SUMA o ADDICIÓ (operació interna)

Per a dues matrius $A_{m.n}$ i $B_{m,n}$ s'anomena **matriu suma algèbrica** a la matriu $C_{m,n}$ els elements de la qual són la suma dels elements corresponents a les matrius $A_{m.n}$ i $B_{m,n}$. Simbòlicament tindrem:

$$A_{m,n} + B_{m,n} = (a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n} = (c_{ij})_{m,n} = C_{m,n}$$

Dues matrius del mateix ordre s'anomenen **conformes** respecte a l'addició algèbrica. Dues matrius de diferent ordre no es poden sumar.

PROPIETATS:

1) **ASSOCIATIVA**: $A_{m,n} + (B_{m,n} + C_{m,n}) = (A_{m,n} + B_{m,n}) + C_{m,n}$
2) **COMMUTATIVA**: $A_{m,n} + B_{m,n} = B_{m,n} + A_{m,n}$
3) EXISTÈNCIA DE **MATRIU NEUTRA O ZERO**: $0_{m,n} + A_{m,n} = A_{m,n}$
   $O_{m,n}$ és una matriu amb tots els elements 0
4) EXISTÈNCIA DE **MATRIU OPOSADA**: $A_{m,n} + (-A_{m,n}) = O_{m,n}$
   $-A_{m,n}$ s'obté canviant de signe tots els elements de la matriu $A_{m,n}$

Per cumplir les propietats anteriors diem que $(M_{m,n};+)$ és un **GRUP ABELIÀ o COMMUTATIU.**

Es defineix la **DIFERÈNCIA** de matrius com: $A_{m,n} - B_{m,n} = A_{m,n} + (-B_{m,n})$ la suma de la matriu oposada.

PRODUCTE PER UN ESCALAR (operació externa)

Per una matriu $A_{m,n}$ i un nombre real qualsevol k (anomenat escalar), es defineix com a producte de k per $A_{m,n}$ a la matriu que resulta de multiplicar cada element de $A_{m,n}$ per k: $k.A_{m,n} = k.(a_{ij})_{m,n} = (k.a_{ij})_{m,n} = (c_{ij})_{m,n} = C_{m,n}$

PROPIETATS:

1) $(k+k').A_{m,n} = k.A_{m,n} + k'.A_{m,n}$
2) $k.(k'.A_{m,n}) = (k.k').A_{m,n}$
3) $k.(A_{m,n} + B_{m,n}) = k.A_{m,n} + k.B_{m,n}$
4) $1.A_{m,n} = A_{m,n}$

El conjunt de les matrius de nombres reals d'un mateix ordre, per a l'operació interna addició i l'operació externa producte per un escalar real, és un **ESPAI VECTORIAL sobre el cos R.**

MATRIU TRANSPOSADA:

Per a la matriu $A_{m,n}$ s'anomena **matriu transposada** la matriu $A^T_{m,n}$ que resulta de intercanviar les files per les columnes de manera ordenada:

si $A_{m,n} = \left(a_{ij}\right)_{m,n} \Rightarrow A^T_{m,n} = \left(a_{ji}\right)_{m,n}$

PROPIETATS:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(k.A)^T = k.A^T$
4) **MATRIU SIMÈTRICA:** $A^T = A$
5) **MATRIU ANTISIMÈTRICA:** $A^T = -A$

MULTIPLICACIÓ DE MATRIUS:

La matriu producte $P_{m,q}$ de dues matrius $A_{m,n}$ i $B_{n,q}$ és el resultat de les sumes dels productes dels elements de les files de la primera matriu pels elements de les columnes de la segona matriu. La condició que s'imposa perquè es puguin multiplicar és que el nombre de columnes de la primera matriu sigui igual al nombre de files de la segona matriu: $A_{m,n}.B_{n,q} = P_{m,q}$

El elements de la matriu producte són: $p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$

PROPIETATS:

1) **ASSOCIATIVA:** A.(B.C)=(A.B).C
2) **DISTRIBUTIVA:** A.(B+C)=A.B+A.C
   (A+B).C=A.C+B.C
3) **MATRIU UNITAT:** A.I=A
   I.A=A
4) **NO COMMUTATIVA:** en general A.B $\neq$ B.A
5) $(A.B)^T = B^T.A^T$
6) A.B=O no implica necessàriament que A=0 o B=0
7) A.B=A.C no implica necessàriament que B=C.

PROPIETATS DELS DETERMINANTS:

1) El determinant de la matriu zero és zero

2) Si tots els elements d'una fila (o d'una columna) d'una matriu són zero, el determinant de la matriu és zero.

3) Si multipliquem per un nombre real k tots els elements d'una fila (o d'una columna) , el determinant queda multiplicat per k.

4) $|k.A_n| = k^n.|A_n|$

5) El determinant d'una matriu A i el de la seva matriu transposada A^T són iguals.

6) Si s'intercanvien entre si dues files (o columnes) el determinant canvia de signe.

7) Si una matriu té dues files (o columnes) iguals, el determinant és igual a zero.

8) Si en una matriu hi ha dues files (o dues columnes) proporcionals, el determinant és zero.

9) Si una matriu té una fila (o una columna) combinació lineal d'altres files (o columnes), el determinant és zero.

10) El determinant d'una matriu no canvia si se suma a una fila (o columna) una combinació lineal d'altres files (o columnes).

11) En general: $|A_n + B_n| \neq |A_n| + |B_n|$

12) $|A_n.B_n| = |A_n|.|B_n|$

13) Si dos determinant tenen iguals, respectivament, totes les files menys una (totes les columnes menys una), la seva suma és un altre determinant amb les mateixes files iguals, menys la fila desigual que té per elements la suma ordenada de les dues files (o columnes).

14) El determinant de la matriu unitat és 1.

15) El determinant de la matriu escalar és k^n

16) El determinant d'una matriu diagonal és el producte dels elements de la diagonal principal.

17) El determinant d'una matriu triangular és el producte dels elements de la diagonal principal.

18) Si $|A_n| = a \quad \Rightarrow \quad |A_n^{-1}| = \dfrac{1}{a}$

MATRIU ORTOGONAL:

Una matriu és ortogonal si: $\begin{cases} A.A^T = I \\ A^T.A = I \end{cases}$

CONSEQÜÈNCIES:

1) $A^T = A^{-1}$

2) $\det A = \pm 1$

Demostració:

per definició

$$A.A^T = I$$
$$\det(A.A^T) = \det I$$
$$\det A . \det A^T = 1$$
$$\det A . \det A = 1$$
$$(\det A)^2 = 1$$
$$\det A = \sqrt{1} = \pm 1$$

2.1) **MATRIU ORTOGONAL PRÒPIA**: si $\det A = 1$

2.2) **MATRIU ORTOGONAL IMPRÒPIA**: si $\det A = -1$

3) Si considerem que les columnes d'una matriu quadrada són vectors (vectors columna), si és ortogonal, aquests vectors són unitaris i perpendiculars entre sí.