

NOCIONS MOLT BÀSIQUES DE LOGARITMES

(v2)

Alumne/a:



Material original propietat de Miguel Ángel García Victoria disponible a la web <https://sites.google.com/a/xtec.cat/mgarci20>, que està sota llicència de [Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 3.0 No adaptada de Creative Commons](#). Les condicions de distribució i modificació estan disponibles a l'enllaç **Avís legal** de la web de l'autor.

NOCIONS MOLT BÀSIQUES DE LOGARITMES

CONCEPTES PREVIS

Si tenim una **potència**, com per exemple 2^5 , ja sabràs que el 2 és la **base** i el 5 és l'**exponent**.

En general:

$$\text{si tinc } a^b \rightarrow a=\text{base i } b=\text{exponent}.$$

Ara observa l'exemple següent, en el qual hem efectuat alguns càlculs i hem tret algunes conclusions.

Exemple 1:

$$3^4=81 \rightarrow \text{El } 3, \text{ que és la } \text{base}, \text{ elevat al } 4, \text{ que és l'exponent, em dona } 81.$$

Això també ens permet dir el següent:

Si $3^4=81 \rightarrow 4$ és l'**exponent** al qual s'ha d'eleva la **base**, que és 3, perquè doni 81.
Diem, doncs, que $4=\log_3 81$ (això es llegeix així: 4 és el logaritme en base 3 de 81).

Vegem uns altres exemples:

Exemple 2:

Troblem ara els exponents als quals s'ha d'eleva cada base perquè surti el resultat corresponent:

a) $7^{\square}=49$

Solució: $7^2=49 \rightarrow$ El 7, que és la **base**, elevat a 2, que és l'**exponent**, em dona 49. Diem, doncs, que $2=\log_7 49$ (això es llegeix així: 2 és el logaritme en base 7 de 49).

b) $5^{\square}=125$

Solució: $5^3=125 \rightarrow$ El 5, que és la **base**, elevat a 3, que és l'**exponent**, em dona 125. Diem, doncs, que $3=\log_5 125$ (això es llegeix així: 3 és el logaritme en base 5 de 125).

c) $10^{\square}=100$

Solució: $10^2=100 \rightarrow$ El 10, que és la **base**, elevat a 2, que és l'**exponent**, em dona 100. Diem, doncs, que $2=\log_{10} 100$ (això es llegeix així: 2 és el logaritme en base 10 de 100).

d) $0,1^{\square}=0,0001$

Solució: $0,1^4=0,0001 \rightarrow$ El 0,1, que és la **base**, elevat a 4, que és l'**exponent**, em dona 0,0001. Diem, doncs, que $4=\log_{0,1} 0,0001$ (això es llegeix així: 4 és el logaritme en base 0,1 de 0,0001).

e) $8^{\square}=1$

Solució: $8^0=1 \rightarrow$ El 8, que és la **base**, elevat a 0, que és l'**exponent**, em dona 1. Diem, doncs, que $0=\log_8 1$ (això es llegeix així: 0 és el logaritme en base 8 de 1).

f) $2^{\square}=\sqrt{2}$

Solució: $2^{1/2}=\sqrt{2} \rightarrow$ El 2, que és la **base**, elevat a $1/2$, que és l'**exponent**, em dona $\sqrt{2}$. Diem, doncs, que $1/2=\log_2 \sqrt{2}$ (això es llegeix així: $1/2$ és el logaritme en base 2 de $\sqrt{2}$).

g) $10^{\square}=0,01$

Solució: $10^{-2}=0,01 \rightarrow$ El 10, que és la **base**, elevat a -2, que és l'**exponent**, em dona 0,01. Diem, doncs, que $-2=\log_{10} 0,01$ (això es llegeix així: -2 és el logaritme en base 10 de 0,01).

h) $2^{\square}=2^5$

Solució: $2^5=2^5 \rightarrow$ Aquí no calia escalfar-se molt el cap! El 2, que és la **base**, elevat a 5, que és l'**exponent**, em dona 2^5 . Diem, doncs, que $5=\log_2 2^5$ (això es llegeix així: 5 és el logaritme en base 2 de 2^5).

Abans de continuar repassa't tots els exemples anteriors, assegurant-te que els has entès bé.

CONCEPTE DE LOGARITME

A la vista de tot el que has llegit abans entendràs que la definició de logaritme sigui la següent:

Diem que **b** és el logaritme en base **a** de **c** i ho escrivim així $b = \log_a c$, si és l'**exponent** al qual s'ha d'eleva la base **a** perquè surti el número **c**, és a dir, si $a^b = c$.

En resum:

$$b = \log_a c \Leftrightarrow a^b = c$$

Per cert, quan es treballa amb logaritmes se suposa sempre que la base $a > 0$.

Tenint en compte això, els apartats de l'exemple 2 es podrien resumir així:

- a) $\log_7 49 = 2$, ja que $7^2 = 49$.
- b) $\log_5 125 = 3$, ja que $5^3 = 125$.
- c) $\log_{10} 100 = 2$, ja que $10^2 = 100$.
- d) $\log_{0,1} 0,0001 = 4$, ja que $0,1^4 = 0,0001$.
- e) $\log_8 1 = 0$, ja que $8^0 = 1$.
- f) $\log_2 \sqrt{2} = 1/2$, ja que $2^{1/2} = \sqrt{2}$.
- g) $\log_{10} 0,001 = -3$, ja que $10^{-3} = 0,001$.
- h) $\log_2 2^5 = 5$, ja que $2^5 = 2^5$.

Hi estàs d'acord? ☐ Sí. ☐ No.

Per practicar el concepte de logaritme, realitza els següents apartats del pròxim l'exercici, seguint el model:

Exercici 1:

Troba els logaritmes següents:

- a) $\log_3 81 = 4$, ja que $3^4 = 81$.
- b) $\log_2 16 = \square$, ja que $2^\square = 16$.
- c) $\log_{10} 1.000.000 = \square$, ja que $10^\square = \dots\dots\dots$.
- d) $\log_6 36 = \square$, ja que $\square^\square = \dots\dots\dots$.
- e) $\log_3 \sqrt{3} = \square$, ja que $\dots\dots\dots$.
- f) $\log_5 1 = \square$, ja que $\dots\dots\dots$.
- g) $\log_4 4^3 = \square$, ja que $\dots\dots\dots$.
- h) $\log_{10} 0,01 = \square$, ja que $\dots\dots\dots$.
- i) $\log_5 1/25 = \square$, ja que $\dots\dots\dots$.

LOGARITMES PARTICULARS

Existeixen dos tipus particulars de logaritmes, que són els *logaritmes decimals* i els *logaritmes neperians (o naturals)*:

- Per als *logaritmes decimals* la base és **10**. Se simbolitzen sense indicar la base, per exemple, $\log 7$ vol dir *logaritme decimal de 7*, o sigui, *logaritme en base 10 de 7*, o sigui $\log_{10} 7$.
- Per als *logaritmes neperians* o *logaritmes naturals* la base és el número **e**. Potser no estàs gaire familiaritzat amb ell, però és un nombre tan important en matemàtiques com el π . És un nombre irracional i val $e=2,7182818...$. La calculadora et proporcionarà una aproximació usant la tecla e^x , que et permet calcular $e^1=e$, e^2 , e^3 , i qualsevol altra potència de **e**. Prova de trobar e amb la calculadora amb ajuda de la tecla e^x . En fi, en relació al símbol que s'usa per treballar amb els logaritmes neperians et direm que és **Ln** o bé **ln**. Per exemple, $\ln 5$ vol dir *logaritme neperià de 5*, o sigui, *logaritme en base e de 5*, o sigui, $\log_e 5$.

ÚS DE LA CALCULADORA

La calculadora científica, que és molt llesta, et permetrà calcular els logaritmes decimals i els logaritmes neperians que necessitis. Comprova que la teva calculadora té, respectivament, les tecles \log i \ln per fer-ho.

Exercici 2:

Calcula els següents logaritmes decimals amb la calculadora, usant la tecla \log :

- $\log 10.000 = \dots\dots\dots$ [Recorda que aquest cas es pot fer de cap, ja que $\log 10000 = \log_{10} 10000 = 4$, atès que $10^4 = 10000$]
- $\log 100.000 = \dots\dots\dots$
- $\log 2.000 = \dots\dots\dots$ [Observa: $\log 1.000 = 3$ i $\log 10.000 = 4$; llavors, $\log 2.000$ ha sortit entre 3 i 4]
- $\log 8 = \dots\dots\dots$
- $\log 10 = \dots\dots\dots$ [Lògic, oi?]
- $\log 14 = \dots\dots\dots$
- $\log 9 = \dots\dots\dots$
- $\log 1 = \dots\dots\dots$
- $\log 0,001 = \dots\dots\dots$
- $\log 0,01 = \dots\dots\dots$
- $\log 0,1 = \dots\dots\dots$
- $\log 0,0001 = \dots\dots\dots$
- $\log 0,006 = \dots\dots\dots$
- $\log 0,045 = \dots\dots\dots$
- $\log 37 = \dots\dots\dots$
- $\log 0 = \dots\dots\dots$ [Ui! Què passa aquí? Existeix algun exponent al qual pugui jo elevar la base, que és 10, perquè surti 0? ☐ Sí o ☐ no?]
- $\log(-7) = \dots\dots\dots$ [Ui! Què passa aquí? Existeix algun exponent al qual pugui jo elevar la base, que és 10, perquè surti una quantitat negativa? ☐ Sí o ☐ no?]

Exercici 3:

Calcula els següents logaritmes neperians amb la calculadora, usant la tecla \ln :

- a) $\ln 18 = \dots\dots\dots$
- b) $\ln 0,21 = \dots\dots\dots$
- c) $\ln(6/11) = \dots\dots\dots$
- d) $\ln 9,1 = \dots\dots\dots$
- e) $\ln e = \dots\dots\dots$ [Lògic, oi?]
- f) $\ln 150 = \dots\dots\dots$
- g) $\ln 0,003 = \dots\dots\dots$
- h) $\ln 720000 = \dots\dots\dots$
- i) $\ln 1 = \dots\dots\dots$ [Lògic, oi?]
- j) $\ln e^4 = \dots\dots\dots$ [Lògic, oi?]
- k) $\ln(1/e) = \ln(e^{-1}) = \dots\dots\dots$ [Lògic, oi?]
- l) $\ln 0 = \dots\dots\dots$ [Ui! Què passa aquí? Existeix algun exponent al qual pugui jo elevar la base, que és el número e , perquè surti 0? ☐ Sí o ☐ no?]
- m) $\ln(-38) = \dots\dots\dots$ [Ui! Què passa aquí? Existeix algun exponent al qual pugui jo elevar la base, que és el número e , perquè surti una quantitat negativa? ☐ Sí o ☐ no?]

PROPIETATS DELS LOGARITMES

Els logaritmes, ja siguin decimals, neperians o en qualsevol altra base $a > 0$, gaudeixen de les següents propietats (no les demostrarem¹):

Propietats dels logaritmes:

- P0) $a^{\log_a b} = b$ [és lògica, surt a partir de la definició de logaritme]
- P1) $\log_a a = 1$ [és lògica, surt a partir de la definició de logaritme]
- P2) $\log_a a^m = m$ [també és lògica, surt a partir de la definició]
- P3) $\log_a 1 = 0$ [també és lògica, surt a partir de la definició]
- P4) $\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$ [o sigui, el logaritme del producte és la suma dels logaritmes]
- P5) $\log_a(p/q) = \log_a p - \log_a q$ [o sigui, el logaritme del quocient és la resta dels logaritmes]
- P6) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$ [en el logaritme d'una potència, l'exponent pot sortir fora multiplicant el logaritme]
- P7) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ [aquesta propietat és lògica tenint en compte que $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ i la propietat P6]
- P8) $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ [fórmula del canvi de base de logaritmes]

Per tal que entenguis les propietats anteriors, posarem exemples d'ús d'elles:

¹ Algunes propietats són una lògica conseqüència de la definició de logaritme i altres estan relacionades amb les propietats de les potències (trobareu la demostració gairebé en qualsevol llibre).

Exemple 3:

Observa com hem usat les diverses propietats dels logaritmes per calcular o desenvolupar les quantitats que apareixen a continuació:

- a) $4^{\log_4 7} = 7 \leftarrow$ Hem usat la propietat P0) $a^{\log_a b} = b$.
- b) $\log_3 3 = 1 \leftarrow$ Hem usat la propietat P1) $\log_a a = 1$.
- c) $\log_7 7^3 = 3 \leftarrow$ Hem usat la propietat P2) $\log_a a^m = m$.
- d) $\log_5 1 = 0 \leftarrow$ Hem usat la propietat P3) $\log_a 1 = 0$.
- e) $\log_2 (3x) = \log_2 3 + \log_2 x \leftarrow$ Hem usat la propietat P4) $\log_a (p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$.
- f) $\log_4 (5/y) = \log_4 5 - \log_4 y \leftarrow$ Hem usat la propietat P5) $\log_a (p/q) = \log_a p - \log_a q$.
- g) $\log_2 x^3 = 3 \cdot \log_2 x \leftarrow$ Hem usat la propietat P6) $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$.
- h) $\log_3 \sqrt[5]{K} = \frac{1}{5} \cdot \log_3 K \leftarrow$ Hem usat la propietat P7) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$.
- i) $\log_7 43 = \frac{\log_{10} 43}{\log_{10} 7} = \text{calculadora} = \frac{1,633468456}{0,84509804} = 1,932874505 \leftarrow$ Hem usat la propietat P8)
 $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ i la tecla $\boxed{\log}$ de la calculadora.

Com acabeu de veure, el fet que la calculadora només tingui tecles per fer logaritmes decimals ($\boxed{\log}$) o neperians ($\boxed{\ln}$) no és un problema, ja que la fórmula del canvi de base de logaritmes, o sigui, la propietat 7, ens permet calcular un logaritme *en qualsevol base* a partir d'ella i de la tecla $\boxed{\log}$ de la calculadora (o $\boxed{\ln}$).

Exercici 4:

Inventa't diversos apartats (del b) al i)), d'una manera semblant a com s'ha fet en l'exemple 3 anterior, per tal de posar un exemple d'ús de cadascuna de les propietats dels logaritmes:

- b)
- c)
- d)
- e)
- f)
- g)
- h)
- i)

PROBLEMES PRÀCTICS

En quines situacions pràctiques poden aparèixer logaritmes?

Vegem, en primer lloc, un exemple:

Exemple 4:

Suposem que un virus molt contagiós s'introdueix en el cos d'una persona i al cap d'una setmana² és capaç d'infectar a altres tres persones, moment en el qual mor en la persona contagiosa destruït pel seu sistema immunològic.

El procés es repeteix i la setmana següent, cadascun dels tres infectats contagia el virus a tres noves persones (ara ja són $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ els nous contagiats!), moment en el qual el virus mor en els tres pacients contagiats per acció de llur sistema immunològic.

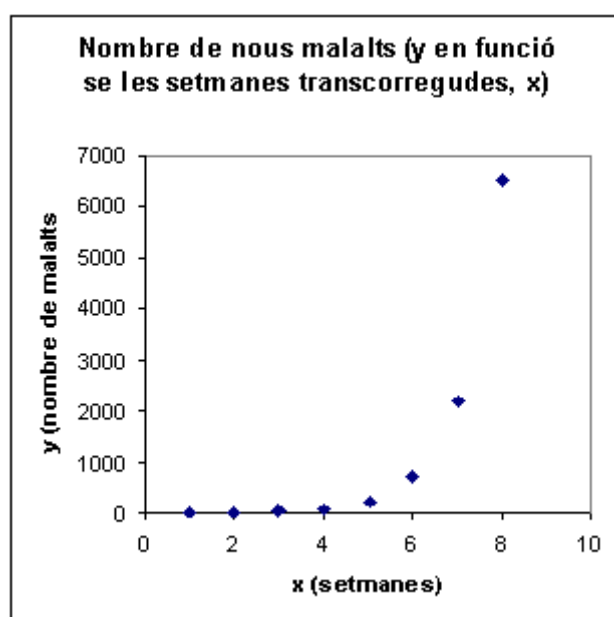
La setmana següent els nous infectats són $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$.

La setmana següent en són $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ i així successivament.

Com veus, el nombre de setmanes transcorregudes (x) i el nombre de nous malalts (y) és:

<i>x</i> (setmanes transcorregudes)	1	2	3	4	5	...	18	...	x
<i>y</i> (nous malalts)	3	$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$...	$3^{18} = 387.420.489$...	$y = 3^x$

Si representéssim gràficament les primeres dades corresponents a aquesta funció tindríem el següent:



Com es pot veure, aquesta funció $y=3^x$ creix molt ràpidament (per cert, en el gràfic no hem unit els punts perquè el nombre d'infectats és discret, no continu, és a dir, en un cert moment, no hi ha, per exemple, 25,4 persones infectades).

La funció $y=3^x$ s'anomena **funció exponencial de base 3**. Les funcions exponencials tenen, en general, l'estructura següent:

$$y=a^x$$

² En aquest exemple el virus infecta nous malalts cada setmana, però aquest període de temps podria haver estat qualsevol altre (un mes, dos dies, cinc dies, etc.) i l'exercici es faria igual.

on $a > 0$ és la base i la variable independent x es troba a l'exponent.

En el nostre exemple hem vist que després de 18 setmanes tenim un nombre de nous malalts igual a $y = 3^{18} = 187.420.489$. Són molts, oi?

Substituint la x en la funció exponencial $y = 3^x$ obtenim el nombre de malalts que hi ha transcorregut un cert nombre x de setmanes.

Ara bé, el més difícil és el problema invers, és a dir, suposem que jo sé que en cert moment hi ha $y = 2.187$ nous malalts. Em podria preguntar: quantes setmanes (x) han transcorregut?

Es tracta, doncs, de resoldre la següent equació:

$$2187 = 3^x$$

Una equació d'aquest tipus, on la incògnita apareix en un exponent, s'anomena **equació exponencial**.

L'equació anterior, encara que no ho sembli, és relativament senzilla, ja que n'hi ha d'altres (d'equacions exponencials) molt més complicades. Hi ha dues maneres de resoldre-la: una, poc general i que no sempre funciona, i, l'altra, molt general, aplicable a tots els casos semblants a aquests.

- *Primera forma de resoldre l'equació $2187 = 3^x$:*

Es tracta de, amb molta paciència, fer la descomposició factorial del nombre 2187. Si es fa es veu que $2187 = 3^7$. Portant aquesta informació a l'equació $2187 = 3^x$ (és a dir, substituint 2187 per 3^7) ens queda $3^7 = 3^x$. Llavors, d'aquí és fàcil deduir que $7 = x$, o sigui, que $x = 7$ (cal que transcorrin 7 setmanes perquè el nombre de nous malalts sigui 2187).

Aquest és un mètode que no sempre funciona (pensem, per exemple, que en lloc de tenir el 2187 tinguéssim un nombre decimal: llavors, ja no podríem ni fer la descomposició factorial!). Només funciona en casos molt particulars (amb nombres relativament petits que són potència de 3 en aquesta equació particular).

- *Segona forma de resoldre l'equació $2187 = 3^x$:*

Partim de $2187 = 3^x$. Ara prenem logaritmes decimals a cada membre de l'equació, de manera que ens queda:

$$\log 2187 = \log 3^x$$

Ara bé, si recordem la propietat P6) dels logaritmes aplicada al 2n membre, tenim:

$$\log 2187 = x \cdot \log 3$$

I ja gairebé la tenim resolta. Passem $\log 3$ (que és un número) dividint cap al 1r membre i queda:

$$\frac{\log 2187}{\log 3} = x$$

O sigui, $x = \frac{\log 2187}{\log 3}$, i, usant la calculadora, obtenim que $x = \frac{3,339848783}{0,477121254} = 7$ (setmanes). Òbviament, el mateix resultat que abans.

Exercici 5:

A partir de l'exemple anterior (el del virus), determina quantes setmanes han de passar perquè el nombre de nous malalts sigui el que et diem en cadascun dels apartats següents:

a) 6561 nous malalts. [Sol.: $x = 8$ setmanes]

- Fes-ho aquí pel 1r mètode:

- Fes-ho aquí pel 2n mètode:

b) 531.441 nous malalts. *[Aquest apartat i els següents els hauràs de fer exclusivament pel 2n mètode. Sol.: $x=12$ setmanes]*

c) 43.046.721 nous malalts. *[Sol.: $x=16$ setmanes]*

d) 1.162.261.467 nous malalts. *[Sol.: $x=19$ setmanes]*

Exercici 6:

Un bacteri es reproduïx per bipartició cada hora. Això vol dir que el bacteri mare es trenca per la meitat, desapareixent però generant dos bacteris fills idèntics. Al cap d'una altra hora, cada bacteri desapareix donant lloc a dos fills. El procés continua en transcórrer el temps.

- a) Omple la taula següent:

x (hores transcorregudes)	1	2	3	4	...	14	...	x
y (bacteris)					y=

- b) Completa: *El nombre y de bacteris que hi ha després d'haver transcorregut x hores ve donat per la fórmula:*

$$y=$$

Aquesta expressió és una funció que s'anomena funció de base

- c) *Ara troba quants bacteris hi haurà transcorregudes 9 hores. [Sol.: 512 bacteris]*
- d) *Ara troba quants bacteris hi haurà transcorregudes 20 hores. [Sol.: 1048576 bacteris]*
- e) *Ara troba quants bacteris hi haurà transcorreguts tres dies sencers (per cert, tres dies sencers són hores!). [Sol.: $4,722366483 \cdot 10^{21}$ bacteris]*
- f) *I ara ve la part més difícil: si el nombre de bacteris en un moment donat és de 16384, quantes hores han transcorregut? Et recomanem que utilitzis el 2n mètode, és clar. [Sol.: 14 hores]*
- g) *Si hi ha 1024 bacteris, quant de temps ha transcorregut? [Sol.: 10 hores]*
- h) *Si hi ha 32768 bacteris, quant de temps ha transcorregut? [Sol.: 15 hores]*

Ara veurem un altre exemple:

Exemple 5:

Una substància radioactiva es desintegra seguint la llei següent: $m=m_0 \cdot e^{-t/T}$. En aquesta fórmula m_0 és la massa que hi havia inicialment, és a dir, en l'instant $t=0$; m és la massa que hi ha en un instant de temps t concret; t és el temps transcorregut; i T és una constant que depèn del material concret que es desintegra i té unitats de temps³.

Suposem que es disposa d'una massa inicial $m_0=3$ g d'una substància que té una $T=29,5$ min.

- a) Troba la massa que queda i la que s'ha desintegrat després de 2 hores.

Solució: $m_0=3$ g (llavors, la m també sortirà en g); $t=2$ h; $T=29,5$ min. La fórmula a usar és $m=m_0 \cdot e^{-t/T}$, però perquè tot vagi bé haurem de passar t i T a minuts (o tot a hores, com es vulgui). Llavors, $t=120$ min; $T=29,5$ min. Ara ja ho puc posar tot en la fórmula:

$$m=m_0 \cdot e^{-t/T} \rightarrow m=3 \cdot e^{-120/29,5} \rightarrow \text{calculadora} \rightarrow m \approx 0,051345 \text{ g.}$$

Per tant, la massa que queda és $m \approx 0,051345$ g i, llavors, la que s'ha desintegrat serà, doncs, $m_0-m=3-0,051345=2,948655$ g.

- b) Quin percentatge queda de la massa inicial? Quin percentatge s'ha desintegrat?

Solució: En termes relatius queda un $m/m_0=0,051345/3=0,01712=1,712\%$. I s'ha desintegrat un $100\%-1,712\%=98,288\%$.

Ara suposem que es disposa d'una altra mostra del mateix tipus de material però de massa inicial desconeguda (m_0).

- c) Troba quant de temps ha de transcórrer perquè la massa que quedi sigui un 63% de la massa que hi havia inicialment.

Solució: En aquest cas $m=63\%$ de $m_0=0,63 \cdot m_0$. Si portem aquesta informació a la fórmula, tenint en compte també que $T=29,5$ min, queda:

$$m=m_0 \cdot e^{-t/T} \rightarrow 0,63 \cdot m_0=m_0 \cdot e^{-t/29,5} \rightarrow \text{Simplificant les } m_0 \text{ queda: } 0,63=e^{-t/29,5}$$

Ara tenim aquí una **equació exponencial**, ja que la incògnita es troba en un exponent. Vegem com es resol (suposem que ja us sonarà perquè n'hem resolt alguna de fàcil abans...): Prenem logaritmes neperians (aquí convenen els neperians, ja que la base és e , però de totes maneres, treballant amb logaritmes decimals l'exercici es resoldria més o menys igual) a cada membre de l'equació:

$$\ln 0,63=\ln e^{-t/29,5}$$

Ara aplico al 2n membre la propietat P2) de les propietats dels logaritmes i queda:

$\ln 0,63=-t/29,5$. Ara passo el 29,5 multiplicant al 1r membre, ja que està dividint al 2n:

$29,5 \cdot \ln 0,63=-t \rightarrow t=-29,5 \cdot \ln 0,63 \rightarrow \text{calculadora} \rightarrow \boxed{t=13,63004606 \text{ min}}$ (el temps t ve en min, ja que la T l'havia posat en min). O també, $\boxed{t=13 \text{ min } 37,8028 \text{ s}}$.

Exercici 7:

Una substància radioactiva té una $T=2,15$ d ($d=dies$). a) Troba quant de temps ha de transcórrer perquè la massa que quedi sigui un 90% de la inicial. [Sol: $0,226525108$ d $\approx 5h26min12s$]

³ Si no t'aclareixes, en lloc de posar $m=m_0 \cdot e^{-t/T}$ pots posar $y=m_0 \cdot e^{-x/T}$ (aquí la y seria la massa en cada instant i la x el temps transcorregut), però no és imprescindible; ja veuràs com l'explicació està bastant clara tal com està.

b) Troba quant de temps ha de transcórrer perquè la massa *desapareguda* sigui un 30% de la inicial. [Sol.: $0,766851129 d \approx 18h24min16s$]

c) Troba quant de temps ha de transcórrer perquè *hagi desaparegut* la meitat de la substància. [Sol.: $1d11h45min59s$]

d) Quin percentatge de substància *queda*⁴ després d'una setmana? [Sol.: 3,855%]

⁴ La quantitat relativa de substància que queda serà m/m_0 (en tant per un). En tant per cent serà $100 \cdot (m/m_0) \%$.