

Ex. 26.- Recordeu el problema de la desintegració radioactiva? El teníeu al final de la pàg. 3 i principis de la 4. Deia que una substància radioactiva es desintegrava seguint la fórmula següent:

$$N_t = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{1000}}$$

Ens deien que  $N_t$  era el nombre de partícules que quedaven en un instant  $t$ .  $N_0$  era el nombre de partícules que hi havia en  $t=0$  (inicialment). El temps ( $t$ ), en la fórmula, s'havia de posar en segons.

Imaginem-nos ara que hi una petita fuga radioactiva en una part localitzada d'una central nuclear que és a prop de casa nostra i ens diuen que el material radioactiu que surt té una fórmula de desintegració que és l'anterior. Ens interessaria saber per exemple, quant de temps hauria de transcórrer perquè la meitat d'aquest matèria hagués desaparegut.

Solució: Si inicialment hi havia  $N_0$  partícules, quan hi hagin la meitat, el  $N_t = \frac{N_0}{2}$  (clar, la meitat de les inicials). Llavors, podem posar aquesta conclusió en la fórmula de la desintegració, i quedaria:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{1000}} \rightarrow \text{Si dividim tota l'equació per } N_0, \text{ marxem i queda:}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{1000}} \rightarrow 0,5 = e^{-\frac{t}{1000}} \text{ Ara podem fer com hem fet abans quan hem utilitzat aquell truc: fer el logaritme (en base 10 per exemple) de cada membre de la igualtat. Quedaria: } \log 0,5 = \log e^{-\frac{t}{1000}} \rightarrow$$

$$\text{Ara, si utilitzem la propietat de que fer el logaritme d'una potència equival a multiplicar l'exponent de la potència pel logaritme de la quantitat (sense l'exponent), ens quedaria: } \log 0,5 = -\frac{t}{1000} \log e \rightarrow -0,3010299957 = -\frac{t}{1000} \cdot 0,434294482$$

$$t = \frac{-0,3010299957 \cdot 1000}{-0,434294482} = 693,147 \text{ s} = 11 \text{ min } 33,147 \text{ s de temps.}$$

A més a més d'aquesta propietat que hem esmentat per resoldre el problema dels bacteris o el de la desintegració radioactiva hi ha altres propietats interessants. Són les següents:

### 3.d.- PROPIETATS DELS LOGARISMES

Les propietats dels logarismes són les següents:

$$\text{a) } a^{\log_a x} = x \quad \text{b) } \log_a a = 1 \quad \text{c) } \log_a a^x = x$$

$$\text{d) } \log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad \text{e) } \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$$

$$\text{f) } \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \text{g) } \log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{h) } \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

Demostracions:

• De la a):  $a^{\log_a x} = x$ . Això és cert, ja que si elevem "a" al nombre al qual s'ha d'eleva a perquè doni x, naturalment, donarà x.

• De la b):  $\log_a a = 1$ , ja que l'exponent al qual s'ha d'eleva la base (a) perquè surti el nombre en qüestió (a) és 1: És clar,  $a^1 = a$ .

· De la c):  $\log_a a^x = x$ , ja que l'exponent al qual s'ha d'eleva la base (a) perquè surti la quantitat  $a^x$ , naturalment, és x. És clar,  $a^x = a^x$ .

· De la d):  $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ . Podríem mirar si elevat "a" a aquestes dues quantitats surt el mateix. Si sortís, aquestes dues quantitats seran iguals i ja estaria demostrat. Fem-ho:

$$a^{\log_a x^n} = a^{n \cdot \log_a x} \rightarrow a^{\log_a x^n} = \left(a^{\log_a x}\right)^n. \text{ Tenint en compte}$$

la propietat a) en el 2n membre de l'equació ens quedaria:  $a^{\log_a x^n} = (x)^n$ , cosa que és certa, ja que com que el  $\log_a x^n$  és el nombre al qual s'ha d'eleva la "a" perquè doni  $x^n$ , aleshores, si tenim "a" elevat a aquest número (en el 1r membre) sortirà  $x^n$ , que és el que hi ha al 2n membre, i llavors és veritat, per tant, la propietat ja està demostrada.

· De la e):  $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$ . Com que les arrels es poden expressar en forma de potències d'exponent fraccionari, tindríem:

$$\log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x; \text{ i si ara apliquem la propietat d) al 1r membre quedaria: } \frac{1}{n} \cdot \log_a x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x. \text{ Per tant, sí es compleix.}$$

· De la f):  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ . Podríem fer:  $a^{\log_a (x \cdot y)} = a^{\log_a x + \log_a y} \rightarrow x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} \rightarrow x \cdot y = x \cdot y$  (per tant, sí es compleix).

· De la g):  $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ . Podríem fer:

$$a^{\log_a \left(\frac{x}{y}\right)} = a^{\log_a x - \log_a y} \rightarrow \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \text{ Per tant, sí.}$$

· De la h):  $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ . Si  $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$  això vol

dir que  $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\log_a x} = x \rightarrow a^{\log_a x} = x \rightarrow x = x$ . Per tant, era correcte.

Exemples d'aplicació d'aquestes propietats:

Ex. 27.--->  $\log 10000 = \log 10^4 = 4 \cdot \log 10^1 = 4 \cdot 1 = 4$  (recordeu que si no s'indica la base, estem treballant en base 10).

Ex. 28.--->  $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$

Ex. 29.--->  $\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3 \cdot \log_5 5 = -3 \cdot 1 = -3$

Ex. 30.--->  $\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \log_3 3 = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$

Ex. 31.--->  $\log (6x^2) = \log 6 + \log (x^2) = \log 6 + 2 \cdot \log x$  [Observació: com que  $6=2 \cdot 3$ , podríem posar  $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$ ]

Ex. 32.--->  $\log_3 \frac{\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{81}}{3^5 \cdot 9^2} = \log_3 \left( \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{81} \right) - \log_3 (3^5 \cdot 9^2) =$

$$= \log_3 \sqrt[4]{9} + \log_3 \sqrt[3]{81} - (\log_3 3^5 + \log_3 9^2) = \log_3 \sqrt[4]{3^2} + \log_3 \sqrt[3]{3^4} - \log_3 3^5 - \log_3 (3^2)^2 = \log_3 3^{\frac{2}{4}} + \log_3 3^{\frac{4}{3}} - 5 - 4 = \frac{2}{4} + \frac{4}{3} - 9 = \frac{6}{12} + \frac{16}{12} - \frac{108}{12} = -\frac{86}{12} = -\frac{43}{6}$$

Ex. 33.--->També es poden agrupar coses, com en aquest exemple, per si ens interessés per qualsevol motiu:  $2 \log_3 x + 5 \log_3 y = \log_3 x^2 + \log_3 y^5 = \log_3 (x^2 \cdot y^5)$

### 3.e.- CANVI DE BASE DE LOGARISMES

En preguntes anteriors hem dit que la calculadora no té una tecla que serveixi per calcular un logaritme en qualsevol base (només pot fer logaritmes decimals i neperians). Però això no és un problema, ja que hi ha una fórmula que ens permet calcular qualsevol logaritme en funció de logaritmes en una base que ens interessi. La fórmula és aquesta:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostració: Si anomenem  $\begin{cases} A = \log_a x \rightarrow a^A = x \\ B = \log_b x \rightarrow b^B = x \end{cases} \rightarrow a^A = b^B$

i a continuació prenem logaritmes en la base que ens interessa (base a),

$$\log_a a^A = \log_a b^B \rightarrow A = B \cdot \log_a b \rightarrow \log_a b = \frac{A}{B} \rightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

(com volíem demostrar).

Ex. 34.- Com a exemple, podem calcular el  $\log_5 8,3$  amb la fórmula del canvi de base i la calculadora. [Suggeriment, la base "a" que sigui la

base 10, és a dir, els logaritmes que surten al 2n membre de la fórmula del canvi de base que acabem de demostrar, que siguin logaritmes decimals, que els pot calcular la calculadora]

$$\text{Solució: } \log_5 8,3 = \frac{\log_{10} 8,3}{\log_{10} 5} = \frac{0,919078}{0,69897} = 1,3149033$$

Ex. 35.- Calcular  $\log_4 0,0397$ . Solució: -2,3273.

Ex. 36.- Calcular  $\log_7 485$ . Solució: 3,17797.

### 3.f.- EQUACIONS AMB LOGARISMES

Per resoldre equacions que contenen logaritmes moltes vegades és útil intentar que quedi alguna cosa com  $\log_a H_1 = \log_a H_2$  per després poder dir que  $H_1 = H_2$ , i d'aquí treure la incògnita. Per resoldre equacions amb logaritmes haureu de conèixer perfectament les propietats dels logaritmes.

Exemples:

Ex. 37.- Equació:  $\log x = \log 40 - \log 10 \rightarrow \log x = \log \frac{40}{10} \rightarrow \log x = \log 4 \rightarrow x = 4$ .

Ex. 38.- Equació:  $\log 2x = \log 250 - \log 5 \rightarrow$  Es pot procedir de la mateixa manera que abans, i resulta  $x = 25$ .

Ex. 39.- Eq.:  $\frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2 \rightarrow \log 2 + \log(11-x^2) = 2 \cdot \log(5-x) \rightarrow \log [2 \cdot (11-x^2)] = \log (5-x)^2 \rightarrow 2 \cdot (11-x^2) = (5-x)^2 \rightarrow$  Això és una equació de 2n grau que si s'arregla i s'aplica la fórmula surt  $x_1 = 1/3$  i  $x_2 = 3$ .

Ex. 40.- Equació:  $\log(2^{2-x})^{2+x} + \log 1250 = 4 \rightarrow$   
(Si ens adonem que el 4 es pot escriure com  $\log 10^4$  tindrem)  
 $\log[1250 \cdot (2^{2-x})^{2+x}] = \log 10^4 \rightarrow [1250 \cdot (2^{2-x})^{2+x}] = 10^4 \rightarrow$   
 $1250 \cdot 2^{4-x^2} = 10000 \rightarrow 2^{4-x^2} = \frac{10000}{1250} \rightarrow 2^{4-x^2} = 8 \rightarrow 2^{4-x^2} = 2^3 \rightarrow$   
 $4-x^2=3 \rightarrow 4-3=x^2 \rightarrow 1=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{1} = \pm 1$

Ex. 41.- Equació:  $\log \sqrt{3x+1} - \log \sqrt{2x-3} = 1 - \log 5 \rightarrow$  En el 1r membre de l'equació utilitzo que la resta de logaritmes és el logaritme del quocient. En el 2n membre puc expressar el 1 com  $\log 10 \rightarrow$   
 $\log \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}} = \log 10 - \log 5 \rightarrow \log \sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}} = \log \frac{10}{5} \rightarrow$   
 $\log \sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}} = \log 2 \rightarrow \sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}} = 2 \rightarrow \left(\sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}}\right)^2 = 2^2 \rightarrow \frac{3x+1}{2x-3} = 4$   
 $\rightarrow 3x+1=4 \cdot (2x-3) \rightarrow \dots \rightarrow x=13/5$

Ex. 42.- Equació:  $\log(7x-9)^2 + \log(3x-4)^2 = 2 \rightarrow$   
 $\log((7x-9)^2 \cdot (3x-4)^2) = \log 10^2 \rightarrow \log[(7x-9)(3x-4)]^2 =$   
 $= \log 10^2 \rightarrow [(7x-9)(3x-4)]^2 = 10^2$ . D'aquí, si trec els quadrats fent les arrels, hem quedarien dos possibles equacions, tenint en compte que les arrels poden sortir + o -:  
a)  $(7x-9)(3x-4)=+10$  (que és una eq. de 2n grau i si s'arregla es pot resoldre)  
b)  $(7x-9)(3x-4)=-10$  (que és una altra eq. de 2n grau i si s'arregla també es pot resoldre).

Ex. 43.- Equació:  $3 \log x - \log 32 = \log(x/2) \rightarrow$  Solucions:  $x = -4$ ;  
 $x=4$  ( $x=0$  no val, ja que sortiria un  $\log 0$  en l'equació, però no existeix el  $\log 0$ ).

### Sistemes d'equacions amb logaritmes:

La major part dels sistemes es poden resoldre utilitzant el fet conegut que  $\log_a H_1 = \log_a H_2$  implica que  $H_1 = H_2$ . Altres sistemes es poden resoldre fent un canvi de variable. Ara veurem uns exemples:

Ex. 44: Sistema:  $\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$  Aquest exemple es pot fet

agrupant en cada equació per separat i queda  $\begin{cases} \log\left(\frac{x^2}{y^3}\right) = \log 10^7 \\ \log(xy) = \log 10^1 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} \frac{x^2}{y^3} = 10000000 \\ xy = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 10000000y^3 \\ xy = 10 \end{cases}$  Si aïllem de la 2a eq.

queda  $x = \frac{10}{y}$ , que substituït a la 1a equació dóna  
 $\frac{100}{y^2} = 10000000y^3 \rightarrow 100 = 10000000y^5 \rightarrow y^5 = \frac{1}{100000} \rightarrow$   
 $y = \sqrt[5]{\frac{1}{100000}} \rightarrow y = \frac{1}{10} \rightarrow$  com que  $x = \frac{10}{y} \rightarrow x = \frac{10}{\frac{1}{10}} = 100$

Aquest exercici també es podia haver fet fent un canvi de variable, que és el següent:  $z = \log x$ ;  $t = \log y$ . D'aquesta manera el sistema inicial quedaria així:

$\begin{cases} 2z - 3t = 7 \\ z + t = 1 \end{cases}$  que es pot resoldre fàcilment i surt  $\begin{matrix} z = 2 \\ t = -1 \end{matrix}$ .

Aleshores, si...

·  $z=2$ , com que  $z = \log x \rightarrow \log x = 2 \rightarrow x = 10^2 \rightarrow x = 100$   
·  $t=-1$ , com que  $t = \log y \rightarrow \log y = -1 \rightarrow y = 10^{-1} \rightarrow y = 1/10$

Ex. 45.- Sistema: 
$$\begin{cases} \log x - \log 5y = 3 \cdot \log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$$
 Una forma de

resoldre aquest sistema seria agrupar (com hem fet al 1r mètode pel qual s'ha resolt l'exercici anterior), i la solució sortiria;

$$x = \frac{2^4}{5^8} = 4,096 \cdot 10^{-5} \text{ i } y = \frac{2^4}{5^{12}} = 6,5536 \cdot 10^{-8}$$

i la segona manera de fer-ho seria fer això:

$$\begin{cases} \log x - (\log 5 + \log y) = 3 \cdot \log 5 \\ 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 4 \cdot \log 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x - \log 5 - \log y = 3 \cdot \log 5 \\ 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 4 \cdot \log 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x - \log y = 3 \cdot \log 5 + \log 5 \\ 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 4 \cdot \log 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x - \log y = 4 \cdot \log 5 \\ 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 4 \cdot \log 2 \end{cases}$$

Ara bé, el log 5 el podem calcular amb la calculadora i el log 2 també per tant,

$$\begin{cases} \log x - \log y = 4 \cdot 0,69897 \\ 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 4 \cdot 0,301023 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x - \log y = 2,79588 \\ 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log y = 1,20412 \end{cases}$$

I ara es podria fer un canvi de variable per exemple, que fos

$z = \log x$  ;  $t = \log y$  , i quedaria un sistema així:

$$\begin{cases} z - t = 2,79588 \\ 3z - 2t = 1,20412 \end{cases} \quad \text{La solució del qual és } \begin{cases} z = -4,874 \\ t = -7,18352 \end{cases}, \text{ i llavors}$$

· si  $z = -4,38764$ , com que  $z = \log x \rightarrow \log x = -4,38764 \rightarrow x = 10^{-4,38764} = 4,096 \cdot 10^{-5}$ .

· si  $t = -7,18352$ , com que  $t = \log y \rightarrow \log y = -7,18352 \rightarrow y = 10^{-7,18352} = 6,5536 \cdot 10^{-8}$ .

Ex. 46.- Sistema: 
$$\begin{cases} x = 70 \\ \log x + 1 \log y = 3 \end{cases}$$
 El suggeriment per fer-ho és

agrupar a la 2a equació [que quedi  $\log(xy) = 3$ , i això vol dir que  $xy = 10^3 = 1000$ , i això faria que el sistema quedés així:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ xy = 1000 \end{cases}, \text{ que es pot resoldre per substitució, sortint dues}$$

possibles solucions:

· la primera és que  $x_1 = 0,0429$  i  $y_1 = 69,957$

· i la segona és que  $x_2 = 69,957$  i  $y_2 = 0,0429$ .

Ex. 47.- Sistema: 
$$\begin{cases} \log x^2 - \log y^3 = 7 \\ \log(xy) = 1 \end{cases}$$
 Suggeriments: Podeu

fer-ho agrupant la 1a equació i després la 2a, i resolent el sistema, o bé desenvolupant les expressions que surten i fent un canvi de variable (com a l'exercici 45 per exemple).

La solució és:  $x = 100$  i  $y = 1/10 = 0,1$ .