

PROBABILITAT

1. Experiment aleatori. Espai mostral associat

1.1. Concepte d'experiment aleatori.

Definició : Un fenomen o experiència es diu aleatori quan al repetir-lo en condicions anàlogues no es pot predir el resultat. Si per contra, es pot predir el resultat d'una experiència encara abans de realitzar-la, es diu que l'experiment és determinista.

Són fenòmens aleatoris :

- Extracció d'una carta de la baralla.
- Llançament d'un dau.
- Respostes a una enquesta.

1.2. Espai mostral. Esdeveniment elemental.

Definició : El junt de tots els possibles resultats d'un experiment s'anomena espai mostral

Exemple:

L'espai mostral de l'experiment que consisteix en llançar una moneda enlaire tres vegades és:

$$E = \{(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(x,c,c),(x,x,c),(x,c,x),(c,x,x),(x,x,x)\}$$

Cadascú dels elements de l'espai **E** s'anomena **esdeveniment elemental**

1.3. Esdeveniment . Esdeveniment impossible o nul. Esdeveniment contrari.

Definició : Sigui **E** l'espai mostral d'un experiment aleatori. Es diu esdeveniment a tot subconjunt de l'espai mostral **E**.

Un esdeveniment pot determinar-se per extensió (enumerant els elements) o donant una propietat que es verifica per, i només per, els elements d'aquest subconjunt.

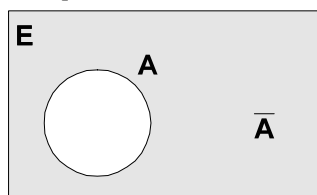
Direm que un esdeveniment **A** se verifica quan al realitzar l'experiment s'obté com resultat un dels esdeveniments del conjunt **A**

El conjunt format per tots els esdeveniments de l'espai mostral es diu **espai de esdeveniments (S)**. És a dir, l'espai de esdeveniments està format per tots els subconjunts de l'espai mostral.

Si l'experiència aleatòria és, per exemple, llançar una moneda , l'espai mostral és $E=\{c,x\}$ i l'espai d'esdeveniments és $S= \{\phi, \{c\}, \{x\}, \{c,x\}\}$

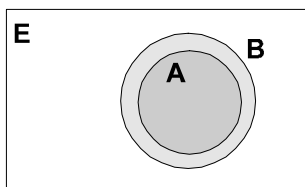
Els esdeveniments ϕ i **E** es diuen esdeveniment **impossible** i esdeveniment **segur**: L'esdeveniment impossible és aquell que mai es realitza, i el esdeveniment segur és el que es realitza sempre.

Donat un esdeveniment **A** , es diu esdeveniment **contrari** o **complementari** d'**A** , i es representa per $\bar{A}$, al esdeveniment que es realitza quan no es realitza **A** i recíprocament.



L'esdeveniment contrari d'**E** és ϕ y recíprocament.

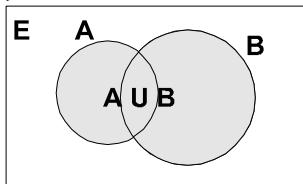
Nota: Un esdeveniment **A** es diu que està contingut en un altre **B** si sempre que es verifiqui **A** es verifica **B**. Es representa $A \subset B$



1.4 Operacions amb esdeveniments.

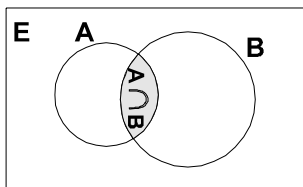
Unió de esdeveniments.

Donats dos esdeveniments A i B es diu **unió d'A i B** i es representa per $A \cup B$ al esdeveniment que es realitza quan es realitza algun d'ells, A o B.



Intersecció de esdeveniments.

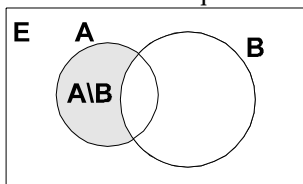
Donats dos esdeveniments A i B, s'anomena intersecció d'A i B i es representa per $A \cap B$, a l'esdeveniment que es realitza si i només si es realitzen simultàniament A i B.



Dos esdeveniments A i B la intersecció de la qual és l'esdeveniment impossible es diuen esdeveniments **incompatibles**. (evidentment dos esdeveniments contraris són sempre incompatibles).

Diferència de esdeveniments.

Donats dos esdeveniments A i B, s'anomena esdeveniment diferència d'A i B i s'escriu $A \setminus B$ a l'esdeveniment format per tots els esdeveniments d'A que no són de B, o sigui



Propietats de la unió i intersecció d'esdeveniments.

	UNIÓ	INTERSECCIÓ
1. Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3. Idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificativa	$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$	
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
La unió i la intersecció de dos esdeveniments contraris és:		
$A \cup \bar{A} = E$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$		

Conseqüències:

i) $A \cup \emptyset = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

ii) $A \cap E = A$, $A \cup E = E$

iii) Lleis de Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2. Probabilitat.

2.1. Definició de freqüència absoluta y relativa de un esdeveniment.

Propietats.

S'anomena **freqüència absoluta** d'un esdeveniment A al nombre de vegades que es verifica A al realitzar l'experiment un nombre determinat de vegades.

S'anomena **freqüència relativa** d'un esdeveniment A al quocient entre la seva freqüència absoluta i el nombre de vegades que es realitza realitzar l'experiment .

$$f_r(A) = \frac{f_a(A)}{n}$$

n : nombre de vegades que s'ha realitzat l'experiment.

Exemple:

Realitzem un esdeveniment, com per exemple, llançar una moneda 15 vegades, i anotem els resultats: 8 cares i 7 creus.

Diem que la freqüència absoluta de l'esdeveniment {treure cara} ha estat de 8 i la de l'esdeveniment {treure creu} ha estat de 7.

També diem que la freqüència relativa de l'esdeveniment "cara" en la repetició d'aquest experiment aleatori ha estat de 7/15 i la de "creu" de 8/15.

Propiedades :

(1)	(2)	(3)
$0 \leq f_r(A) \leq 1$	$f_r(E) = 1$	$\text{Si } A \cap B = \emptyset \rightarrow f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

2.2 Introducció al concepte de probabilitat com a límit de freqüències.

La freqüència relativa d'un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un nombre a mesura que el nombre de proves de l'experiment aleatori creix indefinidament.

Aquest nombre al que la freqüència relativa s'apropa a mesura que és major el nombre de proves realitzades, ho cridarem **probabilitat** de l'esdeveniment.

2.3 Definició axiomàtica de probabilitat.

Sigui E l'espai mostral d'un experiment aleatori. Una probabilitat en E és qualsevol funció P que assigna a cada esdeveniment A un nombre real P(A) que compleix les següents propietats:

A1 $\rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

A2 $\rightarrow P(E) = 1$

A3 $\rightarrow \text{Si } A \cap B = \emptyset \text{ (A i B incompatibles) } \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Aquests condicions reben el nom d'axiomes de la probabilitat

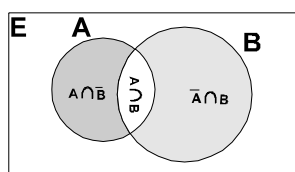
2.4 Propietats de la probabilitat.

1- $P(\emptyset) = 0$

2- $P(A) = 1 - P(A^c), \quad \forall A \in P(E)$

3- Si A y B són esdeveniments tals que $A \subset B$, llavors $P(A) \leq P(B)$

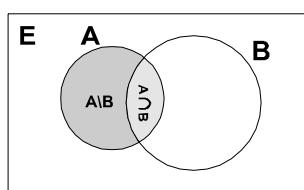
4- Si A i B son dos esdeveniments no necessàriament incompatibles, llavors: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



5- Generalitzant :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$



Exemple:

Considerem els esdeveniments $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{3, 6\}$ i calculem :

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}, A \cap B = \{6\}, P(A \cup B) = \frac{4}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Es compleix la igualtat abans relacionada.: $\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$

2.5. Regla de Laplace.

Si els resultats d'un experiment aleatori són equiprobables , llavors la probabilitat d'un esdeveniment A és:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ de casos possibles}}$$

3. EXPERIMENTS ALEATORIS COMPOSTOS

Són el resultat de fer, l'un rere l'altre una sèrie d'experiments aleatoris simples Aquests experiments porten associats els anomenats esdeveniments compostos

Exemple:

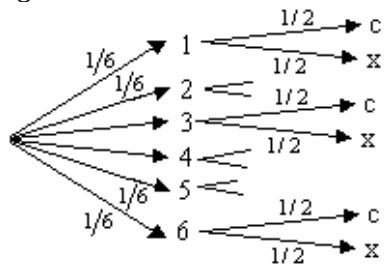
Llançem enlaire una moneda i un dau . ¿Quin és l'espai mostral? ¿Quines son les probabilitats de cada esdeveniment ? Podem obtenir l'espai mostral mitjançant una taula

$\square$	1	2	3	4	5	6
c	c1	c2	c3	c4	c5	c6
x	x1	x2	x3	x4	x5	x6

Per la qual cosa, $E = \{c1, c2, c3, \dots, x6\}$ i són tots equiprobables, per tant

$$P(c1) = P(c2) = \dots = P(x6) = \frac{1}{12}.$$

Però no sempre es pot obtenir l'espai mostral i, per tant, a vegades es convenient seguir un altre camí que consisteix en determinar la probabilitat de l'esdeveniment compost a partir de les probabilitats dels esdeveniments simples que el componen. Per exemple, en el cas anterior, podíem haver fet un diagrama en arbre:



La probabilitat d'obtenir un 1 al dau i una c a la moneda serà $P(1, c) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

També en el llançament de dues monedes (que és el mateix que el llançament d'una moneda dues vegades, la probabilitat d'obtenir primer una creu i després una cara és

$$P(x, c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

4. Probabilitat condicionada. Esdeveniments dependents

4.1. Definició de probabilitat condicionada.

Quan es realitza un experiment aleatori compost de dos (o més) experiments simples , a vegades la probabilitat de un determinat esdeveniment al segon experiment depèn del que s'hagi obtingut al primer experiment.. Diem que la probabilitat del segon esdeveniment està **condicionada** pel primer

Exemple:

Els resultats d'una enquesta sobre la actitud política de 334 persones és::

	HOMES	DONES	TOTAL
DRETES	145	42	187
ESQUERRES	51	96	147
TOTAL	196	138	334

Sigui **A** :“ser home” y **B** :“ser de dretes”. Es tria una persona a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui de dretes sabent que és home?

Evidentment la probabilitat demanada és : $\frac{145}{196}$ doncs hi ha 196 homes dels quals 145 so de dretes.

Aquesta probabilitat és la que anomenarem **probabilitat condicionada** de l'esdeveniment B respecte a l'esdeveniment A.

D'una altra manera, la probabilitat condicionada d'un esdeveniment B respecte d'un altre A és la probabilitat de l'esdeveniment B sabent que prèviament ha ocorregut l'esdeveniment A.

Definició : Es diu probabilitat condicionada de l'esdeveniment B respecte de l' esdeveniment A, i la denotarem per $P(B/A)$, al quocient :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0$$

Anàlogament podem definir $P(A/B)$.

De l'anterior es dedueixen clarament les relacions següents :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

4.2. Esdeveniments dependents.

Exemple:

Considerem l'experiment de treure una bola d'una bossa que conté 2 boles blaves i 1 de verda, i , sense tornar-la a la bossa, treure'n una altra bola.

Assignem una probabilitat a aquest esdeveniment de la forma següent

Primera extracció: $P(\text{verda})=1/3$ i $P(\text{blava})=2/3$

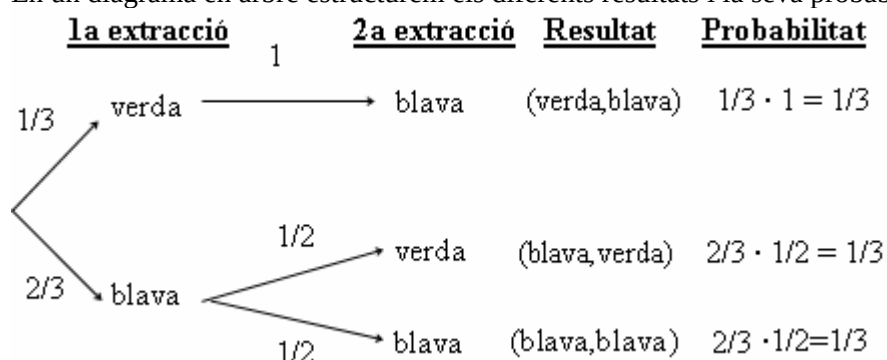
Si hem tret una bola verda, ens queden 2 de blaves. La probabilitat és:

$$P(\text{blava}/\text{verda})=1.$$

Però, si la primera bola que traiem és blava, ens en queden 1 de blava i 1 de verda per a la segona extracció, amb la mateixa probabilitat. Per tant:

$$P(\text{blava}/\text{blava})=1/2.$$

En un diagrama en arbre estructurarem els diferents resultats i la seva probabilitat:



La suma de les probabilitats dels esdeveniments elementals de l'experiment compost és sempre igual a 1.

La probabilitat que es produeixin dos esdeveniments A i B és igual a la probabilitat que es produeixi el primer (A) per la probabilitat que es produeixi el segon després d'haver-se produït el primer(B/A).

Per escriure-ho, utilitzem una d'aquestes expressions:

$$P(A \cdot B) = P(A \cap B) = P(A, B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

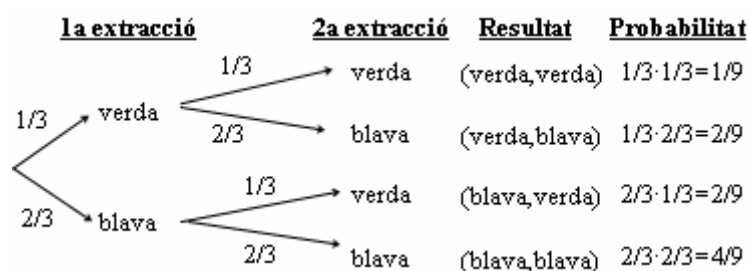
4.3. Esdeveniments independents

Definició : Dos esdeveniments A i B s'anomenen **independents** si

$$P(B) = P(B/A)$$

Exemple

Fiquem en una bossa 2 boles blaves i 1 de verda. En traiem una bola, l'anotem el color i la tornem a la bossa. Després, en traiem una altra i l'anotem el color. Són extraccions **amb devolució** i els resultats possibles són:



Tant a la primera extracció com a la segona, hi ha, a la bossa, 1 bola verda i 2 boles blaves. El resultat de la primera extracció no influeix en la segona, i per tant, si anomenem B a treure bola blava i V a treure bola verda, tenim:

$$P(B/B) = P(B/V) = 2/3 \text{ i } P(V/V) = P(V/B) = 1/3$$

Com es veu la suma de les probabilitats dels esdeveniments elementals de l'experiment compost és 1.

Tant en l'extracció de boles amb devolució com en el llançament enlaire d'una moneda dues vegades consecutives, el resultat obtingut en el primer esdeveniment (A) no influeix en el segon esdeveniment. Es diu que son **independents i es compleix que :**

$P(B/A)=P(B).$

Si A i B són esdeveniment independents: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

Si són més de dos esdeveniments, també: $P(A \cdot B \cdot C)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Tant en l'extracció de boles amb devolució com en el llançament enlaire d'una moneda dues vegades consecutives, el resultat obtingut en el primer experiment no influeix en el segon esdeveniment. Es diu que son **independents i es compleix que : $P(B/A)=P(B).$**

Si A i B són esdeveniment independents: $P(A, B)=P(A) \cdot P(B)$

Si són més de dos esdeveniments, també: $P(A, B, C)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Exemple:

Considerem l'experiment d'extraure cartes d'una baralla . ¿quina és la probabilitat de que siguin dos reis ?.

- a) sense tornar la 1ª. carta
- b) amb devolució

Solució :

- a) R_1 : “treure rei a la 1ª extracció”
- b) R_2 : “ treure rei a la 2a extracció”

a) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = 4/40 \cdot 3/39$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = 4/40 \cdot 4/40$

Nota: En l'enunciat d'activitats sobre extraccions de cartes o de boles cal tenir molt en compte si es fa amb devolució o sense. Quan s'especifica que és amb devolució, el segon esdeveniment no depèn del primer : són independents.

Però, quan **l'extracció es fa sense devolució o quan es tracta d'extraccions simultànies, el segon esdeveniment depèn del primer i per tant, són dependents.**

Exemple 2) Considerem l'experiment: Treure cartes d'un joc de cartes **sense retornar-les. (Probabilitat d'esdeveniments compostos dependents)**

A) ¿Quina és la probabilitat de treure'n dos i que siguin dues asos?

B) ¿Quina és la probabilitat que siguin tres asos?:

Solució a) :

El joc de cartes té 40 cartes i 4 asos. Si anomenem A a treure un as, la $P(A)$ val $1/40$. Si no retornem la carta, queden 39 cartes , de les quals hi ha tres asos, per tant:

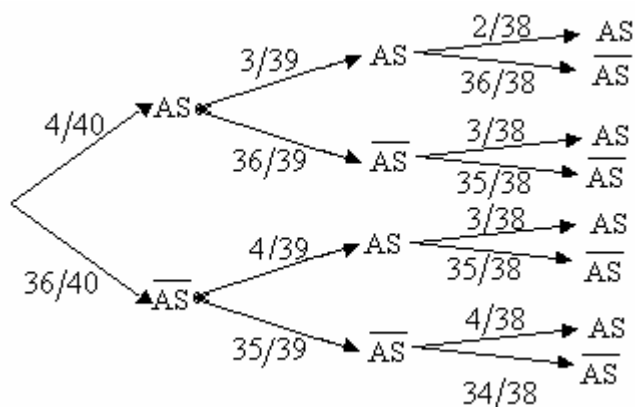
$$P(A, A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 0,007692$$

Solució b)

En aquest cas serà:

$$P(A, A, A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0,000408$$

Observa el diagrama en arbre:



C) En aquest últim cas, quina serà la probabilitat d'obtenir dos asos entre les tres cartes?

Exercicis

1. Traiem dues cartes simultàniament d'una baralla, Quina és la probabilitat de que siguin dues figures?
2. Fiquem en una bossa sis boles amb les lletres P,R,I,M,E,R . i traiem una rera l'altra les sis. ¿Quina és la probabilitat d'obtenir la paraula PRIMER ?
3. En una bossa tenim 5 boles vermelles, 4 blanques i 3 negres i en traiem tres boles. ¿Quina és la probabilitat d'obtenir en aquest ordre negre-vermella – vermella . Fes un diagrama en els dos casos a) sense devolució i b) amb devolució
4. Una taula de despatx té dos calaixos . Al primer hi ha 4 retoladors vermells i dos de blaus. Al segon hi ha 3 vermells i 3 de blaus. Obrim un calaix i agafem un retolador. ¿Quina és la probabilitat de que s'hagi obert el segon calaix i s'hagi tret un retolador vermell?
5. En una urna tenim 3 boles vermelles i 4 de verdes. I en una altra urna tenim 5 vermelles i 3 de verdes. Escollim a l'atzar una urna i agafem una bola . ¿quina probabilitat hi ha de que aquesta bola sigui verda? (dos casos: sense i amb devolució)
6. En el cas anterior de les dues urnes, escollim una bola de cada urna a l'atzar. ¿Quina és la probabilitat de que siguin del mateix color?
7. En una bossa tenim 5 boles vermelles, 4 blanques i 3 negres i en traiem dues boles. ¿Quina és la probabilitat d'obtenir dues boles de diferents color? (dos casos a) sense devolució i b) amb devolució)
8. Agafem tres cartes d'una baralla ¿quina és la probabilitat de que siguin les tres oros?
9. I de que siguin del mateix coll?
10. Llancem tres daus enlaire. ¿Quina és la probabilitat de que siguin tres dosos? I de que siguin les tres iguals?

Definició :

Diem que un conjunt d'esdeveniments $A_1, A_2, \dots, A_n$ formen un **sistema complet d'esdeveniments** per a un determinat experiment aleatori si verifiquen les dues condicions següents:

a) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$

b) $A_1, A_2, \dots, A_n$ són **incompatibles** 2 a 2. ($A_i \cap A_j = \emptyset$)

Teorema de la Probabilidad Total

Sigui $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema complet d'esdeveniments tal que la probabilitat de cada un d'ells es distinta de zero, i sigui B un esdeveniment per al que es coneixen les probabilitats $P(B/A_i)$, llavors la probabilitat de l'esdeveniment B vé donada per :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$