INTEGRALS DEFINIDES, ÀREES I VOLUMS:

1) $\int_1^e x\ln x dx$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

3) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin x^2 dx$

4) $\int_{-1}^1 (x^3+\sin x)dx$

5) Calcula $\int_{-2}^2 f(x)dx$ si $f(x)=\begin{cases} \sin 7x+1 & x\le 1 \\ x+2 & -1<x\le 0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$

6) Determineu l'àrea de la regió del pla limitada per l'eix d'abscisses, la funció $y=x.e^x$ i les rectes x=0 i x=1.

7) L'àrea limitada entre les corbes $y=x^n$ i $y=\sqrt[n]{x}$ es 0,6. Determina n.

8) Determina l'àrea compresa entre les corbes $y= 5-x^2$ i $y=x^2$.

9) Considerem la funció y=sinx en l'interval [0,2π]

   a) dibuixa-la
   b) calcula $\int_0^{2\pi} \sin x dx$
   c) calcula l'àrea que limita aquesta corba y la recta y=0
   d) Determina el volum engendrat en girar 360º al voltant de l'eix "x".

10) Determina l'àrea limitada per y=0, x=1, x=e i la funció $y=(\ln x)^2$.

11) Calculeu l'àrea limitada per $y=x^2$ i y=x+2.

12) Calculeu l'àrea d'una circumferència.

13) Calculeu l'àrea d'una el.lipse.

14) Trobeu el volum de la regió determinada per la corba $y=e^{-x}$, l'eix x, l'eix y i la recta x=3 quan gira 360º al voltant de l'eix x.

15) Trobeu l'àrea del recinte limitat per les gràfiques y=logx i y=1 i els eixos de coordenades.

16) $\int_{-2}^2 |x+1|dx$

17) $\int_0^2 |x+1|dx$

18) $\int_0^3 |x^2-3x+2|dx$

19) Calculeu el volum de l'esfera

20) Calculeu el volum d'un con de revolució

21) Calculeu la c perque la corba $y=-x^3+c^3$ (c>0) i les rectes y=0 i x=0 limitin un àrea 3

22) Calculeu el valor de k>0 tal que el cos de revolució generat per la corba $y=kx^2$ en [0,1] en girar al voltant de l'eix de les x valgui 1.

23) Calculeu l'àrea entre la corba $y=1/2\ x^2$, la tangent en el punt x=1 i la recta y=0.

237) $\int \sin(4x-3)dx =$

238) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx =$

239) $\int \frac{1}{x\ln x}dx =$

240) $\int (2+3x)e^{5-x}dx =$

241) $\int (x\cos x - 3\cos x)dx =$

242) $\int \frac{x^3-1}{x^3-3x^2+2x}dx =$

243) $\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx =$

244) $\int \frac{1}{x^3-1}dx =$

245) $\int \cos^3 x \sin 3dx =$

246) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx =$

247) $\int \sin 7x \cos 5x dx =$

248) $\int \frac{e^{3x}+5e^{2x}+e^x-1}{e^x}dx =$

249) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx =$

250) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}dx =$

251) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}dx =$

252) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx =$

253) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx =$

254) $\int \frac{1}{x\sqrt{(4x^2+9)}}dx =$

255) $\int \frac{1}{x\sqrt{(x^2-7)}}dx =$

256) $\int \frac{1}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}dx =$

257) $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-6)}}dx =$

258) $\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx =$

259) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx =$

260) $\int \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}dx =$

261) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx =$

262) $\int \frac{(x+5)}{(x+4)\sqrt{x+2}}dx =$

263) $\int \frac{1}{\sqrt{2x}(9+\sqrt[3]{2x})}dx =$

264) $\int \frac{1}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}dx =$

265) $\int \frac{1}{x-x^{\frac{4}{3}}}dx =$

266) $\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}dx =$

267) $\int \frac{(x^2+x)}{(x-1)(x^2+1)}dx =$

268) $\int \frac{x-18}{4x^3+9x}dx =$

269) $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx =$

270) $\int \frac{5x^3-3}{x^3-x}dx =$

271) $\int \frac{1}{x^3+8}dx =$

272) $\int \frac{4x}{x^3+4x}dx =$

273) $\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx =$

274) $\int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^2 dx =$

275) $\int \frac{1}{e^x\sqrt{1-e^x}}dx =$

189) $\int \frac{3x+1}{x^2+9}dx =$

190) $\int \frac{3x-2}{\sqrt{9-x^2}}dx =$

191) $\int (e^{5x}+e^{9x})dx =$

192) $\int 6x.e^{-x^2}dx =$

193) $\int \sin(4x+5)dx =$

194) $\int \sin^2\frac{x}{4}dx =$

195) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$

196) $\int tag^2 x dx =$

197) $\int \sec\frac{x}{2}tag\frac{x}{2}dx =$

198) $\int (tagx+\sec x)^2 dx =$

199) $\int \frac{2x^3-5x+3}{x^4-5x^2+6x}dx =$

200) $\int 5x^3(4-x^4)dx =$

201) $\int x^2\sin x dx =$

202) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx =$

203) $\int \frac{4}{x^3-7x-6}dx =$

204) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx =$

205) $\int \frac{3}{1-\sin x}dx =$

206) $\int tag^3 x dx =$

207) $\int \ln(x^2)dx =$

208) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx =$

209) $\int \frac{1}{2+\cos x}dx =$

210) $\int \frac{1}{(x-5)^6}dx =$

211) $\int \frac{1}{3+5x^2}dx =$

212) $\int \frac{\sin e^{-x}}{e^x}dx =$

213) $\int xe^{2x}dx =$

214) $\int arctag 2x dx =$

215) $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx =$

216) $\int \frac{x}{x^2+2x+17}dx =$

217) $\int \cos 5x\cos 3x dx =$

218) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx =$

219) $\int \frac{1}{x^2-1}dx =$

220) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+x+1}dx =$

221) $\int \frac{dx}{x\left[\ln^3 x-2\ln^2 x-\ln x+2\right]} =$

222) $\int \frac{x+1}{x^3-3x+2}dx =$

223) $\int x\ln(1+x)dx =$

224) $\int \cos(\ln x)dx =$

225) $\int \frac{3x}{(x^2+9)^4}dx =$

226) $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx =$

227) $\int \frac{x^2}{(x-2)^2}dx =$

228) $\int 4x.e^{x\sqrt{2}}dx =$

229) $\int (3x-1).3^{-x}dx =$

230) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx =$

231) $\int \frac{x-1}{(x-2)(x+1)}dx =$

232) $\int \frac{x}{x^3-4x^2+5x-2}dx =$

233) $\int \frac{2-x}{(x-1)^2+4}dx =$

234) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx =$

235) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx =$

236) $\int \frac{\cos x}{1-\cos x}dx =$

INTEGRALS VARIADES

143) $\int \frac{x^3-6x+5}{x^2}dx =$

144) $\int \frac{2x-1}{2x+3}dx =$

145) $\int \frac{4x^2-2\sqrt{x}}{x}dx =$

146) $\int \sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{x})dx =$

147) $\int \sin^2 x.\cos x dx =$

148) $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{1+sinax}}dx =$

149) $\int \frac{e^x}{a+be^x}dx =$

150) $\int \frac{e^t+2}{e^t+2t}dt =$

151) $\int \frac{x^2+2}{x+1}dx =$

152) $\int \sqrt{e^x}dx =$

153) $\int \sec^2 x dx =$

154) $\int \cot ag\frac{x}{2}dx =$

155) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2tagx}}dx =$

156) $\int (\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2})dx =$

157) $\int \frac{2x-1}{2x+3}dx =$

158) $\int t\sqrt{2t^2+3}dt =$

159) $\int \sqrt{ax+b}dx =$

160) $\int tag\frac{x}{5}dx =$

161) $\int (a+bx)^2 dx =$

162) $\int \sin ax.\cos ax dx =$

163) $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx =$

164) $\int \frac{\sec^2 x}{20+10tagx}dx =$

165) $\int \cos x.e^{\sin x}dx =$

166) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}-3}{\sqrt{x}}dx =$

167) $\int x^2\sec^2 x^3 dx =$

168) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx =$

169) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{a+b\sin x}}dx =$

170) $\int \frac{1}{x^2+9}dx =$

171) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}} =$

172) $\int \frac{ax}{x^4+b^4}dx =$

173) $\int \frac{1}{(x+1)^2+9}dx =$

174) $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx =$

175) $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

176) $\int e^{tagx}\sec^2 x dx =$

177) $\int (a^5 x+e^{5x})dx =$

178) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}dx =$

179) $\int \cos(2x+1)dx =$

180) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx =$

181) $\int \frac{a}{\cos^2 bx}dx =$

182) $\int e^x\cot ag\, e^x dx =$

183) $\int \frac{dx}{tag10x} =$

184) $\int (tagx+1)^2 dx =$

185) $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx =$

186) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx =$

187) $\int \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}dx =$

188) $\int \frac{dx}{(x-4)^2+25} =$

TRIGONOMÈTRIQUES
(CANVI DE VARIABLE)

$t = tag\frac{x}{2}$

97) $\int \frac{1}{4+5\cos x}dx =$

98) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx =$

99) $\int \frac{1}{3+\cos x}dx =$

100) $\int \frac{\cos x}{5-3\cos x}dx =$

x=a.sint
x=a.tagt
x=a.sect

101) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx =$

102) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$

103) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

104) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx =$

105) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}dx =$

106) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx =$

RACIONALS

107) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx =$

108) $\int \frac{2x}{(x-3)(x+2)}dx =$

109) $\int \frac{3x+5}{x+4}dx =$

110) $\int \frac{4x+2}{(x-1)(x+3)^2}dx =$

111) $\int \frac{x^3+2x+1}{(x+1)(x+2)^2}dx =$

112) $\int \frac{2x+5}{x^2+1}dx =$

113) $\int \frac{2x^2+11x}{x^2+2}dx =$

114) $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+3)(x-1)}dx =$

115) $\int \frac{4}{(x^2+1)(x-2)}dx =$

116) $\int \frac{3x^3+2x+6}{(x-1)(x^2+5)}dx =$

117) $\int \frac{2x+3}{(x^2+2)(x^2+1)}dx =$

118) $\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3-2x^2-x+2}dx =$

119) $\int \frac{x^2+2}{x^3-x^2-x+1}dx =$

120) $\int \frac{x^2+2x+11}{x^2-2x+1}dx =$

121) $\int \frac{3x}{x^2+2x+1}dx =$

122) $\int \frac{3}{x^3-3x^2+3x-1}dx =$

INTEGRALS PER PARTS

123) $\int \ln x dx =$

124) $\int x\ln x dx =$

125) $\int x^2 \ln x dx =$

126) $\int x^3 \ln x dx =$

127) $\int x^n \ln x dx =$

128) $\int \arctan x dx =$

129) $\int x \arctan x dx =$

130) $\int x^2 \arctan x dx =$

131) $\int x^3 \arctan x dx =$

132) $\int x^n \arctan x dx =$

133) $\int x.e^x dx =$

134) $\int x^2.e^x dx =$

135) $\int x^3.e^x dx =$

136) $\int x^n.e^x dx =$

137) $\int x.\sin x dx =$

138) $\int x^2.\sin x dx =$

139) $\int x^3.\sin x dx =$

140) $\int x^n.\sin x dx =$

CÍCLIQUES

141) $\int \sin(\ln x)dx =$

142) $\int e^x \cos 2x dx =$

TIPUS ARCTANGENT

52) $\int \frac{2}{1+x^2}dx =$

53) $\int \frac{2}{1+3x^2}dx =$

54) $\int \frac{2}{5+x^2}dx =$

55) $\int \frac{2}{5+3x^2}dx =$

56) $\int \frac{a}{b+cx^2}dx =$

57) $\int \frac{2x}{1+(x^2-3)^2}dx =$

58) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx =$

59) $\int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx =$

60) $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx =$

61) $\int \frac{1}{3(x-2)^2+5}dx =$

62) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$

63) $\int \frac{1}{2x^2+4x+5}dx =$

TIPUS ARCSINUS

64) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

65) $\int \frac{2}{\sqrt{1-3x^2}}dx =$

66) $\int \frac{2}{\sqrt{5-x^2}}dx =$

67) $\int \frac{2}{\sqrt{5-3x^2}}dx =$

68) $\int \frac{2x}{\sqrt{5-3(x^2-7)^2}}dx =$

69) $\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2+12x-5}}dx =$

70) $\int \frac{3}{\sqrt{-5x^2+30x-52}}dx =$

TRIGONOMÈTRIQUES

71) $\int \sin^3 x dx =$

72) $\int \sin^5 x dx =$

73) $\int \cos^3 x dx =$

74) $\int \cos^5 x dx =$

75) $\int \sin^2 x . \cos^5 x dx =$

76) $\int \sin^2 x \cos x dx =$

77) $\int \sin^3 6x \cos 6x dx =$

78) $\int \sin^4 x . \cos^3 x dx =$

79) $\int \sin^3 x . \cos^4 x dx =$

80) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx =$

81) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx =$

82) $\int \sin^2 x dx =$

83) $\int \cos^2 x dx =$

84) $\int \sin^4 x dx =$

85) $\int \sin^4 x dx =$

86) $\int \sin^2 \frac{x}{2} . \cos^2 \frac{x}{2} dx =$

87) $\int \sin^2 2x . \cos^4 2x dx =$

88) $\int (\sin^2 x . \cos x)^2 dx =$

89) $\int \sin 2x . \cos 4x dx =$

90) $\int \sin 3x . \sin 2x dx =$

91) $\int \cos 4x . \cos 3x dx =$

92) $\int tag^2 x dx =$

93) $\int tag^3 x dx =$

94) $\int tag^4 x dx =$

95) $\int \sec^3 x dx =$

96) $\int \sec^4 x dx =$

INTEGRALS IMMEDIATES:

1) $\int x dx =$

2) $\int x^2 dx =$

3) $\int x^3 dx =$

4) $\int x^4 dx =$

5) $\int x^n dx =$

6) $\int x^{-2} dx =$

7) $\int x^{-3} dx =$

8) $\int x^{-4} dx =$

9) $\int x^{-n} dx =$

10) $\int x^{-1} dx =$

11) $\int \frac{1}{x^2} dx =$

12) $\int \frac{1}{x^3} dx =$

13) $\int \frac{1}{x^4} dx =$

14) $\int \frac{1}{x^n} dx =$

15) $\int \frac{1}{x} dx =$

16) $\int \sqrt{x} dx =$

17) $\int \sqrt[3]{x} dx =$

18) $\int \sqrt[4]{x} dx =$

19) $\int \sqrt[n]{x} dx =$

20) $\int 2^x dx =$

21) $\int 3^x dx =$

22) $\int 4^x dx =$

23) $\int a^x dx =$

24) $\int e^x dx =$

25) $\int \sin x dx =$

26) $\int \cos x dx =$

27) $\int \sec^2 x dx =$

28) $\int \cos ec^2 x dx =$

29) $\int \sec x . tag x dx =$

30) $\int \cos ec x . \cot ag x dx =$

31) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

32) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

33) $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$

34) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx =$

35) $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx =$

TIPUS POLINÒMIC

36) $\int (x^3 - 2x^2 + 5x - 4) dx =$

37) $\int (7x^5 - 5x^3 + 7x - 6) dx =$

38) $\int (x^{-3} - \frac{2}{5}x^2 + 5\sqrt{x} - \frac{6}{x}) dx =$

SEMI-IMMEDIATES POLINÒMIQUES

39) $\int 2x(x^2-4)^5 dx =$

40) $\int 3x^2(x^3-16)^7 dx =$

41) $\int (2x-4)(x^2-4x)^3 dx =$

42) $\int \cos x(4+\sin x)^5 dx =$

43) $\int f'(x)(f(x))^n dx =$

TIPUS ln

44) $\int \frac{2x}{x^2-4} dx =$

45) $\int \frac{2x^2}{x^3+5} dx =$

46) $\int \frac{e^x}{e^x+3} dx =$

47) $\int tag x dx =$

48) $\int \cot ag x dx =$

49) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$

50) $\int \sec x dx =$

51) $\int \cos ec x dx =$

129) Trobeu els punts de la hipèrbola $x^2 - y^2 = 1$ que estan a una distància mínima del punt (3/2,0) i els que estan a una distància mínima del punt (3,0)

130) Trobeu els punts de la corba $y=\frac{1}{1+x^2}$ en els quals la recta tangent té el pendent màxim

131) Una casa és en un bosc a 0.5 Km d'un camí recte. En Joan és 2 Km més avall del punt del camí més proper a la casa. En Joan pot caminar a 5 Km/h pel camí a 3 Km/h pel bosc. En quin punt haurà de deixar el camí per tal d'arribar a casa en un temps mínim?

132) Una companyia telefònica accepta instal·lar una nova central per a 100 abonats com a mínim amb una quota uniforme de 2000 ptes per a cada un d'ells. Per tal d'estimular al públic redueixen la quota per abonat en 10 pts per cada abonat que excedeixi de 100. Quin nombre d'abonat farà recaptar a la companyia la quantitat màxima?

133) En un rectangle de 4 m de perímetre es substitueixen els quatre costats per semicircumferències exteriors de diàmetre igual al costat substituït. Quines són les dimensions del rectangle original per tal de que l'àrea sigui mínima?

134) Considereu un prisma recte de base rectangular, amb un dels costats d'aquest rectangle doble de l'altre. Trobeu les dimensions que ha de tenir aquest prisma per tal que la seva àrea total sigui de 12 m^2 i el volum sigui màxim.

135) En un rectangle de 4 m de perímetre es substitueixen els quatre costats per semicircumferències exteriors de diàmetre igual al costat substituït. Quines són les dimensions del rectangle original per tal de que l'àrea sigui mínima?

136) Considereu una piràmide recta que té per base un hexàgon regular d'1 cm de costat. L'altura d'aquesta piràmide té també 1 cm. Digueu a quina distància de la base s'ha situar un punt P sobre l'altura per tal que la suma de les distàncies de P als set vèrtexs de la piràmide sigui mínima.

137) Per tal d'il·luminar una taula circular d'un metre de radi pengem del sostre de l'habitació un llum situat en la vertical del centre de la taula. A quina alçada hem de col·locar el llum per tal que la il·luminació sigui màxima?. Si designem L el llum (puntual) i P un punt qualsevol de la taula, la il·luminació ve donada per $I = k\frac{\cos\alpha}{d^2}$ on k és una constant, d la distància entre P i L i α l'angle entre PL i la vertical

138) Trobeu l'àrea lateral màxima que pot tenir un con circular recte inscrit en una esfera de 3 cm de radi

139) Volem construir una piscina la planta de la qual estigui formada per un rectangle i per un semicercle que tingui com a diàmetre un dels constats del rectangle. D'entre totes les piscines d'aquesta forma amb una superfície de 50 m^2, quina és la de perímetre mínim? N'hi ha cap de perímetre màxim?

140) Amb una corda de 4 metres volem construir dos cercles de radi igual i un quadrat. Calculeu el radi de les circumferències de manera que la suma de les àrees d'aquestes tres figures sigui mínima? Es pot calcular el radi i el costat del quadrat per tal que aquesta suma d'àrees sigui màxima?

141) Entre tots els rectangles de costats paral·lels als eixos de coordenades inscrits al quadrat de vèrtexs (1,0), (0,1),(-1,0) i (0,-1) digueu quin és el té l'àrea màxima.

TAYLOR:

1.- Troba el polinomi de Taylor associat a la funció f(x)=1/x que tingui ordre 4, en el punt x=1.

2.- Troba el polinomi de Taylor d'ordre 3 associat a la funció $f(x)= x^3 - x^2$ en el punt x=1.

3.- Escriu la fórmula de Taylor de la funció $f(x)=e^x$.

4.- Desarrolla la funció y = ln x amb la fórmula de Taylor escrivint el terme complementari corresponent a la cinquena derivada, quan x = 1.

5.- Deserrolla amb la fórmula de Mc Laurin la funció $f(x)=x.e^x$ per un valor de n=3.

6.- Calcula mitjançant un polinomi de Taylor d'ordre 2

7.- Calcula amb la fórmula de Mc Laurin el valor de sin 30 de forma aproximada.

8.- Demostra que en l'interval [0,1/4] $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + r(x) \quad essent\ |r(x)| \le 1/5!.4^5$

9.- Troba amb un polinomi de Taylor d'ordre 1 i acota l'error de: $\sqrt{437}$

10.- Demostra que si una funció té les 6 primeres derivades nul.les en x=2 i $f^{(7)}(2)=5$ i $f^{(7)}(x)$ és continua en x=2, llavors la funció és creixent en x=2.

11.- Troba el valor de e^{-5}.

12.- Calcula amb cinc decimals exactes: $\sqrt[3]{28}$

13.- Calcula amb un polinomi de Taylor d'ordre 2:

OPTIMITZACIÓ

103) Trobeu dos nombres x,y que sumin 12 i el producte sigui màxim.

104) Els costos de producció d'un article depenen del nombre d'objectes fabricats (x) segons la llei $f(x)=110+100x-x^2/2$. El preu de venda (p) depèn dels objectes venuts (x) de forma que p=125-x. Amb quin preu s'obtè un benefici màxim? (p=100)

105) Una estàtua de 3 m d'altura es troba en una base d'un metro d'altura per sobre de la visual horitzontal d'un observador. A quina distància cal acostarse per a contemplar-la amb un angle de visió màxim? (d=2m)

106) Dos punts A i B es troben situats en una platja rectilínia separats una distància D. A 3 Km en front del punt A i perpendicularment a la platja es troba un punt C al qual fer arribar una canonada provinent de B. La canonada marina costa cinc-centes mil pessetes el Km i la de platja quatre-centes mil. Troba la manera més econòmica de fer el projecte. (si D>=4D-4 a la platja).

107) En un con circuclar i recte inscrivim un cilindre ciruclar recte. Quin radi ha de tener perquè a)sigui màxim el volum (2r/3) b)ho sigui l'àrea lateral (r/2)

108) Demostra que d'entre tots els cons de revolució de volum donat V el d'àrea lateral mínima és aquell que satisfà la igualtat $h = r\sqrt{2}$

109) Quin és el radi R d'un con ciruclar recte de volum màxim inscrit en una esfera de radi r?. $(2r/2.\sqrt{3})$

110) Troba el punt de la corba $y=x^2$ tal que la distància a la recta y-x-2=0 sigui mínima. (P(1/2,1/4))

111) Troba els punta de la corba $y^2=4x$ tals que la distància al punt (4,0) sigui mínima (x=2).

112) Troba el volum del màxim cilindre que es pot inscriure en una esfera de radi 1 m. $(V=4\sqrt{3}\ \pi/9)$

113) Troba l'equació de la recta que passant pel punt (4,5) determina en el primer quadrant amb el eixos de coordenades un triangle rectangle d'àrea mínima. (5x+4y-40=0)

114) Un rectangle té p de perímetre. Quines han d'ésser les seves dimensions perquè quan giri al voltant d'un dels seus costats determini un cilindre de volum màxim? (p/3 i p/6)

115) Un triangle isòsceles té un perímetre de 10 cm. Troba quina altura ha de tenir perquè quan giri entorn de l'altura engendri un con de volum màxim $\sqrt{5}$

116) Una porta té de perímetre K i és rectangular però a la part de dalt té un semicercle de vidre de forma que el diàmetre encaixa amb la base del rectangle. Quines dimensions té la porta sabent que la seva àrea total ha d'ésser màxima?.

117) Jerry Smith, el vidrier de Dakota, recull un mirall de 150x100 cm, però que es troba escabotat per un vèrtex de forma que li falta un tros de 50x30 en forma de triangle rectangle (al costat de 150 cm li falta el costat de 50 cm). Calculeu per on ha de tallar en Jerry Smith a la fi de poder obtenir un mirall rectangular de superfície màxima.

118) Un jardiner ha de construir un parterre en forma de sector circular de 18 m de perímetre. Quin radi haurà de donar-li si vol que l'àrea sigui màxima? (r=4,5 m)

119) La resistència d'una biga de secció rectangular és proporcional a l'amplada i al quadrat de la seva altura. Quines dimensions ha de tenir la biga de fusta de màxima resistència obtinguda d'un troc de 3 m de perímetre?

120) A un fil ferro de 20 cm el dividim en dos talls. Amb cada un dels talls construïm un triangle equilàter. Com ha de fer la divisió si volem que la suma de les àrees sigui mínima?

121) Una finestra rectangular té la part superior substituïda per un semicercle. El perímetre total de la finestra és de 3 m. Quines han de ser les dimensions perquè sigui màxima la llum que deixa entrar?

122) Entre tots els rectangles inscrits en un triangle rectangle de 20 i 30 cm de catets quines dimensions té el d'àrea màxima?

123) Inscriviu en un triangle isòsceles de 20 cm de base i 30 d'altura un rectangle d'àrea màxima.

124) Un agricultor calcula que si recull el gra avui obtindrà 12 tones i vendrà a 10000 ptes/tona. Si espera algun temps la collita augmentarà en 2 tones/setmana però el preu baixarà 1000 ptes per cada tona. Quin és el moment òptim per recollir-lo?

125) Suposant que l'amplada d'un camp de futbol sigui 70 m i la de la porta 8 m, a quina distancia de la línia de fons un jugador que corra per la línia de l'out veu la porta amb l'angle màxim?

126) La suma de les arestes d'un prisma recte de base quadrada és 200 cm. Quines són les dimensions a la fi de que sigui màxima la superfície?

127) Quina és la manera de construir un pot cilíndric de 500 cm^3 de forma que la quantitat de material sigui mínima?

128) La velocitat d'un mòbil ve donada per $v=sin2t + t^2\sqrt{2}$. Trobeu el primer instant en el qual l'acceleració és màxim

86) D'una funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabem que té un màxim relatiu per x=0, un mínim relatiu per x=1 i compleix la condició $f(1) = -1/2$. Quins són els valors a, b i c ?

87) Donada la funció $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Representeu:
a) $y= f(x)$ b) $y= |f(x)|$ c) $y= |f(x)| + 2$ d) $y= f(x + 3)$ e) $y= 1/f(x)$

88) Donada la funció $f(x)=20 \ln(x/2) + x^2 -14x$ determineu:

a) Domini i asímptotes b) Màxims i mínims relatius c) Fes un esquema de la funció d) Quantes solucions té l'equació $20 \ln(x/2)=14x-x^2$

89) Calcula a,b i c de la funció $f(x)= ax^2 + be^{2x} + c$ sabent que la recta tangent al gràfic d'aquesta funció en el punt d'abscissa x=0 és la recta y=x-1 i sabent que el punt d'abscissa x=0 és un punt d'inflexió

90) Fent un estudi del gràfic de la funció f(x)= x ln x (definida per x>0) digueu quantes solucions té l'equació x ln x=1.

91) Considereu la funció $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$ a) Digueu si la recta tangent al gràfic d'aquesta funció en el punt d'abscissa x=0 passa pel punt (3,5) b) Trobeu totes les rectes tangents a aquella corba i que siguin paral·leles a la recta y=-x-11

92) Feu un esquema senzill de la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 2}$ 1 que posi de manifest les asímptotes, el màxims i els mínims (si n'hi ha) i els punts de tall amb els eixos.

93) Calcula a,b i c de la funció $f(x)= a.\ln x + b.x + c.e^{x-1}$ sabent que la recta tangent al gràfic d'aquesta funció en el punt d'abscissa x=1 és la recta y=7x-3 i sabent que el punt d'abscissa x=1 és un punt d'inflexió.

94) Calculeu el límit de la funció f(x)=x ln x quan x tendeix a zero (essent x>0). Calculeu després el límit de x^x quan x tendeix a zero (essent x>0). Raoneu la resposta.

95) Feu un esquema senzill $f(x)=x^x$ en el domini x>0 que posi en evidència els màxims i el mínims (si en té algun), i els límits de f(x) quan x tendeix a zero i quan x tendeix a infinit.

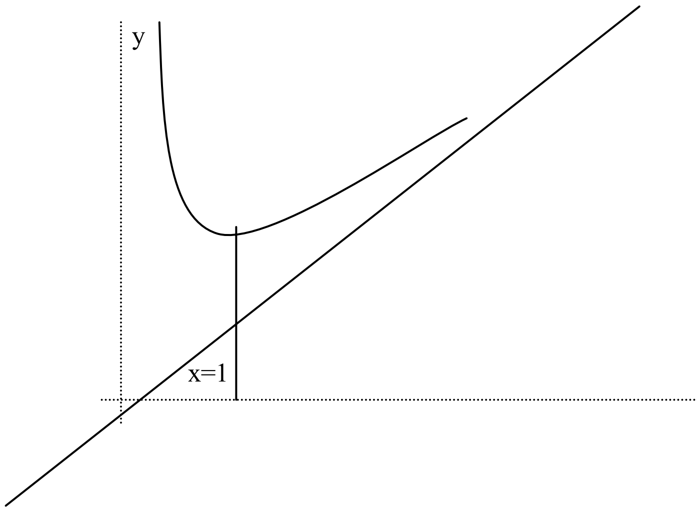
96) Representa la funció $f(x) = e^x\sqrt{10-x}$ indicant el domini, el comportament a l'infinit, els punts de tall als eixos, les asímptotes, màxims, mínims i creixement.

97) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola $y=x^2$ i paral·lela a la recta y =x-3. Trobeu el punt de la paràbola per al qual la distància de P a la recta y=x-3 és mínima.

98) Digueu quins punts de la hipèrbola $x^2 -2y^2 =1$ estan el més a prop possible del punt (9/2,0) i quina és la seva distància a aquest punt?

99) Considereu la funció $f(x) =x^4 + x$
a)Trobeu l'angle que forma l'eix de les x i la tangent al gràfic de f(x) en el punt d'abscissa
$$x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - 1}{4}}$$
b) Trobeu l'equació de les rectes que són tangents al gràfic de la funció f(x) en algun punt d'aquest gràfic i que siguin paral·leles a la recta y = 5x-4

100) Tenim una funció derivable definida en el domini x>0 i el seu gràfic és:



La recta x=0 és asímptota vertical i la recta y=x és asímptota obliqua i té un mínim quan x=1. Fes un gràfic (raonat) de la funció f'(x)

101) Donada la funció $f(x)= x e^x$ .Troba les coordenades dels extrems relatius . Quines coordenades tenen els punts d'inflexió? Sabem que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Dibuixa la funció y=f(x).
Explica perquè l'equació $xe^x = x+ 1$ té exactament dues solucions

102) Donada la funció $y = \dfrac{10x}{x+7}$ estudieu-ne les asímptotes i el creixement, i dibuixeu-ne la gràfica. Trobeu-ne també la funció inversa (es a dir, la funció que composta amb l'anterior dóna la identitat allà on les dues estan definides)

ESTUDI DE LES DERIVADES

57) Demostra que la funció y = cos 2x és creixent en el punt $3\pi/4$

58) Estudia el màxim, mínim i els intervals de creixement de les funcions

a) $y=x^3-2x^2+x-2$ b) $y=x^2.e^x$ c) y=x-cos x d) $y=x.e^{x}$

59) Troba el punts d'inflexió i els intervals de concavitat i convexitat de:

a) $y=x^4-2x^3+x^2-3x+1$ b) $y=(x-1).e^x$ c) $y=x.e^{2x}$

60) La funció $f(x)=(x+a)e^{2x}$ té un extrem relatiu en el punt x=-7/2. Quin valor té a? És tracta d'un màxim o d'un mínim?

61) Si una funció derivable g(x) té un mínim relatiu en un punt x_0 amb $g(x_0)=3$ llavors la funció ln g(x) té un mínim relatiu en x_0 de valor ln 3?

62) Determina els màxims i mínims absoluts i relatius de la funció $f(x) = x^3-3x$ en l'interval [-3,+3]

63) Estudia els intervals de creixement de les funcions: a) $f(x) = x^2/(x-1)$ b) $f(x) = xe^x$

ESTUDI DE FUNCIONS

64) Estudia el domini de la funció $f(x) = 5x/(x^2-9)$

65) Troba els intervals on la funció és positiva:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$ b) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x(x-1)}$

66) Una funció cúbica té un mínim en el punt (1,-4) i un màxim en el (-1,8). Determina la seva equació i el punts d'inflexió.

67) Fes un esquema de les funcions, indicant els trets principals

a) y= ln(x+1) b) $y = (x-1)(x+2)^2$ c) y = cos x d) y = sin x e) y = tg c f) $y= e^{-x}$

68) Fes un esquema de les funcions següents fixant-te en el punts de tall i la tendència quan x tendeix a més o menys infinit:
a) $f(x) = (x-1)^2(x+1)$ b) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x+1)$
c) $f(x) = (2-x)(x-3)x$ d) $f(x) = -(x-2)^2(x+2)^2$

69) Representa les funcions: a) $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^2-1}$ b) $f(x)=+\sqrt{x^2+x+1}$

c) $f(x)=e^x\sin x$ d) $y= x^3 -3x^2+2x$ e) $y=e^{x^2}$ f) $y=e^{-x^2}$

70) Fes un esquema de la funció f(x) = (x-1)(x-2)(x-3). A partir d'aquest estudi esquematitza la funcio y= 1/f(x)

71) Representa les funcions a) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x(x-1)}$ b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$

72) Representa les funcions a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

73) Estudia el signe de les funcions de l'exercici 73.

74) Representa les funcions:
a) $y = |x(x-1)(x-2)|$ b) $y = |\sin x|$ c) $y= |2x+5| - 4$ d) $y= |x^2 - 2| + 1$ e) $y = -|\cos x|$

75) Resol gràficament les equacions: a) $|x| = |x^2 - 2|$ b) $2 - |x+1| = |4x - 3|$

76) Per a quins intervals es satisfan les desigualtats? Fes el càlcul gràficament
a) $|x + 1| <= |3x - 5|$ b) $|x^2-4| <= e^x$

Representa les funcions:
77) $y = e^{4x} - 2e^{2x}$
78) $g(x)=\dfrac{3}{x^3-3x}$
79) $f(x) = 2\sin x+3\cos x$
80) $f(x)= 2\sin^2 x$
81) f(x) = 2 sin (x/2)
82) f(x) = 2 cos 3x
83) $f(x) = \ln (1-x^3)$
84) $f(x) = x^x$
85) f(x) = cos2x - 3sin 2x

TANGENTS I NORMALS

31) Troba la tangent i la normal a la corba $y = (x+1)^3$ en el punt $x = 1$

32) En quins punts la tangent a la corba $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2}{3}x-4$ paral.lela a la recta $2x+3y - 4 = 0$

33) Troba la tangent i la normal a la corba $f(x) = \cos x$ en el punt $x = 0$

34) Troba els punts de $f(x)=x^4-7x^3+13x^2+x+1$ que tenen la tangent que forma una angle de 45º amb l'eix x

35) Troba les equacions de la tangent i de la normal a la corba $9x^2 + 4y^2 = 36$ en el punt $x=0$

36) Troba l'equació de la normal a la funció $f(x) = \text{tg } x$ en el punt $x=0$

37) Troba les equacions de les rectes tangent i la normal a la corba $f(x) = |x^2-3x-2|$ en el punt $x = 3$.

38) Sabem que les gràfiques de les dues funcions $y =x^2 -a$, $y =2/x$ són tangents en un cert punt (x_0,y_0). Determineu el valor de a, el punt (x_0,y_0) i l'equació de la recta tangent comuna. Dibuixeu després la gràfica de les dues corbes.

L'HOPITAL:

Determina els següents límits:

39) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-e^{-5x}}{\sin 7x}$

40) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{4x^2}$

41) $\lim_{x \to 2} \frac{\ln (x-1)}{x-2}$

42) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{tg 3x}$

43) $\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

44) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{1-\cos x}$

45) $\lim_{x \to 0} x \ln \frac{1+x}{x}$

46) $\lim_{x\to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

47) $\lim_{x\to \pi} (\text{tg } x)^{1/\cos 2x}$

48) $\lim_{x\to \pi/4} (\text{tg}x)^{\text{tg}2x}$

49) $\lim_{x \to 0} x^2.\ln x$

50) $\lim_{x\to 0} \frac{x(\ln x)^2}{1 + \ln x}$

51) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+mx)}{\sin 2x} = 5$ Quina valor ha de tenir m?

52) Comprova que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x} = 1$

ASÍMPTOTES:

53) Troba les asímptotes de les funcions següents: a) $f(x) = x/e^x$ b) $f(x)\ e^x/x$ c) $y = \ln(x-2)$ d) $f(x) =(ax+b)/(cx+d)$ si $c\neq0$ i $ad\neq bc$

54) Determineu el comportament de les funcions següents a l'infinit

a) $y=\frac{x}{1+x^2}$ b) $y =x^2 e^{-x}$ c) $y= x \ln x$ d) $y=x^3 -6x^2 -11$ e) $y^2=4ax$ $a\in\Re^+$

55) La funció $f(x)=\frac{ax^2}{x+b}$ té una asímptota obliqua $y =2x+2$. Troba els valor a i b

56) Estudia els asímptotes i el comportament a l'infinit de la funció $y=\frac{x^2}{\ln x}$

CONTINUÏTAT:

1) Estudieu la continuïtat: a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8} & x\neq 1\\ 1/5 & x=1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x<-2\\ 1 & x=-2\\ -3-2x & x>-2\end{cases}$

2) Troba el valor de K perquè la funció sigui contínua en tot R: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-x} & x\neq 1\\ K & x=1\end{cases}$

3) Estudieu la continuïtat de la funció: $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$

4) Troba el valor de K perquè la funció sigui contínua en tot R: $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ K & x=0\\ 1+\dfrac{3}{2}x & x>0\end{cases}$

5) Estudia la continuïtat de la funció: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

6) Trobeu m per tal que la funció f(x) sigui contínua: $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\leq 1/2\\ mx & x>1/2\end{cases}$

BOLZANO

7) Demostreu que f(x) = sin x + 2x - 1 té com a mínim una solució real

8) Enuncia el Teorema de Bolzano i utilitza'l per demostrar que l'equació $x^3 + x^2 - 7x + 1$ té una solució real en l'interval (0,1)

9) Demostreu que f(x) = sin x + 2x - 1 té com a mínim una solució real

10) Enuncia el Teorema de Bolzano i utilitza'l per demostrar que l'equació $x^3 + x^2 - 7x + 1$ té una solució real en l'interval (0,1)

11) Demostra que l'equació x= cos x té solució real

12) Determina amb una error inferior a una dècima la solució de l'equació $x^3 + 2x + 1 = 0$

13) Demostra que la funció $f(x)= 2x^3-5x^2+x+2$ talla a l'eix x en l'interval [-1,3].

14) Podem dir el mateix de la funció g(x) = (2x+1)/(x-2) ? Justifica la resposta?

DERIVABILITAT:

15) Partint de la definició de derivada, calcula f '(-2)= x^3 i g '(-2)=1/x

16) A partir de la derivada de la funció logarítmica demostra la fórmula de la derivada de la funció exponencial.

17) Determina la derivada de la funció f(x) = $(\cos x)^{\ln x}$

18) Derivant implícitament troba y'(2)

a) $x^2 - y^2 + 2x - y = 3$

b) $x^2 + y^2 = 9$

19) Troba y' en la funció $(\sin x)^y - y^x = 0$

20) Troba la derivada enèssima de $y = e^{-x}$

21) Troba, amb una precisió superior a la dècima una solució de l'equació

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

22) Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció $f(x)=\begin{cases}4 & x\leq 4\\ 4-x^2 & x>0\end{cases}$

23) Posa un exemple de funció contínua no derivable i interpreta gràficament la situació

24) Estudia la derivabilitat de la funció f(x) = $|x-2|$

25) Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció $f(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ x-2 & x\in\lceil 0,4\rceil\\ x^2-2 & x>4\end{cases}$

26) Estudia la derivabilitat de la funció f(x) $f(x)=\begin{cases}xe-\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

27) Posa una exemple de funció contínua i no derivable en un mateix punt

28) El costat d'un triangle equilàter creix a raó de 3 cm/min. Quina és la velocitat de creixement de l'àrea quan el costat té 30 cm?

29) Un dipòsit cilíndric de 3 m de radi rep 2 m^3/min. A quina velocitat puja el nivell

30) Donades les funcions $f(x) = x^2-1$ i g(x) =x+2 determineu un valor $c\in(0,4)$ tal que

$$\frac{f(4)-f(0)}{g(4)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

77.- Donada la recta de l'espai: $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$
trobeu l'equació paramètrica de la recta que talla a l'anterior i és perpendicular a la mateixa i és continguda an el pla x - y = 0.

78.- Trobeu la recta que passa pel punt (0,0,0) i és perpendicular alhora a les dues rectes:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

79.- Troba la distància de l'origen de coordenades al pla 2x + y - 2z -3 = 0 i la projecció ortogonal de l'origen sobre aquest pla. Troba l'angle que forma aquest pla amb el pla y=z.

80.- Demostreu que el punt A(-1,1,0) no és coplanari amb els punts B(0,0,0), C(0,1,0) i D(1,2,1), i trobeu la distància del punt A al pla determinat per B, C i D.

81.- Donats en R^3 els punts a(1,0,-1), b(3,0,2), c(2,0,1), les rectes r i s:

r: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ s: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ i el pla P: x - 2y + z + 1 = 0, es demana:

a) Equacions vectorial i contínua de la recta que passa per a i b.
b) Mateixa recta expressada com a intersecció de dos plans.
c) Recta per a paral.lela a r.
d) Pla per a paral.lel a P.
e) Recta per a perpendicular a P.
f) Recta per a que talla i és perpendicular a r.
g) Pla que conté a i b i és perpendicular a P.
h) Punt d'intersecció de r amb P.
i) Pla que conté r i tal que la seva intersecció amb P és una recta perpendicular a r.
j) Recta que passa per a, és paral.lela a P i talla r.
k) Recta continguda en P i que talla i és perpendicular a r.
l) Pla que conté a i tal que les seves interseccions amb els eixos de coordenades són els vèrtexs d'un triangle equilàter.
m) Intersecció del pla P amb el pla z = 0.
n) Pla que conté a, b i c.
o) Pla que conté r i passa per a.
p) Pla que conté a i és perpendicular a r.
q) Passa per l'origen la recta ac?.
r) Posició relativa de les rectes r i s.
s) Troba k de tal manera que la recta rr talli s: rr: $\frac{x-k}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$
t) Recta paral.lela a l'eix z que passa per b.
u) Troba k i j perquè el punt (2,k,j) sigui de s.
v) Pla paral.lel a l'eix z que conté r.
w) Recta que talla i és perpendicular a r i s.
x) Angle de les rectes r i s.
y) Angle que formen r i P.
z) Distància de r a s.

FEIXOS DE PLANS. RADIACIÓ DE PLANS.

82.- Estudia la posició relativa dels plans d'un feix de plans segons sigui la posició relativa dels dos plans que el defineixen.

83.- Comprova si els plans x=6, 3x+y-z=8, x+y-z=0 pertanyen al feix de plans que determinen els plans 2x+y-z=2 i x=6.

84.- Equació del pla que conté a la recta r: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x- y+z=2 \end{cases}$
i que passa pel punt (1,2,3).

85.- Equació del pla que conté a la recta r: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x- y+z=2 \end{cases}$
i que passa pel punt (-1,0,3).

86.- "Recta que passa per un punt i talla a dues rectes". Aquest problema no sempre té solució i cas de tenir-ne de vegades no és única. Si el problema té solució, com pots calcular-la?.

87.- Equació, si existeix, d'una recta que passi per P i talli a r i a s:

a) P=(1,-1,0); r: x=k, y=k i z=k; i s: x-2y=0 i z=1
b) P=(0,2,0); r: (x,y,z)=(2,0,0)+k(0,1,0)
s: (x,y,z)=(0,0,0)+d(0,1,1)
c) P=(5,6,0); r: (x,y,z)=(1,0,0)+k(2,1,0)
s: (x,y,z)=(0,2,0)+d(2,1,0)
d) P=(0,0,3); r: (x,y,z)=(0,1,2)+k(1,0,3)
s: (x,y,z)=(1,0,4)+d(1,0,5)
e) P=(0,0,3); r: (x,y,z)=(0,1,2)+k(1,0,3)
s: (x,y,z)=(1,0,4)+d(0,0,5)

88.- "Recta paral.lela a una recta donada i que talla a dues rectes". Aquest problema no sempre té solució. Si n'existeix alguna, com pots calcular-la?.

89.- Recta paral.lela a t: (x,y,z)=(-5,3,9)+k(1,0,1) i que talla les rectes
r: (x,y,z)=(1,1,1)+k(1,2,3) i s: (x,y,z)=(1,1,0)+k(1,1,1)

90.- Recta paral.lela a t: (x,y,z)=(-1,-2,0)+k(2,3,0) i que talla les rectes
r: (x,y,z)=(2,0,0)+k(0,1,0) i s: (x,y,z)=(0,0,2)+k(1,0,0)

91.- Una radiació de plans és un conjunt de plans que tenen un punt en comú. Escriu l'equació de la radiació de plans que passen per P:
a) P(1.-2,3)
b) P(0,0,0)
c) P(-1,0,1)

PROJECCIONS I SIMETRIES:

48.- Calcula la projecció del vector a(1,2,3) sobre el vector b(2,0,1).

49.- Trobeu la projecció ortogonal de la recta que passa pels punts (1,0,1) i (-1,1,0) sobre el pla $x + y + z + 4 = 0$.

50.- Trobeu la projecció ortogonal de la recta que passa per (1,1,0) i (2,1,1) sobre el pla $x + y + z - 3 = 0$.

51.- Trobeu la projecció ortogonal de l'origen de coordenades sobre el pla $x + 2y + 3z = 4$.

52.- Calcula el simètric del punt A(1,2,3) respecta de B(3,2,1).

53.- Calcula el punt simètric del punt A(2,-1,3) respecte de la recta
$$x - 1 = \frac{y-2}{2} = z$$

54.- Calcula la recta simètrica de la recta: $x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ respecte del punt A(2,1,3).

55.- Calcula el punt simètric del punt A(2,3,2) respecte del pla P: $x-2z-3=0$.

ANGLES:

56.- Calcula l'angle que formen el vector a(1,2,3) i el vector b(2,0,1).

57.- Calcula l'angle que formen els vectors v(1,2,3) i w(0,0,2).

58.- Calcula l'angle entre les rectes r i s:
$$r:\ \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-2}{2} \qquad s:\ x + 2 = y = \frac{z-1}{2}$$

59.- Calcula l'angle entre la recta r i el pla P:
$$r:\ x = -y = \frac{z-1}{2} \qquad P:\ 2x+y+z-4=0$$

60.- Calcula l'angle entre els plans P i P':
$$P:\ 3x-y+2z=1 \qquad P':\ 2x-2y+4z=3$$

61.- Trobeu l'angle que formen la recta
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}$$
amb el pla que passa pel punt (2,1,1) i conté la recta $x - 1 = y = z + 2$

62.- Defineix i dóna l'expressió analítica de l'angle que formen dos plans en l'espai.

63.- Trobeu l'equació d'un pla que passi per (2,-3,5) i formi un angle de 30_o amb el pla $x - y - 2z + 1000 = 0$.

DISTÀNCIES:

64.- Calcula la distància entre els punts A(1,2,3) i B(-1,0,3).

65.- Trobeu la distància del punt P(3,4,5) a la recta r:
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-1}$$

66.- Calcula la distància del punt A(0,0,1) al pla $y+z-1=0$.

67.- Calcula la distància entre les rectes:
$$r:\ x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad s:\ \begin{cases} z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

68.- Calcula la distància entre la recta r i el pla P:
$$r:\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-5} \qquad P:\ 3x+2y-z=1$$

69.- Calcula la distància entre els plans P i P':
$$P:\ x-2y+3z+1=0 \quad \text{i } P':\ 2x-4y+6z+3=0$$

70.- Quina és la distància entre les rectes:
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3+2t \\ z = t+1 \end{cases} \qquad \frac{x+2}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{-3}$$

71.- Quins són els punts de les rectes anteriors de marera que la distància entre ells sigui mínima?.

AREES I VOLUMS:

72.- Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs: A(1,2,-1), B(3,4,0) i C(4,2,2)

73.- Trobeu el volum del paral.lelepípede de vèrtexs: A(2,2,2), B(1,0,0), C(0,1,0) i D(1,0,1).

VARIS:

74.- Donats els plans P: $3x + 2y - z = 1$ i P': $x - y + z = 0$ trobeu:
a) les coordenades del vector director de la recta intersecció.
b) l'equació de la recta paral.lela als dos plans i que passa pel punt A(1,0,-1)

75.- Troba l'equació de la recta s que passa pel punt P(-1,1,0) i és perpendicular a les rectes r: $y=0$ i t: $x+3y=2$ $x=z$ $y-z=1$

76.- Trobeu a i b de forma que els tres plans continguin una mateixa recta:
$$\begin{aligned} 2x - y + az &= 1 \\ x - 2y - 3z &= b \\ 3x - 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$
Trobeu el simètric del punt (0,1,2) respecte d'aquesta recta.

PERPENDICULARITAT:

26.- Calcula l'equació de la recta que passa pel punt A(1,2,1) i és perpendicular a la recta

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

27.- Calcula l'equació de la recta que passa per l'origen i és perpendicular al pla $2x+3y+z-7=0$.

28.- Calcula l'equació del pla que talla perpendicularment a l'eix de les "X".

29.- Quina és l'expressió analítica de la perpendicularitat entre dos plans?. Quants plans perpendiculars a un de donat passen per un punt?.

30.- Calcula l'equació del pla P que és perpendicular al pla P': $x-y+z=0$ i conté a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

INTERSECCIONS:

31.- Trobeu la intersecció de la recta $x = 2y - 1 = z + 3$ i el pla que conté les rectes:

r: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-1}$ s: $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-2}$

32.- Determineu, si és que existeix, l'equació de la recta que passa pel punt P(1,2,-1) i talla la recta determinada pels punts (-1,1,0) i (0,2,1) i a la recta:

r: $x - y + 2z = 0$
$4x + y - z = 1$

33.- Trobeu l'equació del pla que conté la primera i no talla la segona de les dues rectes següents:

r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ s: $x - y = 1$
$y + z = -1$

34.- De tots el plans que passen per (1,1,0) i (0,1,0) trobeu si n'existeix algun que contingui la intersecció del plans d'equacions: $2x - 3y + z - 8 = 0$
$x + y - z = 0$

35.- Trobeu l'equació del pla que passa per la recta intersecció dels plans r i s, i pel punt P(2,-3,1):

r: $x - 3y + 5z = 8$
s: $3x + 2y - 4z = 5$

36.- Trobeu, si és que existeix, la intersecció de la recta $2x - 1 = y = z + 3$ amb el pla que conté les rectes r i s d'equacions:

r: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{-1}$

s: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$

37.- Trobeu la intersecció del pla que conté el punt (2,1,2) i l'eix OY amb la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$$

POSICIÓ RELATIVA:

38.- Estudia la posició relativa de les rectes r i s:

r: $x=k$
$y=2-k$
$z=1+3k$

s: $x=2+2t$
$y= -2t$
$z=7+6t$

39.- Estudia la posició relativa de les rectes r i s:

r: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

s: $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$

40.- Estudia la posició relativa dels plans P i P':

P: $2x - 3y + z - 1 = 0$
P': $4x - 6y - 2z = 0$

41.-Estudia la pos. relativa de la recta r i el pla P:

r: $x=2t$
$y=3t+1$
$z=t$

P: $3x + 2y - 11z - 5 = 0$

42.- Com es pot expressar que quatre punts de l'espai estiguin en el mateix pla?

43.- Donada la recta $x + y + 2z = 1$
$x -2y - 3z = 0$ i el pla $2x + y + az = b$
quin valor ha de tenir a perquè siguin paral.lels?
Per a quin valor de b la recta és continguda en el pla?

44.- Trobeu a i b perquè els tres plans es tallin en una recta: $x + y - z = 1$
$2x - y -4z =10$
$7x + y +az = b$

45.- Determineu a i b perquè els plans tinguin una recta en comú: $x +by + z - 1 = 0$
$2x +ay - z + b = 0$
$2x -2y +2z +2a = 0$

46.- Trobeu la posició relativa del plans:
$x -2y + z = 0$
$-x + y +bz = 1$
$2x -2y + z = 1$
$ax -2y + z =-3$

47.- Trobeu els valors d'a i b pels quals la recta r i el pla p no tinguin cap punt en comú:

r: $x + y + z = b$
$2x - y + z = 1$

p: $ax + y + 2z = -1$

GEOMETRIA ANALÍTICA 3D

LA RECTA:

1.- Determineu les equacions paramètrica, contínua i reduïda de les rectes que passen pel punt A i amb un vector direcció v donat:

a) A(2,1,-3); v(-1,2,-2)
b) a(0,0,0); v(2,-1,-3)

2.- Calcula les equacions de la recta que passa pels punts A(1,2,3) i B(-2,0,5).

3.- Els punts A(3,4,5), B(1,0,3) i C(1,1,1) ¿estan alineats?.

4.- Els punts P(3,5,1) i Q(5,7,2) pertanyen a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1} \ ?$$

5.- Determineu dos punts que pertanyin a les rectes:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1 - z$ b) $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases}$

6.- Quines són les equacions dels eixos coordenats?.

EL PLA:

7.- Trobeu, en forma paramètrica i general, l'equació del pla que passa pel punt A i amb vectors r i s, els quals indiquem, continguts en el pla:

a) A(0,1,2); r(0,-1,2); s(1,3,2)
b) A(1,-1,2); r(0,-1,-3); s(-1,2,-3)

8.- Obteniu l'equació implícita del pla determinat pel punt A(1,2,3) i els vectors u(1,-1,4) i v(1,1,-2).

9.- Trobeu l'equació del pla que talla els tres eixos coordenats en punts situats a distància "a" de l'origen.

10.- Quines equacions tenen els plans coordenats?.

11.- Els punts P(1,1,1) i Q(3,2,1) pertanyen al pla x+y+z-3=0?

12.- Calcula l'equació del pla que passa pels punts A(0,1,2), B(1,3,5) i C(2,4,3).

13.- Calcula l'equació del pla que passa per l'origen i conté la recta: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$

PARAL.LELISME:

14.- Són paral.lels els següents parells de vectors?:

a) (1,2,3); (0,1,2) b) (1,1,1); (2,1,2)

15.- Trobeu les equacions de la recta que passa pel punt A(1,1,2) i és paral.lela al vector v(2,0,3). Dibuixeu la recta.

16.- Plantegeu les equacions de les rectes que siguin paral.leles als eixos coordenats.

17.- Obteniu les equacions de la recta que passa pel punt A(1,2,2) i és paral.lela a la recta: $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$

18.- Investigueu si són paral.lels els plans de cada apartat:

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

19.- Calculeu l'equació d'un pla que contingui el punt P(1,1,1) i sigui paral.lel a les rectes:

r: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - k \\ z = k \end{cases}$

20.- Trobeu l'equació del pla que passa pel punt (1,0,0) i és paral.lel a l'eix OZ i a la recta:

r: $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ y + z = -1 \end{cases}$

21.- Trobeu la recta paral.lela a $\frac{x+1}{2} = \frac{y+0}{3} = \frac{z+5}{4}$

i passa per les rectes r i s:

r: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$ s: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

22.- Trobeu l'equació de la recta que passa per B(1,3,5) i és paral.lela als plans:

$$3x + 2y - 4z - 5 = 0$$
$$8x - y - z + 1 = 0$$

23.- Trobeu l'equació del pla que passa pel punt (2,3,-5) i és paral.lel al que passa per (2,5,7) i conté la recta: $x - 1 = 2y = 6z$

24.- Determineu si la recta d'equacions $\begin{cases} y + 3z = 3 \\ 3x = 5z \end{cases}$

és paral.lela al pla d'equació $6x + 5y + 5z = 7$.

25.- Trobeu l'equació del pla que conté la recta del problema anterior i és paral.lela al pla donat.

ESPAIS VECTORIALS

1.- Demostreu que el conjunt de polinomis de 1r. grau té una estructura d'espai vectorial.

2.- Demostreu que el conjunt de matrius quadrades 2x2 té una estructura d'espai vectorial.

3.- Demostreu que el conjunt de vectors lliures de l'espai (tres dimensions) té una estructura d'espai vectorial.

4.- Sigui V un subconjunt de V_2 (conjunt de vectors lliures del pla): $V = \{ (x,0) \in V_2 \}$. Demostreu que és un subespai vectorial de V_2.

5.- Sigui $W \subset V_2 / W = \{ (x,1) \in V_2 \}$, és subespai vectorial?.

6.- El vector v(0,3) és c.l. de r(1,2) i s(2,4)?.

7.- Escriu el vector v(2,4) com a c.l. dels vectors r(0,1) i s(1,1).

8.- Escriu el vector (4,0,2) com a c.l. dels vectors (1,2,1), (1,0,0) i (1,1,0).

9.- Escriu el vector (3,3,2) com a c.l. dels vectors (1,0,0), (1,1,0) i (1,1,1). Són l.i. els vectors?:

10.- a(2,3,1), b(1,3,0), c(0,1,0)

11.- a(2,1), b(3,1), c(1,2)

12.- a(1,0,0), b(1,1,0), c(1,1,1)

13.- Demostreu que si v i u són dos vectors l.i., també ho són v + u i v - u.

14.- Demostreu que la condició necessària i suficient perquè un conjunt de vectors sigui l.d. és que almenys un d'ells sigui c.l. dels altres.

15.- Són base en R^3 a(2,3,4) i b(1,0,2)?.

16.- Són base en R^3 i(1,0,0), j(0,1,0), k(0,0,1)?. És l'anomenada BASE CANÒNICA.

17.- Comproveu si són base en R^3 el conjunt de vectors: a(0,1,2), b(1,3,5), c(0,4,2).

18.- Són base en R^4?: a(1,0,0,0), b(0,1,0,1), c(0,0,1,1).

19.- Demostreu que en R^n, n vectors són base si son l.i.

20.- Si $a(2,3,1) \in R^3$ en la base canònica. Quines són les components d'aquest vector en la base: $e_1(1,0,1)$; $e_2(0,1,1)$ i $e_3(1,1,0)$?.

21.- Sigui $e_1(1,1)$ i $e_2(1,-1)$ base en R^2. Un vector a es pot escriure com $a = 2 e_1 + e_2$. Quines són les seves coordenades en la base canònica?.

22.- Donats els vectors v(0,1,1) i w(3,2,-5), demostreu que són l.i. i trobeu un vector u que formi amb ells una base en R^3.

23.- Trobeu les components del vector a(3,2,3) en la base $e_1(0,0,1)$; $e_2(0,1,1)$ i $e_3(1,1,1)$.

24.- Comproveu que aquests espai vectorial $H=\{(a,b,0)/a\in R \text{ i } b\in R\}$ és un subespai vectorial de R^3 i trobeu una base d'aquest subespai.

26.- Trobeu el valor de t perquè el vector x(3,8,t) estigui en el subespai vectorial engendrat, en R^3, pels vectors u(1,2,3) i v(1,3,-1).

27.- Trobeu en r^3 l'equació del subespai vectorial engendrat pels vectors a(1,0,1) i b(1,1,0).

==========================

28.- Estudieu si són o no aplicacions lineals de R^3 en R^3

a) $f(x,y,z) = (x,0,z)$
b) $f(x,y,z) = (x,x+y,x+y+z)$
c) $f(x,y,z) = (x,y^2,z^3)$

29.- Estudieu si són o no aplicacions lineals de R^3 en R^2

a) $f(x,y,z) = (x,y+z)$
b) $f(x,y,z) = (x-y, x-z)$

30.- Estudieu si són o no aplicacions lineals de R^3 en R

a) $f(x,y,z) = x+y+z$
b) $f(x,y,z) = 2x-y+3z$
c) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

31 .- Calculeu la matriu de l'aplicació lineals de R^3 en R^3, respecte a la base canònica, essent:

$f(1,1,1) = (3,4,5)$
$f(0,1,1) = (2,3,4)$
$f(0,0,1) = (1,2,3)$

PROBLEMES D'EQUACIONS LINEALS

1) Un grup de segadors ha de segar dos camps, un dels quals té una superfície doble de l'altra. Durant mig dia treballa tot el grup en el camp gran. L'altra meitat del dia continua la meitat en el mateix camp i l'altre meitat en el petit. Queda sense segar una petita part del camp petit que va ocupar a un segador una dia complet. Quants segadors té la colla?

2) Tenim 3 lingots formats per un aliatge d'or, plata i coure. El primer té 35 g d'or, 25 de plata i 40 de coure. El segon en té 5 d'or, 45 de plata i 40 de coure; el tercer té 20 g d'or, 45 de plata i 35 de coure. Quants grams de cada lingot hem d'agafar per formar un lingot de 60 g que contingui el 15 % d'or, 40 % de plata i el 45% de coure?

3) Un ramader compra porcs, cabres i ovelles. En total compra 100 animals. Cada porc costa 3.5 corones, cada cabra 1 corona i un terç i cada ovella costa mitja corona. En total ha pagat 100 corones per tots els animals. Quants animals ha comprat de cada classe?

4) Un pare va morir deixant molts fills. En els seu testament especificava: "El fill gran ha de rebre 100 corones més la desena part de la resta. El segon fill ha de rebre 200 corones més la desena part de la resta. El tercer fill 300 corones més la desena part de la resta...." i així successivament. Un cop fet el repartiment es va comprovar que tots varen rebre el mateix. Quants fills tenia?

5) Una empresa fabrica tres models de televisors que anomenarem A,B i C. El model A necessita passar 2 hores a la unitat de muntatge; el model B, tres; el model C, una. Per la unitat d'acabat han de passar respectivament una, dues i tres hores. En total s'han produït 14 aparells, la unitat de muntatge ha treballat 25 hores i la d'acabat 26 hores. Quants televisors de cada classe s'han produït?

6) Una empresa de refinatge compra petroli a dos països diferents A i B . Comprant 500 barrils al país A i 1500 al B el preu mitjà del barril de cru és 51 $. Comprant-ne 1000 a A i 1000 a B el preu mig és 54 $. Quin és preu del petroli de cada país?

7) Tenim dos classes de vi negre. El primer es de 12º i el segon de 15º. Volem preparar 100 litres d'un vi de 13º. Calcula la quantitat de cada vi que caldrà utilitzar.

8) - Un agricultor té tres tipus de pomes: golden, donzella i delícies. Cada pomera golden dóna 50 Kg, cada arbre donzella 30 Kg i les delícies 40 Kg. Actualment recull 230.000 Kg de pomes. Si arranqués 200 pomeres de donzelles i les plantés golden recolliria 234.000 Kg i si arranca totes les donzelles i planta delícies recollirà 250.000 Kg. Quantes pomeres té de cada classe? Estudia totes les possibilitats.

9) Els sous de la Sònia, en Josep i l'Òscar sumen 8.000 €. En Josep guanya el doble que l'Òscar i la Sònia guanya 7/6 del sou d'en Josep. Quant guanya cadascun?

10) Un magatzemista disposa de tres tipus de cafè: A, B i C, amb preus de 980€/kg, 875€/kg i 950€/kg, respectivament. Vol fer una barreja amb els tres tipus de cafè per subministrar una comanda de 1.050 kg de barreja al preu de 940€/kg. Quants kg de cada tipus de cafè ha de barrejar sabent que ha de posar del tercer tipus el doble del que posi del primer tipus i el segon junts?

11) Una empresa cinematogràfica disposa de tres sales, A, B i C. Els preus d'entrada a cada salo són 10, 20 i 30 €, respectivament. Un dia, la recaptació conjunta de les tres sales va ser de 4.250 € i el nombre total d'espectadors que hi van assistir va ser de 200.
Si els espectadors de la sala A haguessin assistit a la sala B i els de la sala B a la sala A, s'hauria obtingut una recaptació de 4.000 €. Calculeu el nombre d'espectadors que va anar a cada sala.

12) Barregem 60 litres de vi blanc amb 20 litres de vi negre i obtenim un vi de 10 graus (10 per cent d'alcohol). Si, contràriament, barregem 20 litres de banc amb 60 litres de negre, obtenim un vi d'11 graus. Quina graduació tindrà una barreja de 40 litres de blanc i 40 litres de negre?

13) Un orfebre té dos lingots: el primer conté 720 g d'or i 80 g de coure, i el segon conté 400 g d'or i 100 g de coure. Quina quantitat haurà d'agafar de cada un per formar un altre lingot que pesi 640 g i que tingui una llei de 0,825?

14) En una granja es venen pollastres, galls dindis i perdius a 20 €/kg, 15 €/kg i 40 €/kg respectivament. En una setmana, els ingressos totals van ser de 67.000 €. Sabem que la quantitat de pollastres venuda va superar en 100 kg la del gall dindi i que es va vendre de perdiu la meitat que de gall dindi. Quina quantitat de cada tipus de carns es va vendre?

15) Una persona va invertir 9.000 € en tres fons d'inversió, FIM, FIM Garantit i FIAM, i en va obtenir 660 € d'interessos. Els interessos que van proporcionar els fons van ser del 10%, 6% i 4% respectivament. Sabent que va invertir en el FIM el doble que en el FIAM, calcula la quantitat que va invertir en cada fons.

16) L'edat d'una mare és, en l'actualitat, el triple que la del seu fill. La suma de les edats del pare, la mare i el fill és de 80 anys i d'aquí a 5 anys, la suma de les edats de la mare i el fill serà de 5 anys més que la del pare. Quants anys tenen el pare, la mare i el fill en l'actualitat?

17) L'Alba fa col·lecció de vídeos d'esport, música i pel·lícules, i ja en té 20. Els vídeos d'esport i de música junts fan el triple dels de pel·lícules. Si comprés un altre vídeo de música, el seu nombre igualaria als d'esports. Quants vídeos té de cada tipus?

Resoleu els següents sistemes analitzant les seves característiques

35) $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 1 \\ x + 3y + 3z = -1 \\ x - 5y + 5z = -4 \end{cases}$

36) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$

37) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z - t = 5 \\ 2x - 5y + 4z + 5t = -2 \\ 7x - 6y + 10z + 9t = 1 \\ 4x - 13y + 7t = -12 \end{cases}$

38) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{cases}$

39) $\begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

40) $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x + y + 2z = 7 \\ 2x - y + 3z - t = -3 \end{cases}$

41) $\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$

42) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 4y - 3z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

43) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 17 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ x - y + z = 7 \end{cases}$

44) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ x + 2y + 2z = 13 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$

45) $\begin{cases} -8x - 2y + 4z = -4 \\ x - 5y - 2z = -9 \\ 4x + y - 2z = 3 \end{cases}$

46) $\begin{cases} 3y + x = 18 \\ -9y + 24x = 27 \\ 6y + 10x = 60 \end{cases}$

47) $\begin{cases} 4x - 3y = 4 \\ 2x - 4y = 2 \\ 2x - 7y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

48) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 3 \\ 4x + 5y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

49) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x - y - z = 15 \end{cases}$

50) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 2x - y = -1 \\ x + y = 8 \end{cases}$

Discutiu i resoleu segons els valors dels paràmetres (segons s'indiqui)

1) $\begin{cases} ax - y = 1 \\ -2x + (a-1)y = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ ax - 2y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ x + 5y = a \end{cases}$

3) $\begin{cases} (3-a)x + ay + z = 2 \\ ay + az = 0 \\ ax + ay + z = b \end{cases}$

4) $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2 y = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} ax + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a-1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases}$

9) $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a+1)x + y - az = a \\ x + (a+1)y = 2a \end{cases}$

10) $\begin{cases} 5x + 2y - z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = a \\ x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x - 2z = 3 \\ 4x + y = 5 \\ 2y + z = a \\ 2x - 3z = a \end{cases}$

13) $\begin{cases} x + ay + z = a+1 \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ 2x + y - z = 1-a \end{cases}$

14) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - az = 3 \\ ax + 2y + (a+2)z = a^2 - 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z + u = -3 \\ x - 2y + z - u = 5 \\ x - 4y + 6z + 2u = 10 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ ax - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} y = x + y = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$

21) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

22) $\begin{cases} 3x + 7y = a \\ x + y = b \\ 5x - 13y = 5a - 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$

23) $\begin{cases} x + y + z = a+1 \\ x + y + (a-1)z = a \\ x + ay + a = 1 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x - my = 5 \end{cases}$

25) $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -2x + (m-1)y = 2 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x + y - az = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ -2x + 6y - 24z = 3 \end{cases}$

27) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + ay + 2z = 3 \\ x + 6y + z = 2 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x - ay - 2z = 0 \end{cases}$

29) $\begin{cases} 3x + my = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \\ mx - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

30) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 3x - y = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$

31) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = k \end{cases}$

32) $\begin{cases} ax - y = 1 \\ ax + by = 3 \end{cases}$

33) $\begin{cases} x + 2y = a \\ 3x - y = a-b \\ x - y = 4 \end{cases}$

20.- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Determina la matriu X que compleixi la igualtat AX=B+C

21.- La mateixa pregunta en la igualtat AXB=C

22.- La mateixa pregunta en la igualtat ABX =CA

23.- Calcula el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

24.- Calcula el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

25.- Calcula el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26.- $\begin{pmatrix} a & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Quin valor ha de tenir a per tal que la matriu tingui de rang 2? I de rang 3?

27.- Determina els rangs de les matrius $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

28.- Quin valor ha de tenir K perquè el rang de la matriu sigui 2 $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 6 & K \end{pmatrix}$

SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Resoleu els sistemes d'equacions

1) x + y = 1
x + y = 2

2) x - y = 2
2x -2y = 4

3) x - y = 0
x -2y =-1

4) x + y - z = 1
x - y = 0
2y = 2

5) x -2y +3z = 1
2x + y -4z = 2
3x +4y - z =-3

6) x + y +3z = 10
x -2y -2z = 5
2x + z = 5

14) 2x + y - z = 1
x -2y + z = 0
3x +2y = 5

15) 2x - y + z = 4
x - z = 1
x + y = 3

16) 2x - y = 1
x + y = 0

17) x - y - z = 0
x + y + z = 1

18) x - y + z = 0
x + z = 1
x -2y =-1

19) 8x + y +4z =9
5x -2y +4z =6
x + y =1

20) 2x +10y-8z+6u = 2
x -y + z - u = 2
x+15y-12z+8u = 0

21) x +2y +3z = 1
x - y + z = 0
x -3y - z = 2
3x +4y +3z = 3

22) 2x - y = 2
2x -2y = 1
2x + y = 2
x +5y = 1

23) x -2y +3z = 0
2x -3z = 0
3x -2y = 0

24) 3x +3y +2z = 4
3y +2z = 0
3x +3y +2z = 8

25) x +3y + z =0
2x +6y -5z =0
3x + y + z =0

26) x + y - z - u = 0
x - y + z + u = 0
x - y - z - u = 0
x + y - z + u = 0

27) 8x + y +4z = 9
5x -2y +4z = 6
x + y = 1

28) x +2y +3z =1
x - y + z =0
x -3y - z =2
3x +4y +3z =3

29) 8x + y +4z = 9
5x -2y +4z = 6
x + y = 1

30) 6x - y +3z = 6
-6x +8y =-10
2x -5y - z = 4

31) x + y + z =1
3x -4y =5
7x - y -3z =8

32) x +2y = 0
x +3y = 0
+ y +2z = 0

33) x +3y + z = 0
3y + z = 0
x +6y +2z = 0

34) 2x - y + z =4
x - z =1
x + y =3

MATRIUS

1.- Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ Calculeu: a)A + B b) 3A - 2B c) A.B d) B.A

2.- Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ Calculeu: a)A + 2B b) A.B c) B.A d) $B^T.A^T$ e) $(A.B)^T$

3.- Amb les matrius de l'exercici anterior determineu a) (A.B).A b) A.(B.A)

4.- Suposem la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcula a) $A.A=A^2$ b) $A.A.A=A^3$ c) A^4 d) A^n

5.- Quin valor ha de tenir a per tal que $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 21\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6.- Calcula aplicant la definició de matrius inversa les inverses de les següents matrius sempre que sigui possible

a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

7.- Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ Calculeu A.B

8.- Donat el sistema d'equacions $\begin{cases}2x+3y=2\\ x-y+z=3\\ y+2z=0\end{cases}$ escriviu-lo en forma matricial

9.- Donada la igualtat entre matrius $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 4\end{pmatrix}$ escriviu el sistema d'equacions corresponent

10.- Multiplica les matrius $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$

11.- Calculeu el valors dels següents determinants

a) $\begin{vmatrix}2/3 & 7/4\\ 5/2 & 8/5\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}a & a-2\\ a+2 & 1-a\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}x & x+1\\ x+2 & x+3\end{vmatrix}$

12.- Resoleu les equacions:

a) $\begin{vmatrix}x-1 & 2x-3\\ 2 & x\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}x+1 & x+3\\ x-2 & x+1\end{vmatrix}=12$

13.- Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ determineu la matriu X que satisfà la igualtat 3X-2A=4B

14.- Donada la matriu $\begin{pmatrix}11 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ determina el menor complementari de l'element a_{23}

15.- Calcula el valor del determinant $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 4\\ -1 & 1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & -3 & 4\end{vmatrix}$

16.- Calcula el valor del determinant $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$

17.- Calcula les matrius inverses (si existeixen) de

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

18.- Determina les matrius inverses de: $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

19.- Quin valor ha de tenir a per tal que la matriu X no tingui inversa? $X=\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 7 & 1 & 0\end{pmatrix}$