

## PLANIFICACIÓ DE LA RESOLUCIÓ DELS EXERCICIS DEL TEMA DE GEOMETRIA MÈTRICA DE MATES DE 2n DE BTX

Us faig aclariments sobre explicacions i exercicis del tema.

### • Exercicis de la pàg. 139 i altres relacionats:

**Angle que formen dues rectes:** Si ens pregunten que quin angle formen dues rectes cal tenir en compte que si són paral·leles o coincidents l'angle que formen és 0; però si són secants o s'encreuen hem que quedar-nos amb el més petit angle que formin els seus vectors directores (vegeu pàg. 138). Recordeu que l'angle que formen dos vectors ve donat per la fórmula

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

però no és exactament aquesta fórmula la que hem d'aplicar quan busquem l'angle entre dues rectes. Per quedar-nos amb l'angle més petit que formen els dos vectors directores de les rectes ens cal posar un valor absolut al numerador de la fracció anterior, és a dir, l'angle que formen dues rectes (quan són secants o quan s'encreuen és):

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

Com a exemple resolt del llibre teniu l'exemple 1 de la pàg. 139.

Caldria fer l'exercici 1 de la pàg. 139.

**Rectes perpendiculars:** Dues rectes són perpendiculars si els seus vectors directores ho són, per tant, són perpendiculars si el producte

escalar dels seus vectors directores és 0 (vegeu explicació i exemple a la pàg. 139).

A continuació veurem dos exercicis difícils de la pàg. 139 sobre perpendicularitat.

### Exemple resolt 2 de la pàg. 139.

A la pàg. 139 hi ha l'**exemple 2** que demana trobar l'equació vectorial de la recta s que passa per un punt A i talla perpendicularment la recta r. Observeu el dibuix i llegiu-vos l'explicació. Hi ha un moment que us diuen que  $B=(2+3k, 1+2k, k)$ . Això surt del fet que  $B \in r$  i, per tant, compleix la seva equació vectorial. Vegem-ho:

$$B=(2,1,0)+k(3,2,1)=(2+3k, 1+2k, k).$$

Mireu el dibuix. El vector  $\overrightarrow{AB}$  es calcularà fent:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2+3k, 1+2k, k)-(1,0,2)=(1+3k, 1+2k, k-2).$$

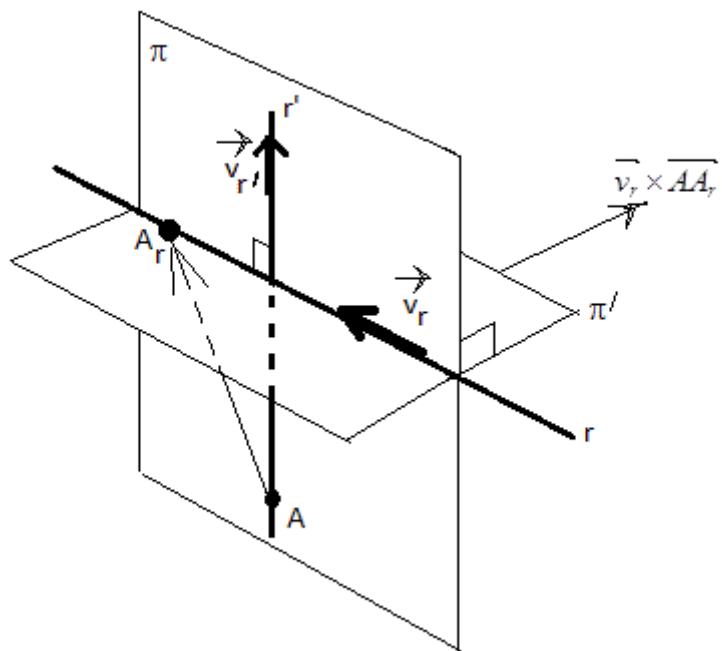
Després torneu a mirar el dibuix i veureu que  $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}_r$ , per tant,  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_r = 0$  i per això han posat que  $(1+3k, 1+2k, k-2) \cdot (3,2,1)=0$ .

Operant aquí han obtingut que  $k=-3/14$  i així han pogut calcular

$$\overrightarrow{AB}=(1+3k, 1+2k, k-2)=\left(\frac{5}{14}, \frac{8}{14}, -\frac{31}{14}\right).$$

Per a la recta s podem triar un vector director proporcional a  $\overrightarrow{AB}$  que no tingui denominadors (multiplicant  $\overrightarrow{AB}$  per 14): (5,8,-31). Com que la recta s que busco passa per  $A=(1,0,2)$  i té com a vector director (5,8,-14), ja la puc escriure en forma vectorial així:  $(x,y,z)=(1,0,2)+k(5,8,-31)$ , que és la solució que dóna el llibre.

Una **manera alternativa** d'haver resolt aquest **exemple 2** de la pàg. 139 seria la que explicarem ara. En el dibuix següent hem anomenat r' a la recta s que busco en aquest exemple 2:



Observeu que el vector que obtindríem fent

$$\vec{v}_r \times \overrightarrow{AA_r}$$

estaria contingut en el pla  $\pi'$  (seria vector director seu) però a més seria perpendicular a  $r'$ , per tant, el vector director de  $r'$  seria perpendicular a  $\vec{v}_r$  i  $\vec{v}_r \times \overrightarrow{AA_r}$ , llavors, el podríem calcular com el producte vectorial d'aquests dos vectors:

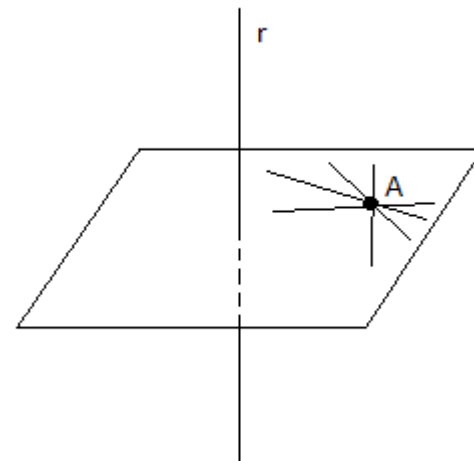
$$\vec{v}_{r'} = \vec{v}_r \times (\vec{v}_r \times \overrightarrow{AA_r})$$

### **Exercici 2 de la pàg. 139.**

A la pàg. 139 teniu l'exercici 2 per a la resolució del qual cal tenir una mica de visió espacial.

Us donen una recta i un punt A que podeu comprovar que no pertany a la recta (això és important). Us pregunten en el primer

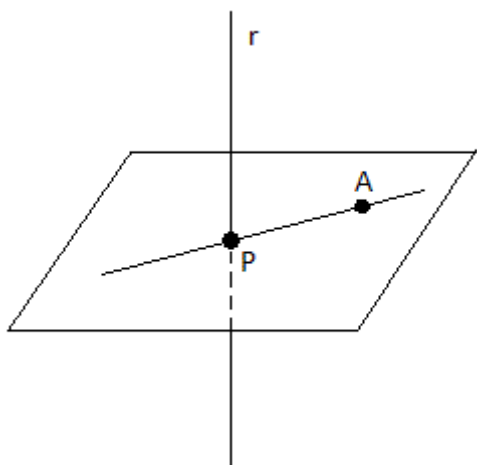
apartat que quantes rectes perpendiculars a  $r$  passen pel punt A. Observeu la següent imatge i vosaltres mateixos podreu respondre:



Hi ha infinites rectes.

Si us demanen donar l'equació de dues d'aquestes rectes podeu agafar com a punt concret de la recta el mateix punt A i com a vector director de la recta un vector perpendicular al vector director de  $r$ . Recordeu que en el segon *Fixa't-hi* de la pàg. 95 teniu la manera de fer-ho.

En el segon apartat us pregunten que quantes rectes passen pel punt A però tallen perpendicularment a  $r$ . Observeu el dibuix següent:



Òbviament, només hi ha una. Si ens demanessin trobar-la, com ho fariem?

Una manera de fer-ho seria fer el mateix que proposa el llibre en l'exemple resolt 2 de la pàg. 139. Aquí el punt P és el que allí era el punt B.

Una altra forma de fer-ho seria la següent: el vector director de la recta r, que és (3,-1,2) seria un vector normal al pla del dibuix i, per tant, el pla seria de la forma  $3x-y+2z+k=0$ . Substituint  $A=(0,0,1)$  trobaríem la k i tindríem l'equació del pla. El punt P seria la intersecció de la recta r i el pla (i per tant l'obtindríem resolent el sistema de recta i pla). La recta que busco tindria com a punt concret A i com a vector director  $\overrightarrow{AP}$ . El vector  $\overrightarrow{AP}$  es calcularia fent P-A. Ja podria escriure l'equació de la recta en forma vectorial, paramètriques o contínua.

**Exercicis de repàs:** Per repassar de tot allò que hem explicat fins ara teniu el 49 i el 46 de la pàg. 158.

### • **Exercicis de la pàg. 141 i altres relacionats:**

**Angle entre dos plans:** A la pàg. 140 del llibre us comenten que si dos plans són coincidents o paral·lels l'angle que formen és 0 (és lògic). En el cas que siguin secants, l'angle que formen els dos plans és el mateix que el més petit dels dos angles que formen els seus vectors normals  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  (vegeu figures del llibre). Per exemple, si  $\pi: 3x-4y+z-3=0$  i  $\pi': x-z+4=0$ , els vectors normals respectius són  $\vec{n}_1=(3,-4,1)$  i  $\vec{n}_2=(1,0,-1)$  i, per tant, l'angle  $\alpha$  que formen els plans  $\pi$  i  $\pi'$  es calcula usant la fórmula

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

Teniu un altre exemple a la mateixa pàg. 140 (exemple resolt 3).

Exercicis sobre càlcul de l'angle que formen dos vectors són els següents: 3 i 4 pàg. 141 i 47 pàg. 158.

Per fer l'exercici 5 de la pàg. 141 cal tenir en compte que els plans coordenats són:

- Pla XY: té vector normal (0,0,1), per tant, és un pla de la forma  $0x+0y+1z+k=0$ , i passa pel punt (0,0,0). No és difícil de trobar que  $k=0$  i que el pla té per equació  $z=0$ .
- Pla XZ: té vector normal (0,1,0), per tant, és un pla de la forma  $0x+1y+0z+k=0$ , i passa pel punt (0,0,0). No és difícil de trobar que  $k=0$  i que el pla té per equació  $y=0$ .
- Pla YZ: té vector normal (1,0,0), per tant, és un pla de la forma  $1x+0y+0z+k=0$ , i passa pel punt (0,0,0). No és difícil de trobar que  $k=0$  i que el pla té per equació  $x=0$ .

Ara que ja saben quina equació tenen els plans coordenats ja podem calcular l'angle que forma el pla  $\pi$  de l'exercici amb cadascun d'ells (aquest exercici és com tres exercicis en un perquè heu de calcular tres angles).

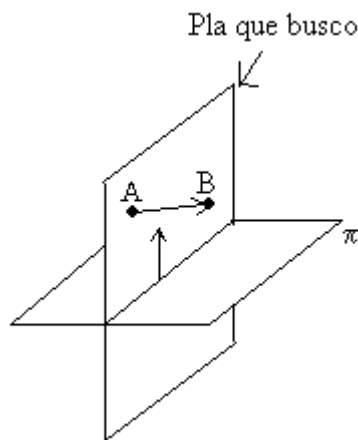
### Plans perpendiculars:

Cal recordar que perquè dos plans siguin perpendiculars caldrà que ho siguin els seus vectors normals, és a dir:

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

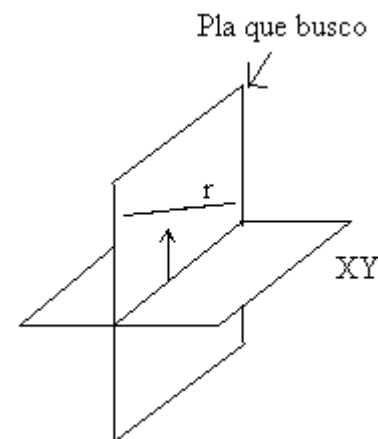
L'exercici 6 pàg. 141 s'ha de fer comprovant el que acabem de dir ara (que el producte escalar dels vectors normals als plans és 0). El vector normal del pla  $\pi$  és (2,1,1). El del pla  $\pi'$  el podem trobar fàcilment si passem primer el  $\pi'$  a forma general (si no, també es pot trobar el seu vector normal usant la informació del *Fixa-t'hi* de la pàg. 141).

El 7 pàg. 141 es pot resoldre tenint en compte que un vector director del pla que busco serà el normal del pla que em donen. L'altre vector director del pla que busco serà el vector  $\overline{AB}$ . El punt concret del pla pot ser el A, per exemple (també serviria el B). Amb aquests tres ingredients, ja puc trobar l'equació del pla que busco. Vegeu el dibuix:

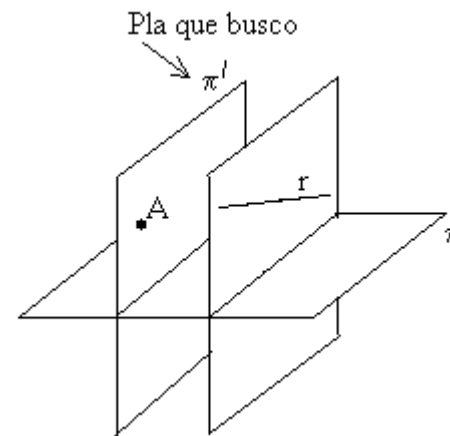


El 8 pàg. 141 es pot fer tenint en compte que un vector director del pla que busco serà el de la recta que té inclosa. L'altre serà el

normal al pla XY, que li és perpendicular, seria el vector  $\vec{k}=(0,0,1)$ . Com a punt concret del pla servirà el de la recta que em donen.



El 65 pàg. 159 el vam comentar a classe. Com a punt concret del pla  $\pi'$  que busco servirà el punt A=(1,0,-1). Com a vectors directores del pla  $\pi'$  serviran els següents: un serà el normal al pla  $\pi$  i l'altre serà el vector director de la recta, ja que és paral·lela.



El 67 pàg. 159 és com el 65 anterior.

El 69 pàg. 159 no és difícil. Només cal demanar que els vectors normals siguin perpendiculars, és a dir, que el seu producte escalar sigui 0. Com que  $\vec{n}=(2,-6,0)$  i  $\vec{n}'=(3,-k,1)$ , fent el producte escalar i igualant-lo a 0 tindrem  $6+6k+0=0$ . D'aquí  $k=-1$ . Per a la 2a part del problema tindrem en compte que la recta que és la intersecció dels dos plans serà la recta determinada pel sistema format per les

equacions dels dos plans (forma implícites): 
$$\begin{cases} 2x - 6y + 5 = 0 \\ 3x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{ja}$$

hem substituït  $k=-1$  en el 2n pla). Un vector director de la recta es pot obtenir de les següents formes:

1a forma: resolc el sistema i em sortiran les equacions paramètriques de la recta. Els coeficients que acompanyen al paràmetre em diuen el vector director de la recta.

2a forma: un vector director de la recta serà el producte vectorial dels dos normals als plans que intervenen en les implícites, és a dir,  $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}'$ .

- Exercicis de la pàg. 143 i altres relacionats:**

**Angle entre recta i pla:**

L'angle format per una recta i un pla és el complementari del que formen el vector director de la recta i el vector normal al pla, per tant, no té dificultat. [Recordeu que el complementari d'un angle  $\alpha$  és  $90-\alpha$ ]. Ho teniu explicat i dibuixat a la pàg. 142. Vegeu l'exemple resolt 5 pàg. 142.

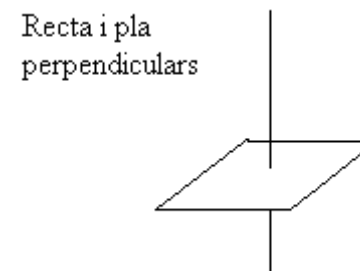
L'exercici 9 pàg. 143 va d'això. El 48 pàg. 158 és semblant.

**Recta i pla perpendiculars:**

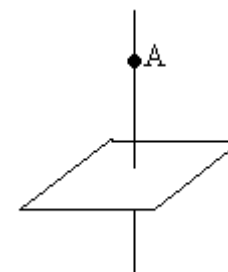
Perquè una recta i un pla siguin perpendiculars caldrà que el vector director de la recta i el normal del pla siguin paral·lels (proporcionals). Vegeu el dibuix de la figura 4 de la pàg. 143.

A continuació donem pistes per fer alguns altres exercicis sobre perpendicularitat de rectes i plans.

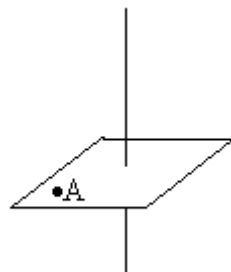
Ex. 10 pàg. 143. Caldrà comprovar si el vector director de la recta i el vector normal al pla són paral·lels (proporcionals).



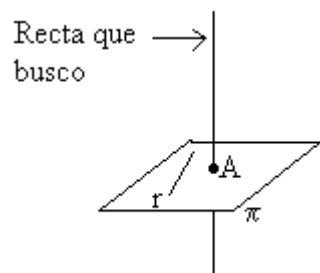
Ex. 11 pàg. 143. Només cal usar que un vector director de la recta serà el normal del pla que em donen.



Ex. 12 pàg. 143. El pla serà de la forma  $Ax+By+Cz+D=0$ . Els coeficients A, B i C són els components del vector normal al pla. Com que com a vector normal al pla podem utilitzar el vector director de la recta, ja sabré la A, B i C. La D la puc trobar substituint el punt  $A=(-2,4,1)$  en l'equació del pla. Així tindrè D i tindrè l'equació del pla completa.



Ex. 13 pàg. 143. El pla  $\pi$  del que parla l'exercici es pot trobar a partir del feix de plans secants d'aresta r, demanant que el punt A sigui del feix de plans (ho hem fet al tema anterior). Així trobem el pla  $\pi$  concret del feix que ens interessa. Quan tinguem  $\pi$ , el vector normal de  $\pi$  ens servirà com a vector director de la recta que busco, ja que és perpendicular a ell. La recta que busco, a més, passa pel punt A. Llavors, queda perfectament determinada amb aquest punt concret i amb el vector director abans esmentat. Vegeu la figura:



Ex. 50 pàg. 159. Recordeu que l'eix OZ té com a vector director el vector  $(0,0,1)$ . Si és perpendicular al pla que busco, el pla serà de la forma  $0x+0y+1z+k=0$  (o sigui, el pla serà de la forma  $z+k=0$ ). La k la trobareu demanant al pla que contingui el punt  $A=(1,2,3)$ . Per tant,  $3+k=0 \rightarrow k=-3$ . Llavors el pla que busco és  $z-3=0$ , o sigui,  $z=3$ , que és la solució que dona el llibre.

#### • **Exercicis de la pàg. 144 i altres relacionats:**

##### **Distància entre dos punts:**

Ex. 14 pàg. 144. Recordeu que la distància entre dos punts és el mòdul del vector que els uneix, per tant, l'exercici no té misteri (de fet, per calcular la distància entre dos punts no cal ni aprendre's la fórmula de la pàg. 144). Calculo  $\overrightarrow{AB}=B-A$  i al resultat li faig el mòdul.

Ex. 15 pàg. 144. Pistes: un punt genèric  $P=(x,y,z)$  complirà que  $d(A,P)=4$ . Traduït a equacions això significa

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2} = 4. \text{ Elevant al quadrat queda:}$$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 16$$

que, per lògica, correspondria a una esfera de centre  $(1,5,-2)$  i radi 4, per tant, hi ha infinits punts que compleixen la condició anterior.

Si vull un punt concret puc triar per exemple  $x=1$  i  $y=5$  (així els dos primers parèntesis de l'equació anterior donen 0 i tot queda molt senzill), quedaria  $(z+2)^2=16$ , que dona  $z+2=\pm 4$  i llavors el  $z=2$  o  $-6$ . Per tant, un punt seria  $(1,5,2)$  i un altre  $(1,5,-6)$ . Si m'hagués inventat altres valors per a x i per a z i hagués resolt l'equació, trobaria altre punts.

Ex. 16 pàg. 144. Per trobar el perímetre només cal sumar les longituds dels costats, que seran els mòduls dels vectors que van unint cada parell de vèrtex que els formen, és a dir, perímetre= $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}|$ . Com a opcional teniu el 51 pàg. 158.

Ex. 62 pàg. 159. Si P és un punt de la recta r tindrà la forma  $P=(x,y,z)=(-3+2k, -5+3k, -4+3k)$ , ja que així m'ho diuen les equacions de r. Ara cal resoldre l'equació determinada per la següent igualtat de distàncies:  $d(\text{origen}, P)=d(A,P)$ . Això seria:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

Elevant al quadrat marxarien les arrels. Desenvolupant els quadrats (quadrat del 1r, quadrat del 2n i doble del 1r pel 2n) tinc

$$x^2+y^2+z^2=x^2-6x+9+y^2-4y+4+z^2-2z+1$$

Afortunadament, quan passem les  $x^2$ , les  $y^2$  i les  $z^2$  al mateix membre, es cancel·len i desapareixen. L'equació que queda és:

$$6x+4y+2z-14=0$$

que, simplificada entre 2 és:

$$3x+2y+z-7=0$$

i té l'estructura de l'equació d'un pla (en realitat és el que s'anomena **pla mediador** entre l'origen i el punt A). Tècnicament està format pels punts del pla que estan a la mateixa distància de l'origen i de A.

Com que d'aquest pla només volem el punt que és de la recta r, haurem de substituir  $x=-3+2k$ ,  $y=-5+3k$  i  $z=-4+3k$  en l'equació del pla. Així trobarem el punt concret que busquem que compleix el que es demana. Llavors, hauríem de resoldre

$$3(-3+2k)+2(-5+3k)+(-4+3k)-7=0.$$

Quan trobem la k, la posem en  $P=(x,y,z)=(-3+2k, -5+3k, -4+3k)$  i ja tenim el punt P que buscàvem.

- **Exercicis de la pàg. 145 i altres relacionats:**

**Distància d'un punt a una recta:**

Per trobar-la es pot usar la fórmula de la pàg. 145 ( $d(P,r)$  significa distància del punt P a la recta r). En aquesta fórmula  $\vec{v}$  és un vector director de la recta i Q és un punt concret de la recta.

Ex. 18 pàg. 145. No ens equivoquem: conté dos exercicis en un. Cal trobar la distància de A a la recta r amb la fórmula de la pàg. 145. Després s'ha de fer el mateix amb el punt B (trobar la distància de B a r).

Es pot practicar el càlcul de la distància d'un punt a una recta realitzant els exercicis 52 i el 53 de la pàg. 158.

Ex. 19 pàg. 145. El perímetre és fàcil, ja que val  $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CA}|$ .

La distància de B a la recta que passa per A i C s'ha de calcular usant la fórmula de la pàg. 145 tenint en compte que el vector director de la recta AC serà el vector  $\overrightarrow{AC}$ . Si tenim en compte que la distància de B a la recta AC és l'altura h del triangle (considerant que la base és  $b=AC$ ), l'àrea del triangle és fàcil de calcular:

$$\text{Àrea} = \frac{bxh}{2}.$$

- **Exercicis de la pàg. 147 i altres relacionats:**

**Distància d'un punt a un pla:**

Per calcular-la cal usar la fórmula del final de la pàg. 146. Observeu que en el numerador apareix el valor absolut d'una cosa que és semblant a l'equació general del pla havent-hi substituït el punt que em donen i en el denominador apareix el mòdul del vector normal al pla obtingut a partir de  $\vec{n}=(A,B,C)$  de l'equació general.

El 20 pàg. 147 és molt fàcil. Es pot plantejar que el pla serà de la forma  $Ax+By+Cz+D=0$ . Si conté l'origen de coordenades (0,0,0), llavors, substituint  $x=0$ ,  $y=0$  i  $z=0$  en l'equació del pla queda que  $0+0+0+D=0$ , amb la qual cosa,  $D=0$ . Per tant, l'equació d'un pla que conté l'origen de coordenades és  $Ax+By+Cz=0$  (la seva  $D=0$ ).

El 21 pàg. 147 no té misteri: el punt  $P=(1,5,0)$ , o sigui,  $(p_1,p_2,p_3)=(1,5,0)$ , s'ha de substituir en l'equació que em permet calcular la distància d'un punt a un pla (al final de la pàg. 146). Per usar-la hem de tenir l'equació general del pla. En l'apartat a) es pot fer directament; en el b), primer s'ha de passar l'equació vectorial del pla que ens donen a equació general (i després aplicar la fórmula del final de la pàg. 146).

El 54 i el 58 pàg. 148 són relativament fàcils.

En el 22 pàg. 147, el primer que hauríem de tenir en compte és que les rectes  $r$  i  $s$  són secants (es pot veure a ull que es tallen en l'origen de coordenades  $(0,0,0)$ ). El pla que determinen aquestes dues rectes secants estarà definit per un punt concret, que pot ser el mateix  $(0,0,0)$ , i els vectors directors de les dues rectes. Passant el pla a forma general i aplicant la fórmula del final de la pàg. 146 podré calcular la distància del punt  $P=(-2,5,0)$  al pla en qüestió.

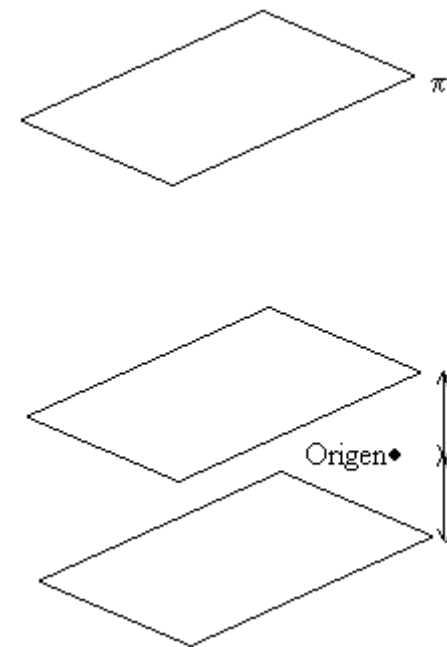
Ex. 23 pàg. 147.

*Primera part:* només cal posar  $P(0,0,0)$  en la fórmula del final de la pàg. 146 utilitzant el pla que ens donen.

*Segona part:* Un pla paral·lel a l'anterior tindrà la forma  $3x+y-5z+k=0$ . Per saber en concret quant val la  $k$  procediré així: sé que la distància d'aquest nou pla a l'origen de coordenades és 1 unitat, per tant, aplicant a fórmula de la distància d'un punt a un pla (final de la pàg. 146) tindrè:

$$1 = \frac{|3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2}}, \text{ o sigui, } 1 = \frac{|k|}{\sqrt{35}}, \text{ i llavors } \sqrt{35} = |k|.$$

Recordem que si tenim per exemple l'equació  $|z|=9$ , les solucions són  $z=\pm 9$  (lògic, oi?). En el nostre cas tenim  $\sqrt{35} = |k|$ , per tant,  $k=\pm\sqrt{35}$ . Llavors hi ha dos plans que estan a 1 unitat de l'origen i són paral·lels al pla que em donen. La imatge seria aquesta:



Ex. 24 pag, 147. Cal pensar una mica: si el punt del pla més pròxim a l'origen de coordenades  $O=(0,0,0)$  és el punt  $P=(3,-2,1)$  això vol dir que la distància de  $O=(0,0,0)$  al pla és la mateixa que la distància de  $O=(0,0,0)$  a  $P=(3,-2,1)$  i, a més, que el vector  $\overrightarrow{OP}$  és perpendicular al pla (si no ho veieu clar teniu en compte que la distància més petita entre un punt i un pla és la distància que hi ha en perpendicular del punt al pla). La informació sobre el valor de la distància no serà necessària per resoldre el problema.

Com que el pla  $\pi$  que busco és perpendicular a  $\overrightarrow{OP}$ , servirà  $\overrightarrow{OP}=(3,-2,1)$  com a vector normal seu i, per tant,  $\pi$  serà del tipus  $3x-2y+z+k=0$ .

El nostre pla ha de complir la condició que  $P=(3,-2,1)$  hi pertanyi, llavors, si el pla té l'estructura  $3x-2y+z+k=0$ , substituint el punt obtinc la  $k$ :  $3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 1 + k = 0 \rightarrow \dots \rightarrow k = -14$ . Per tant, el pla que busco és  $3x-2y+z-14=0$

Hem de tenir en compte que utilitzar només la informació sobre la distància no ens soluciona del tot el problema. Vegem-ho:

Si calculo la distància entre O i P, que és la que hi ha entre O i el pla  $\pi$  que busco, obtinc  $d(O,P)=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$ , ja que  $\overrightarrow{OP}=P-O=(3,-2,1)-(0,0,0)=(3,-2,1)$ . Per tant,  $d(O,\pi)=\sqrt{14}$  també.

Com que sé que està a una distància de  $\sqrt{14}$  unitats del punt  $O=(0,0,0)$ , li aplicaré la fórmula de la distància de un punt a un pla (final de la pàg. 146). Quedaria:

$$\sqrt{14} = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}}, \quad \text{o sigui,} \quad \sqrt{14} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} \quad \text{i llavors,}$$

$\sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = |k|$ , és a dir,  $14 = |k|$ , que proporciona  $k = \pm 14$ . Això

significa que hi ha dos plans que estan a una distància de  $\sqrt{14}$  unitats de l'origen de coordenades i que són  $3x-2y+z-14=0$  i  $3x-2y+z+14=0$  però la veritat és que només un dels dos conté el punt  $P=(3,-2,1)$ . Substitueu i comprovareu que només el  $3x-2y+z-14=0$  conté el punt P i, per tant, només ell és vàlid.

L'exercici 25 pàg. 147 és semblant a la 2a part del 23 pàg. 147. Aquest exercici és de tipus "Selectivitat".

### • **Exercicis de la pàg. 149 i altres relacionats:**

#### **Distància entre dues rectes:**

Hi ha diversos casos possibles:

- Si dues rectes són coincidents o secants la distància entre elles és 0.
- Si dues rectes són paral·leles la distància entre elles és la distància d'un punt concret d'una a l'altra recta i, per tant, podem calcular-la amb la fórmula de la distància d'un punt a una recta (pàg. 145).

- Per calcular la distància entre dues rectes que s'encreuen cal aplicar la fórmula que apareix a la pàg. 148. En ella, A i A' són punts concrets respectius de les rectes r i r' i  $\vec{v}$  i  $\vec{v}'$  són els respectius vectors directors.

Ex. 26 pàg. 149 (sobre distància entre dues rectes). Abans de res cal estudiar la posició relativa de cada parell de rectes, ja que cal tenir en compte que si són coincidents o secants, la distància serà 0; si són paral·leles podem agafar un punt concret d'una d'elles i calcular la distància d'aquell punt concret a l'altra recta (pàg. 145); si s'encreuen cal usar la fórmula de la distància entre dues rectes que s'encreuen: volum del paral·lelepípede... dividit per l'àrea del paral·lelogram... (fórmula de la pàg. 148). Podeu fer opcionalment el 55 pàg. 158 que és semblant.

### • **Exercicis de la pàg. 150 i altres relacionats:**

#### **Distància entre dos plans:**

Cal tenir en compte que si són coincidents o secants, la distància que els separa és 0, mentre que si són paral·leles, la distància es pot calcular com la distància d'un punt concret d'un pla a l'altre pla (usant la fórmula de la pàg. 146). En qualsevol cas convindria tenir els plans en forma general, ja que d'aquesta manera és molt senzill trobar-ne la posició relativa.

El 27 pàg. 150 i el 56 pàg. 158 són semblants i cal aplicar les indicacions del paràgraf anterior per realitzar-los.

El 28 pàg. 150 i el 59 pàg. 159 són semblants i de tipus "Selectivitat". Detallarem el 28, ja que el 59 es planteja igual.

Busquem un pla paral·lel al  $2x-3y+z-1=0$  i, per tant, tindrà l'estructura  $2x-3y+z+k=0$ . Sabem que la distància entre aquests dos plans paral·lels val  $3\sqrt{2}$ . Com que els plans són paral·lels, la distància que hi hagi entre un punt del pla que em donen

$2x-3y+z-1=0$  i el pla que busco  $2x-3y+z+k=0$  també serà  $3\sqrt{2}$ . M'interessa trobar, doncs, un punt concret del pla que em donen:  $2x-3y+z-1=0$ . Si poso  $x=0$  i  $y=0$  em queda  $0+0+z-1=0$ , que em diu que  $z=1$ . Per tant, un punt concret del pla que em donen és  $(0,0,1)$ . Llavors, la distància d'aquest punt al pla que busco ( $2x-3y+z+k=0$ ) sé que val  $3\sqrt{2}$ . Ara aplico la fórmula del final de la pàg. 146, de la distància d'un punt a un pla:

$$3\sqrt{2} = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}. \text{ Operant, queda: } 3\sqrt{2} = \frac{|1+k|}{\sqrt{14}}. \text{ O sigui,}$$

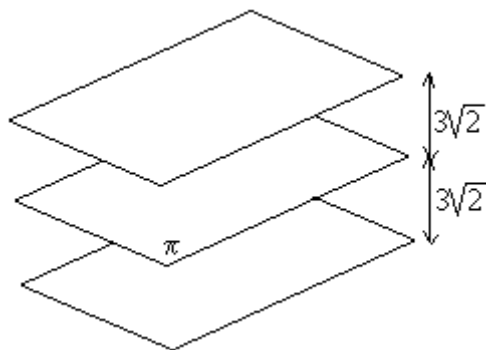
$$3\sqrt{2}\sqrt{14} = |1+k|$$

Com que  $\sqrt{2}\sqrt{14} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$ , l'equació anterior queda:

$3 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = |1+k| \rightarrow 6 \cdot \sqrt{7} = |1+k|$ . Com ja hem comentat en exercicis anteriors, treure el valor absolut suposa posar un  $\pm$  a l'altre membre de l'equació i, per tant,  $\pm 6 \cdot \sqrt{7} = 1+k \rightarrow k = -1 \pm 6\sqrt{7}$ . Hi ha, per tant, dos plans paral·lels al que em donen que compleixen que estan a una distància de  $3\sqrt{2}$  d'ell. Els dos plans serien:

$$2x - 3y + z + k + (-1 + 6\sqrt{7}) = 0 \quad \text{i} \quad 2x - 3y + z + k + (-1 - 6\sqrt{7}) = 0$$

La imatge seria més o menys aquesta:



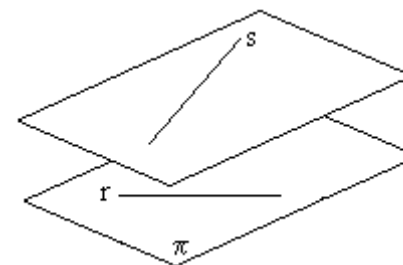
## • Exercicis de la pàg. 151 i altres relacionats:

### Distància entre recta i pla

Per fer un problema sobre distància entre recta i pla cal saber la posició relativa entre la recta i el pla, ja que si la recta està continguda en el pla o si són secants, la distància és 0. Quan són paral·lels, per trobar la distància que els separa només cal trobar la distància entre un punt concret de la recta i el pla (aplicant la fórmula del final de la pàg. 146).

Exercicis senzills: **29** pàg. 151 i **57** pàg. 158 (són semblants).

**30** pàg. 151. El dibuix següent us ajudarà a resoldre'l amb una certa facilitat:



## • Exercicis de la pàg. 152 i altres relacionats:

### Exercicis de pla mediador

El pla mediador del segment d'extremes A i B està format pels punts P(x,y) del pla que compleixen que estan a la mateixa distància de A que de B.

$$d(P,A)=d(P,B)$$

Vegeu la figura 5 de la pàg. 152.

Vegeu un exemple de determinació del pla mediador en l'**exemple resolt 16** de la pàg. 152.

L'exercici 31 pàg. 152 és com l'exemple resolt 16 de la mateixa pàgina.

### **Exercicis de plans bisectors**

Un pla bisector de dos plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  està compost per punts  $P=(x,y)$  que compleixen que la distància d'aquests punts als plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  són iguals, és a dir,

$$d(P, \pi_1)=d(P, \pi_2)$$

La fórmula de la distància d'un punt a un pla està a la pàg. 146.

Dos plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  sempre tenen dos plans bisectors  $\pi$  i  $\pi'$  que són perpendiculars (figura 6 de la pàg. 152).

Vegeu com es determinen els plans bisectors de dos plans en l'**exemple resolt 17** pàg. 152. Observeu que en eliminar els valors absoluts apareix un  $\pm$  (cosa que ja havia sortit també en aquest tema). Aquest  $\pm$  és el que produeix dues equacions, cadascuna de les quals, en arreglar-la, condueix a cadascun dels dos plans bisectors.

Exercicis sobre plans bisectors: 32 pàg. 152 i 61 pàg. 159.

### • **Exercicis de la pàg. 153 i altres relacionats:**

#### **Exercicis de perpendicular comuna**

Donades dues rectes  $r$  i  $s$  s'anomena **recta perpendicular comuna** (i en el dibuix de la pàg. 153 està representada per la lletra  $t$ ) a la recta que talla a  $r$  i a  $s$  i és perpendicular a ambdues.

Existeixen dos procediments per determinar-la, els quals estan explicats a la pàg. 153 del llibre. Vegeu l'exemple resolt pels dos mètodes a la mateixa pàg. 153.

Exercicis sobre perpendicular comuna: 33 pàg. 153 i 63 pàg. 159.

### • **Exercicis de la pàg. 154 i altres relacionats:**

#### **Exercicis sobre simetries**

Donat un punt  $P$  es pot demanar:

- Calcular el seu simètric  $P'$  respecte d'un punt  $Q$ .
- Calcular el seu simètric  $P'$  respecte d'una recta  $r$ .
- Calcular el seu simètric  $P'$  respecte d'un pla  $\pi$ .

La teoria i els exemples corresponents estan explicats en la pàg. 154.

Exercicis relacionats: 34 pàg. 154 i 64 pàg. 159.

### • **Exercicis de la pàg. 155:**

**Exemple resolt A:** mireu-vos-el. La primera part de l'exercici 35 pàg. 155 és com ell. La segona part de l'exercici es fa tenint en compte que el pla  $\pi'$  passa per un punt concret de  $s$  i té com a vectors directors el de  $s$  i el de  $s'$ .

**Exemple resolt B:** mireu-vos-el i feu l'exercici 36 pàg. 155.

### • **Exercicis de la pàg. 156:**

**Exemple resolt C:** mireu-vos-el i feu els exercicis 37 i 38 pàg. 156.

**Projecció ortogonal:** mireu-vos l'exemple resolt D. Cal dir que el llibre té un petit error: quan diu

$$\pi: (-1,0,7)+\lambda(2,1,-6)+\mu(1,3,-5)$$

ha de dir

$$\pi': (-1,0,7)+\lambda(2,1,-6)+\mu(1,3,-5)$$

(el llibre ha perdut la  $'$ ).

D'on ha sortit l'equació del  $\pi'$ ? Si observeu el dibuix veureu que el pla  $\pi'$  té com a punt concret un punt concret de la recta  $r$ , o sigui,

$(-1,0,7)$  i té com a vectors directores el de la recta, que és  $(2,1,-6)$ , ja que està continguda en  $\pi'$ , i també té com a vector director un vector normal al pla  $\pi$ , que seria  $(1,3,-5)$  (en el dibuix aniria vertical cap a dalt).

Observant el dibuix del llibre veig que la recta vermella (la  $s$ ), que és la projecció ortogonal de  $r$  sobre el pla  $\pi$ , és la intersecció dels plans  $\pi$  i  $\pi'$  (amb les equacions generals dels dos plans tinc les implícites de la recta  $s$  que busco).

Exercicis semblants són el **39** i **40** de la pàg. 156.