24. A partir de la gràfica s'observa que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ i que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$

Per tant, en el primer límit tenim $1^{+\infty} = e$ i en el segon $1^{+\infty} = e^2$.

25. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x+1} = e^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{x+1} = e$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-3}{x-4}\right)^{x} = e$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x^2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{x} = e^{\frac{3}{2}}$

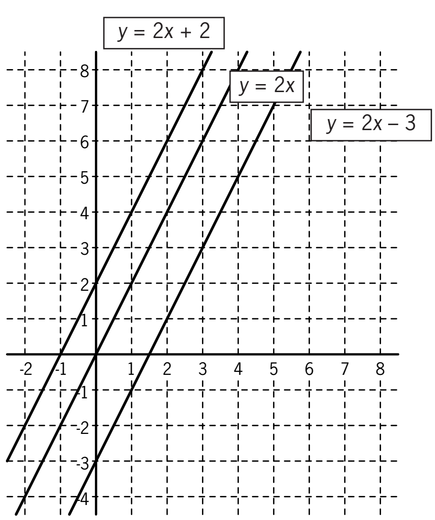
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^{x+1} = e^2$

26. Fixat un nombre k tan petit com es vulgui, podem trobar un nombre δ tal que:
Si $|x - a| < \delta$ aleshores $f(x) < k$.

27. Fixada prèviament una distància r entre les imatges i el límit, podem trobar un valor k tal que:
Si $x < k$ llavors $|f(x) - L| < r$.

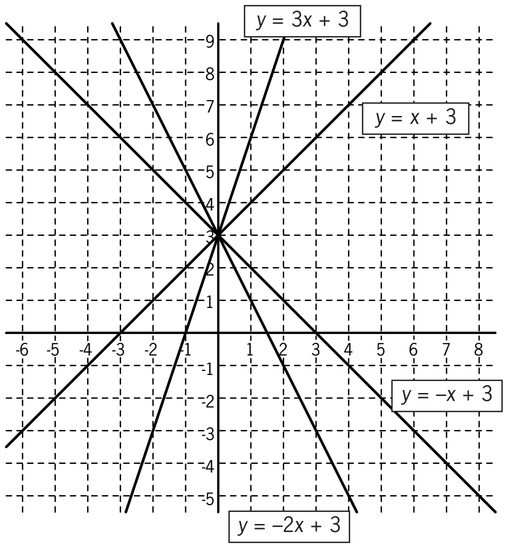
unitat 2 Derivades

1. a)



b) Són paral·leles. Tallen l'eix d'ordenades en punts diferents.
c) El nombre que multiplica la x determina l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses.

d)



Totes tallen l'eix d'ordenades en el punt (0, 3). Si el nombre que multiplica la x és positiu, la funció és creixent, i si és negatiu la funció és decreixent.

2. Responen correctament en Daniel, l'Anna, l'Adrià i la Cristina.

3. 1a gràfica: $f(x)$ té pendent 4, $g(x)$ té pendent 2/3 i $h(x)$ té pendent 0.
2a gràfica: $f(x)$ té pendent –1/2 i $g(x)$ té pendent –3.

4. a) En el quilòmetre 80 i en el 90.
b) 8 %
c) 4,3 %
d) Perquè té més pendent.

5. a) 3° en total i 1,5° per hora.
b) 1° en total i 0,25° per hora.
c) 0,25° per hora.
d) 0,75° per hora.

6. a) Entre les 6 h i les 12 h: –15/6 = 2,5 mil·libars per hora.
Entre les 12 h i les 18 h: 0/6 = 0 mil·libars per hora.
Entre les 18 h i les 24 h: 25/6 = 4,17 mil·libars per hora.
b) Continuarà el mal temps.
No canviarà el temps. Continuarà el mal temps.
Farà bon temps.

7. a) –2
b) –1
c) 2
d) 2/3

8. Per a la funció $f(x)$:
Entre 1 i 5 la taxa mitjana de variació és 2.
Entre 1 i 4 la taxa mitjana de variació és 2.
Per a la funció $g(x)$:
Entre 1 i 5 la taxa mitjana de variació és 6.
Entre 1 i 4 la taxa mitjana de variació és 5.

Per a la funció $h(x)$:

Entre 1 i 5 la taxa mitjana de variació és 6.

Entre 1 i 4 la taxa mitjana de variació és 5.

9. En general, sí.

Les funcions que tenen per gràfica una recta.

10. a) pendent = $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{2{,}2}{5{,}3} = 0{,}42$

b) t.m.v. entre a i b = $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{2{,}2}{5{,}3} = 0{,}42$

c) t.m.v. entre a i b = pendent de la recta secant que passa pels punts d'abscissa $x = a$ i $x = b$.

11. a) 4

b) $y = 4x - 3$

c) 6 i $y = 6x - 4$

12. a) $d(4) = 80$ m i $d(6) = 180$ m.

b) En 2 segons ha recorregut 100 m.

c) La velocitat mitjana de 50 m/s.

d) La velocitat mitjana entre $t = 3$ s i $t = 5$ s ha estat de 40 m/s.

La velocitat mitjana entre t = 2 s i t = 7 s ha estat de 45 m/s.

e) La velocitat mitjana al llarg de la caiguda ha estat de 36,85 m/s.

13. a)

temps	t	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	…	→2
$v_m(2, t)$	$\dfrac{d(t) - d(2)}{t - 2}$	25	22,5	20,5	20,05	20,005	20,0005	…	→20

b) $v(2) = 20$ m/s

c) No. Velocitat instantània.

14. $v(3) = 30$ m/s

15. $v(2) = 4$ m/s, $v(3) = 6$ m/s i $v(4) = 8$ m/s.

16. La recta 2.

17. a) És la recta tangent perquè en les proximitats de $x = a$ és la recta que més s'aproxima a la gràfica de la funció.

pendent = 4,1/5,9 = 0,695

b)

longitud *FB*	longitud *AF*	pendent de la recta secant *AB*
2,4	13,2	2,4/13,2 = 0,182

c) S'aproximen a la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en $x = a$.

d)

recta secant	pendent de la recta secant: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
recta secant AB	2,4/13,2 = 0,182
recta secant AB'	2,9/8,3 = 0,349
recta secant AB''	2,4/5,3 = 0,453
recta secant AB'''	1,7/3,1 = 0,548
recta secant AB^{iv}	0,7/1,1 = 0,636
recta secant AB^{v}	0,4/0,6 = 0,667
…	…
rectes secants → recta tangent	pendents de les rectes secants → pendent de la recta tangent = 0,695

e) $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0{,}695$

18. a) El pendent de la recta secant és 4.

b) El pendent de la recta secant és 3.

El pendent de la recta secant és 2,5.

c)

x	3	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	4	3	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001

d) El pendent de la recta secant és 0.

e) El pendent de la recta secant és 1.

El pendent de la recta secant és 1,5.

f)

x	–1	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$	0	–1	–1,5	–1,9	–1,99	–1,999	–1,9999

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$

h) El pendent de la recta tangent és 2.

i) $f'(1) = 2$

j) (1, 1)

k) $y = 2x - 1$

19.

Interpretació física	Interpretació matemàtica	
	Interpretació analítica	Interpretació geomètrica
$d(t)$	$f(x)$	Gràfica de $f(x)$
Velocitat mitjana $v_m(t_0, t_0+h) = \dfrac{d(t_0+h) - d(t_0)}{h}$	Taxa mitjana de variació $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Pendent de la recta secant
Velocitat instantània $v\,(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$	Derivada de la funció en $x = a$ $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	Pendent de la recta tangent

20. $f'(3) = 12$

21. $f'(1) = 4$

22. $f'(-2) = 9$
La recta tangent és $y = 9x + 7$.

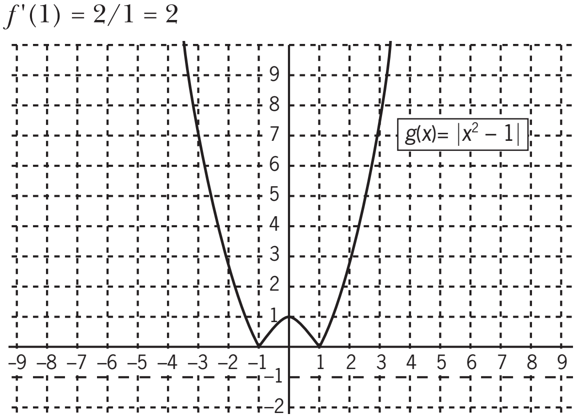
23. a) 0,877343
b) cos'(0,5) = 0,877

24. a) 0,499988
b) $f'(2) = 0{,}5$

25. a) 0,28867
b) $f'(3) = 0{,}289$

26. a) $f'(-1) = -2/1 = -2$
$f'(0) = 0$ (recta horitzontal)
$f'(2) = 4/1 = 4$
b) $y = 4x - 4$

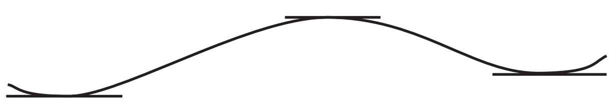
27. a) $f'(a) = 0$ i $f'(b) = 0$.
b) $f'(c)$ no existeix perquè, com que la funció és discontínua en $x = c$, no té recta tangent en aquest punt i no es pot trobar el pendent.
c) No, perquè no tenen recta tangent.

28. a) $f'(1) = 2/1 = 2$
b)


c) La resposta correcta és la de la Maria.

29. a) En x = a i $x = c$ no existeix la derivada.
En $x = 0$ la derivada de la funció és zero.
En $x = c$ i $x = g$ la derivada de la funció és negativa.
En $x = e$ i $x = f$ la derivada de la funció és positiva.
b) En $x = b$ la derivada és zero.
En $x = c$ el signe de la derivada és negatiu.
En $x = e$ el signe de la derivada és positiu.
En $x = f$ el signe de la derivada és positiu.
En $x = g$ el signe de la derivada és negatiu.

30. a) En el punt *c,* perquè ha de pujar.
b) Les rectes tangents en *A*, *B* i *C*.
c) La derivada en *A* és zero.
La derivada en *B* és positiva.
La derivada en *C* és negativa.
d)



31. La primera gràfica és la de l'apartat *a*.
La segona gràfica és la de l'apartat *b*.
La quarta gràfica és la de l'apartat *c*.
La cinquena gràfica és la de l'apartat *d*.
La tercera gràfica és la de l'apartat *e*.

32.

x	(–∞, –1)	–1	(–1, 1/2)	1/2	(1/2, 2)	2	(2, +∞)
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	↗	màxim	↘	mínim	↗	màxim	↘

33.

x	(–∞, –3)	–3	(–3, –1)	–1	(–1, 0)	0	(0, 2)	2
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+	0
$f(x)$	↘	mínim	↗	màxim	↘	mínim	↗	màxim

x	(2, 4)	4	(4, +∞)
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	mínim	↗

34. a) $y = 2x$
b) $f'(-7) = -14$, $f'(21) = 42$ i $f'(40) = 80$.

35. a) $f'(8) = 16$
b) $f'(3/2) = 3$

c) En $x = 3$ la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 6x + 54$.
d) $y = 10x - 25$

36. a) $f'(x) = 6x$
b) $f'(x) = 2x + 3$
c) $f'(x) = -1/x^2$

37. a) La mateixa recta $y = b$. El seu pendent és zero.
b) Per a qualsevol valor de l'abscissa el pendent de la recta tangent és zero. Per tant, $f'(x) = 0$.

38. a) La mateixa recta $y = ax$. El seu pendent és a.
b) Per a qualsevol valor de l'abscissa el pendent de la recta tangent és a. Per tant, $f'(x) = a$.

39. Per a qualsevol valor de l'abscissa la recta tangent és la mateixa recta $y = ax + b$ de pendent a. Per tant, $f'(x) = a$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

40. $y' = 0$, $y' = 2$, $y' = 5$ i $y' = -0{,}4$.

41. a) $f'(x) = -10x + 1$
b) $g'(x) = 16x - 7$
c) $h'(x) = -96x^3 + 63x^2 + 72x$

42. a) $f'(x) = -45x^2 - 30x$
b) $g'(x) = -72x^2 - 18x$
c) $h'(x) = -96x^3 + 81x^2 - 3$

43. a) $f'(x) = \dfrac{6}{x^3}$

b) $g'(x) = \dfrac{5x^2 + 14x - 10}{x^4 + 4x^2 + 4}$

c) $h'(x) = \dfrac{15x^2 - 70x + 15}{(-2x^2 + 3x - 5)^2}$

44.

funció	transformació de la funció	derivada
$f(x) = x$	$f(x) = x^1$	$f(x) = 1 = 1x^0$
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = 2x = 2x^1$
$f(x) = x^3$	$f(x) = x^2 \cdot x$	$f(x) = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$
$f(x) = x^4$	$f(x) = x^3 \cdot x$	$f(x) = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$
$f(x) = x^5$	$f(x) = x^4 \cdot x$	$f(x) = 4x^3 \cdot x + 1 \cdot x^4 = 5x^4$
…	…	…
$f(x) = x^n$	$f(x) = x^{n-1} \cdot x$	$f(x) = (n-1)\ x^{n-2} \cdot x + 1 \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}$

45.

a) $f'(x) = 7x^6$
b) $f'(x) = 32x^{31}$
c) $f'(x) = 12x^3$
d) $f'(x) = 9x^5$

46. a) $f'(x) = -20x^4 + 3$
b) $g'(x) = 126x^6 - 21x^2$
c) $h'(x) = -21x^6 + 105x^4 + 144x^3$

47. a) $f'(x) = \dfrac{6x^{11} + 21x^6 + 12x^5 - 3}{(x^5 + 1)^2}$

b) $g'(x) = \dfrac{-3x^2 + 32x - 3}{2x^4 - 4x^2 + 2}$

c) $h'(x) = \dfrac{28x^9 - 105x^8 + 245x^6 - 3x^4 + 30x}{(-x^3 + 3x^2 - 5)^2}$

48. a) $f'(a)$ = pendent de la recta tangent = $e^a/1 = e^a$
b) Per a qualsevol valor de l'abscissa $x = a$ es compleix que $f'(a) = e^a$. Per tant, $f'(x) = e^x$.

49. a) $f'(x) = 2x - 3e^x$
b) $f'(x) = (x^2 - x - 3)\,e^x$

c) $h'(x) = \dfrac{e^x(x - 3)}{x^4}$

50. a) $f'(a)$ = pendent de la recta tangent = $BC/AB = 1/a$
b) Per a qualsevol valor de l'abscissa $x = a$ es compleix que $f'(a) = 1/a$. Per tant, $f'(x) = 1/x$.

51. a) $f'(x) = -10x^4 - 1/4$
b) $g'(x) = (2x + x^2 - \ln x - 1/x)\; e^x$

c) $h'(x) = \dfrac{-1}{x \ln^2 x}$

d) $i'(x) = \dfrac{(e^x + 3)\; x \ln x - (e^x + 3)}{x \ln^2 x}$

52. a) $f'(x) = -5x^4 - \dfrac{\log_5 e}{x}$

b) $g'(x) = (2x - 1/x)\cdot \log_2 x + \log_2 e\,(x^2 - \ln x)/x$

c) $h'(x) = \dfrac{\log e \ln x - \log x}{x \ln^2 x}$

d) $h'(x) = \dfrac{\left(2e^x + \dfrac{1}{x \ln 7}\right) \ln x - \dfrac{1}{x}\,(2e^x + \log_7 x)}{\ln^2 x}$

53. a) $f'(c)$ = pendent de la recta tangent = a^c/k
b) Per a qualsevol valor de l'abscissa $x = a$ es compleix que $f'(a) = a^c/k$. Per tant, $f'(x) = a^c/k$.

54. a) En fer la simetria de la funció $f'(x) = e^x$ respecte de la recta $y = x$, la subtangent de longitud k coincideix amb el segment BC.

b) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\frac{1}{\ln a}}{x} = \dfrac{BC}{x} = \dfrac{k}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln a} = k$

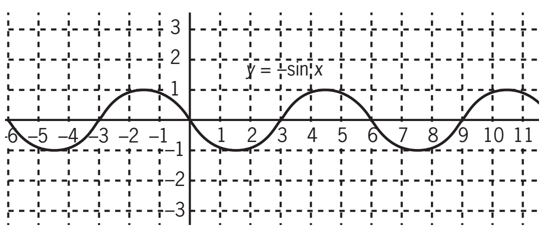
55. a) $f'(x) = -4^x \ln 4 - \dfrac{\log_3 e}{x}$

b) $g'(x) = \left(5^x \ln 5 - \dfrac{1}{x}\right) \log_{12} x + \dfrac{\log_{12} e}{x} (5^x - \ln x)$

c) $h'(x) = \dfrac{\log e - x \ln 8 \log x}{x\, 8^x}$

d) $i'(x) = \dfrac{\left(26 + \dfrac{\log_{11} e}{x}\right) - \ln 9 \;(26^x + \log_{11} x)}{9^x}$

56. a)



b) Sí, perquè la gràfica de $\dfrac{\cos(x + 0{,}001) - \cos x}{0{,}001}$, que es pot considerar quasi igual que la gràfica de la funció derivada de la funció cosinus, és quasi igual que la gràfica de la funció $f(x) = -\sin x$.

57. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan' x = \dfrac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

o bé $= 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x$

58. $\text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \text{cotan}'\, x = \dfrac{\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

o bé $= -1 - \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2\, x$

59. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec' x = \dfrac{0 \cdot \cos x - (-\sin x)\, 1}{\cos^2 x} = \dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}$

o bé $= \sec' x = \tan x \sec x$

$\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow \text{cosec}'\, x = \dfrac{0 \cdot \sin x - \cos x\, 1}{\sin^2 x} = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

o bé $= \text{cosec}'\, x = -\text{cotan}\, x\, \text{cosec}\, x$

60. a) $f'(x) = 9x^2 - \sin x$

b) $g'(x) = 9x^2 + \cos x + \sin x$

c) $h'(x) = \sin x\,(5x^4 - \sin x) + \cos x\,(x^5 + \cos x)$

d) $i'(x) = e^x\,(5x^4 + 1/\cos^2 x + x^5 + \tan x)$

e) $j'(x) = \dfrac{\sin x - \cos^3 x \tan x}{\cos^2 x \sin^2 x}$

f) $k'(x) = \dfrac{-\dfrac{\cos x + 4x}{\sin^2 x} - (-\sin x + 4)\ \text{cotan}\ x}{(\cos x + 4x)^2}$

61. Sí.

62. a) $y' = \dfrac{3}{5}\, x^{\frac{-2}{5}}$

b) $y' = \dfrac{27}{5}\, x^{\frac{4}{5}}$

c) $y' = \dfrac{84x^{\frac{7}{5}} \sin x - 35x^{\frac{12}{5}} \cos x}{5 \sin^2 x}$

d) $y' = 6x^5 \ln x + x^5$

e) $y' = -2x^{-3}$

f) $y' = -12x^{-4}$

63. a) $y = 3x - 2$

b) $y = -x/3 + 4/3$

64. $y = 0{,}71x + 0{,}15$

$y = -1{,}41x + 1{,}82$

65. $y = x/e$

$y = -ex + 8{,}39$

66. a) Sí. El pendent és 15.

b) El pendent de $(g \circ f)\ (x)$ és igual al producte de $f(x)$ i $g(x)$.

c) Sí.

67. a) $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

b) $f'(1) = 2$; $g'(f(1)) = -2$

$(g \circ f)'(1) = -4$

$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$

c) $f'(2) = 2$; $g'(f(2)) = 2$

$(g \circ f)'(2) = 4$

$(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2)$

d) $f'(a) = 2$; $g'(f(a)) = 4a - 6$

$(g \circ f)'(a) = 8a - 12$

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

e) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

68. a) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(1) = 2$; $g'(f(1)) = -1$

$(g \circ f)'(1) = -2$

$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$

c) $f'(2) = 4$; $g'(f(2)) = \dfrac{-1}{16}$

$(g \circ f)'(2) = -\dfrac{1}{4}$

$(g \circ f)'(2) = g$

d) $f'(a) = 2a$; $g'(f(a)) = -\dfrac{1}{a^4}$

$(g \circ f)'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

e) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

69. a) $h'(x) = -2 \cos x \sin x$

b) $h'(x) = \dfrac{\cos x \log e}{\sin x}$

c) $h'(x) = 10x^3 - 10x$

d) $h'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 2}}$

e) $h'(x) = -2x \sin(x^2 + 2)$

f) $h'(x) = 2^{x^2+1}\ 2x \ln 2$

g) $h'(x) = \dfrac{2}{x}$

h) $h'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 5}}$

70. a) $f'(x) = (\ln 3x \cdot 1)(3x)^x$

b) $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{3\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) x^{\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \left(\cos x \ln(\ln x) + \dfrac{\sin x}{x \ln x}\right)(\ln x)^{\sin x}$

71. a) $f'(x) = \dfrac{27x^{4/5}}{5}$

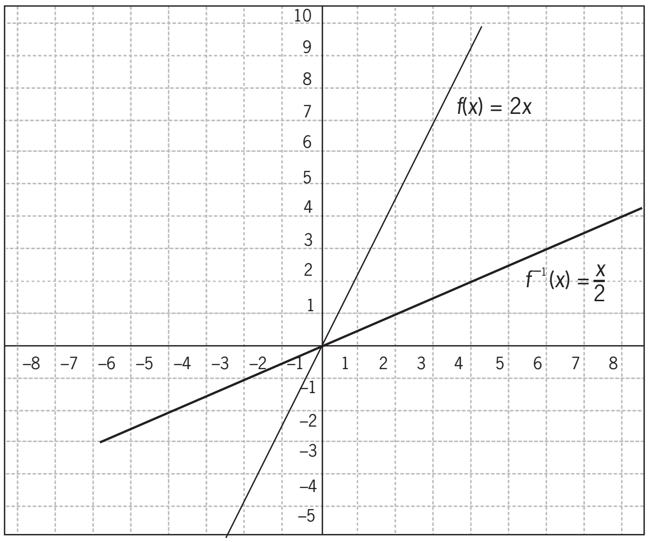
b) $f'(x) = -5x^{-6}$

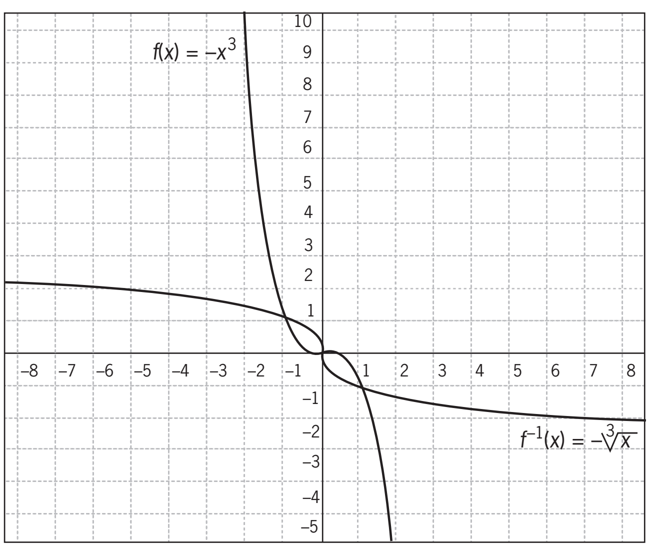
c) $f'(x) = -\pi x^{\pi - 1}$

d) $f'(x) = \dfrac{84\, x^{7/5}}{5}$

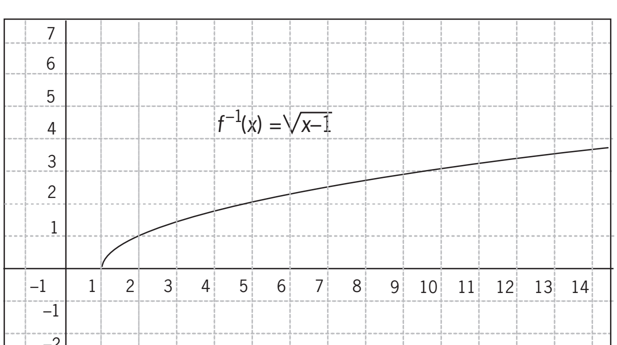
72. a) $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

73.





74.



75. a) $(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt{x})^2 = x$

$(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt{x^2}) = x$

b) $(f \circ f^{-1})'(x) = (x)' \Rightarrow (f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$

76. a) $(f')(a) = SR/PS$

b) $(f^{-1})'(f'(a)) = P'S'/S'R'$

c) $\dfrac{SR}{PS} = \dfrac{1}{\dfrac{P'S'}{R'S'}}$

d) Sí.

77. $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$

$y = \ln x \Rightarrow e^y = x$

$(f^{-1})'(y) = x \Rightarrow (f^{-1})'(y) = e^y \Rightarrow (f^{-1})'(x) = e^x$

78. $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x \ln a}} = x \ln a$

$y = \log_a x \Rightarrow a^y = x$

$(f^{-1})'(y) = x \ln a \Rightarrow (f^{-1})'(y) = a^y \ln a \Rightarrow (f^{-1})'(x) = a^x \ln a$

79.

x	arc sinus (en graus)	arc sinus (en radians)
1	90	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	45	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	30	$\frac{\pi}{6}$
0	0	0
$-\frac{1}{2}$	330	$\frac{11\pi}{6}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	315	$\frac{7\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	300	$\frac{5\pi}{3}$
–1	270	$\frac{3\pi}{2}$

80. a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\text{arc cos } x - \text{arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}}$

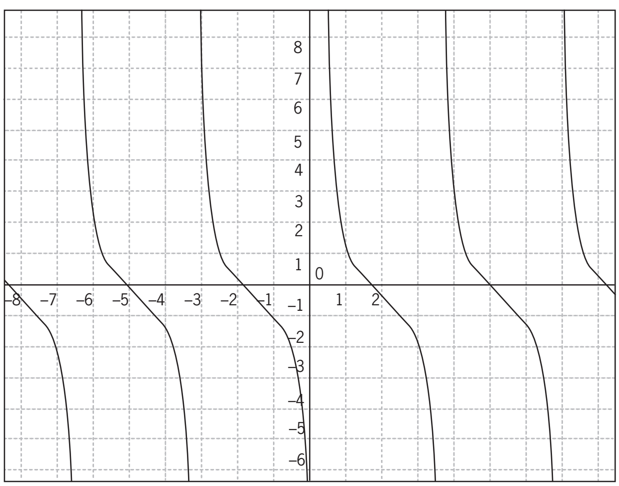
81. a) És la gràfica que resulta de fer la simetria respecte de la recta $y = x$.

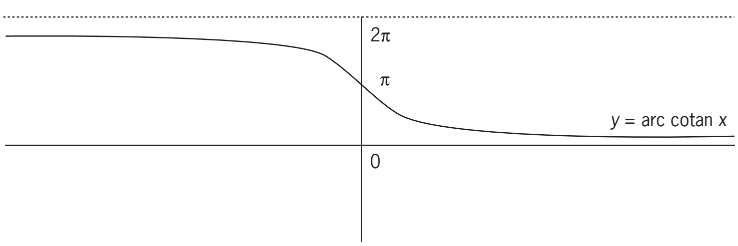
b) $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$

$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ i $y = \tan x$

$(f^{-1})'(y) = \cos^2 x \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{1 + y^2} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

82. a) És la gràfica que resulta de fer la simetria respecte de la recta $y = x$.





b) $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{-\sin^2 x}} = -\sin^2 x$

$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \text{cotan}^2 x$ i $y = \text{cotan } x$

$(f^{-1})'(y) = -\sin^2 x \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{-1}{1 + y^2} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

83. a) $f'(x) = 0$

b) $g'(x) = -\dfrac{\text{arc tan } x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\text{arc cos } x}{1+x^2}$

c) $h'(x) = \cos x \cdot \text{arc cos } x - \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$

84. a) $f'(x) = 4^x \ln 4 - \sin x$

b) $g'(x) = 9x^{-2} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$

c) $h'(x) = 5^x \ln 5 \cdot \ln x + \dfrac{5^x}{x}$

d) $i'(x) = e^x\left(3\ x^2 + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) + (x^3 + \tan x) \cdot e^x$

e) $j'(x) = \dfrac{2x \cdot \cos x - x^2 \sin x}{\cos^2 x}$

f) $k'\ (x) = \dfrac{\left(\dfrac{-1}{\sin^2 x} + 1\right) - \ln 6\ (\text{cotan } x + x)}{6^x}$

85. a) $f'(x) = -\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(4x-5)^2}}$

b) $f'(x) = 8x - 4$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x \sin^2(\ln x)}$

d) $f'(x) = \dfrac{5x^4}{\cos^2 x^5}$

e) $f'(x) = \left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right) + x^{\sin x}$

f) $f'(x) = 5^{x \tan x} \ln 5\left(\tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$

g) $f'(x) = -(\sin x \cdot \ln \cos x + \sin x)\ (\cos x)^{\cos x}$

h) $f'(x) = \dfrac{6x^{-1/7}}{7}$

i) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x^{-5/7}}{7} \tan x - \dfrac{x^{2/7}}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$

j) $f'(x) = -\dfrac{3x^{-7/4}}{4}$

k) $f'(x) = ex^{e-1}$

l) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{x}$

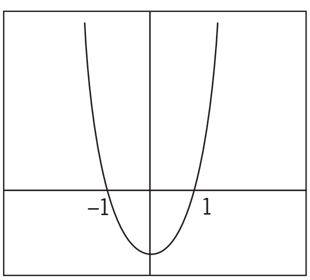
m) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 5^x}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 5^x \ln 5\right) \text{arc cos } x$

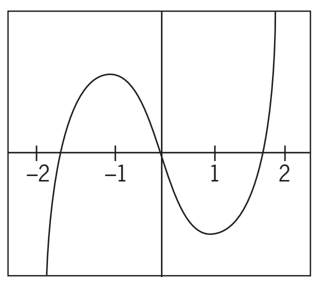
n) $f'(x) = \left(\dfrac{\log e}{x} + \dfrac{1}{1+x^2}\right) x^{3/2} + \dfrac{3x^{1/2}}{2} (\log x - \text{arc cotan } x)$

86. a) És la gràfica vermella.
b) Sí, perquè l'altra gràfica és la gràfica de la paràbola $y = x^2 - 1$.

87. Sí. En l'interval $(-\infty, -0{,}75)$ la derivada és positiva i decreixent. En $x = -0{,}75$ val zero. En l'interval $(-0{,}75; 0{,}75)$ la derivada és negativa. En $x = 0{,}75$ val zero. En l'interval $(0{,}75; +\infty)$ la derivada és positiva i creixent.

88.





89 a) $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x - 5$
b) $f'(x) = 12x^2 + 18x - 4$
c) $f'(x) = 24x + 18$
d) Sí.

90. a) $f''(x) = 18x$
b) $g''(x) = e^x$
c) $h''(x) = 4^x \ln^2 4 - \cos x$

91. $f^{\text{vii}}(x) = e^x$
$f^{\text{vii}}(x) = 3^7 \cdot e^{3x}$

92. a) La recta tangent en $(1, -\sqrt{3})$ és $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

La recta tangent en $(1, -\sqrt{3})$ és $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

b) La recta normal en $(1, -\sqrt{3})$ és $y = -\sqrt{3}x$.
La recta normal en $(1, \sqrt{3})$ és $y = \sqrt{3}x$.

93. a) $y = -0{,}25x + 2{,}75$
b) $y = 4x - 10$

Per practicar més

1. a) 4
b) –1 i 0
c) 3/3 = 1

2. $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$

3. a) La taxa mitjana de variació entre 1 i 3 és 6.
b) 6
c) $y = 6x - 6$

4. $v(2) = 23$ m/s
$v(4) = 43$ m/s

5. $f'(1) = 5$
$f'(4) = 17$

6. a) $f'(3) = -9$
b) $y = -9x + 13$

7. En $x = 1$.

8. a) $x = 17/2$
b) $x = 1$
c) $x = 7/2$

9. $y = \dfrac{-x^2}{16} + \dfrac{7x}{8} + \dfrac{31}{16}$

10. $b = -19/3$, punt de tangència $(2/3, -11/3)$

11. En el punt d'abscissa $x = \sqrt{3/2}$.

12. $y = x + 4$

13. $f'(1) = 1$ i $f'(4) = 1/16$

14. a) $t = 1{,}2$ s
b) $t = 1{,}08$ s
c) $v_t = -10t + 12$

15. a) $y = 0{,}12x + 0{,}38$
b) $y = -x + \pi/2$

16. $f'(c) = 0$
$f'(d) = 3/2$
$f'(e) = 0$
$f'(f) = -4/3$

17. a) La primera i la quarta.
b) La tercera.
c) La segona i la cinquena.

18. a) $f'(x) = -15x^2 + 2$

b) $g'(x) = -128x^3 + 60x^2 + 96x$

c) $h'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$

d) $i'(x) = \dfrac{5x^2 - 18x - 10}{(x^2+2)^2}$

e) $j'(x) = \dfrac{(\ln x - x)\ x \ln 4 - 1 + x}{x\,4^x}$

f) $k'(x) = 2x - 3e^x + \cos x$

19. a) $f'(x) = -36x^5 - 1/x$

b) $g'(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)(e^x + \sqrt{x}) + \left(e^x + \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2 - \ln x)$

c) $h'(x) = \dfrac{2x\ \ln\ x\ -\ x}{\ln^2 x}$

d) $h'(x) = \dfrac{(e^x + 3x \ln 3)(\ln x - 2x) - \left(\dfrac{1}{x} - 2\right)(e^x + 3^x)}{(\ln x - 2x)^2}$

e) $i'(x) = -20x^4 - \dfrac{\log_7 e}{x} + \cos x$

f) $g'(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)(\log_5 x + 2^x) + \left(\dfrac{\log_5 e}{x} + 2^x\ \ln 2\right)(x^2 - \ln x)$

g) $h'(x) = \dfrac{5(\log e\ \ln x - \log x)}{2x\ \ln^2 x}$

h) $i'(x) = \dfrac{\left(2e^x + \dfrac{\log_7 e}{x}\right)(\ln x - 2x) - \left(\dfrac{1}{x} - 2\right)(2e^x + \log_7 x)}{(\ln x - 2x)^2}$

i) $j'(x) = \dfrac{26^x\ \ln 26 + \dfrac{\log_{11} e}{x} - \ln 9(26^x + \log_{11} x)}{9^x}$

j) $k'(x) = 5^x \ln 5 - \dfrac{\log_3 e}{x} + \dfrac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}}$

k) $g'(x) = \left(5^x \ln 5 - \dfrac{1}{x}\right)\log_{12} x + \dfrac{\log_{12} e}{x}(5^x - \ln x)$

l) $h'(x) = \dfrac{\dfrac{\log e}{x} - \ln 8 \log x}{8^x}$

20. a) $f'(x) = 2e^x\,(x^2 - x - 3^x \ln 3)$ b) $g'(x) = 9x^2 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

21. a) $f'(x) = \left(\dfrac{\ln \log x}{\cos^2 x} + \dfrac{\tan x \,\log e}{x \log x}\right)(\log x)^{\tan x}$

b) $f'(x) = \left(\ln\,(3x + 2) + \dfrac{3x}{3x + 2}\right)(3x + 2)^x$

c) $f'(x) = \left(\dfrac{\ln \cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x\right)(\cos x)^{\sqrt{x}}$

22. a) $f'(x) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{4x - 5^2}}$

b) $f'(x) = 8x - 4$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x \sin^2 (\ln x)}$

d) $f'(x) = -\dfrac{5x^4}{\sin^2 (x^5)}$

e) $f'(x) = \left(\cos x \ln\,(2x) + \dfrac{\sin x}{x}\right)(2x)^{\sin x}$

f) $f'(x) = 5^{x \sin x} \ln 5\,(\sin x + x \cos x)$

g) $f'(x) = \left(-\sin x \,\ln\,(\tan x) + \dfrac{1}{\sin x}\right)(\tan x)^{\cos x}$

h) $f'(x) = -\dfrac{2x^{-9/11}}{11}$

i) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x^{-5/7} \log x}{7} - \dfrac{\log e \cdot x^{2/7}}{x}}{\log^2 x}$

j) $f'(x) = \dfrac{9x^{-7/4}}{4}$

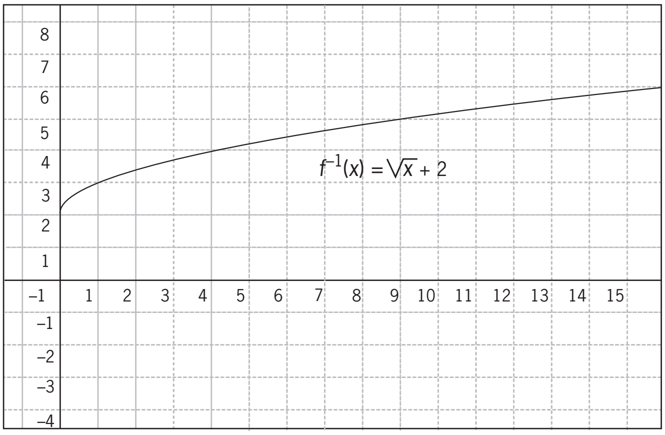
k) $f'(x) = 0{,}5^{-0{,}5}$

l) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} + 3x^2$

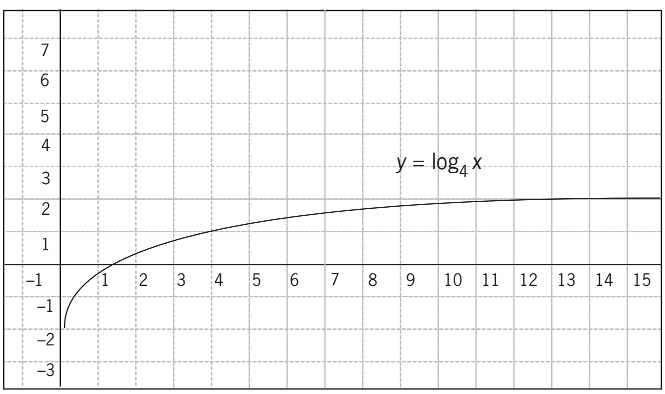
m) $f'(x) = -\dfrac{\pi\ 1}{\sqrt{1 - x^2}}(\sqrt{x} + \cos x) + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x\right) \text{arc cos } x$

n) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 + x^2}\right)x^{1/2} + \dfrac{x^{-1/2}\,(\ln x - \text{arc cotan } x)}{2}$

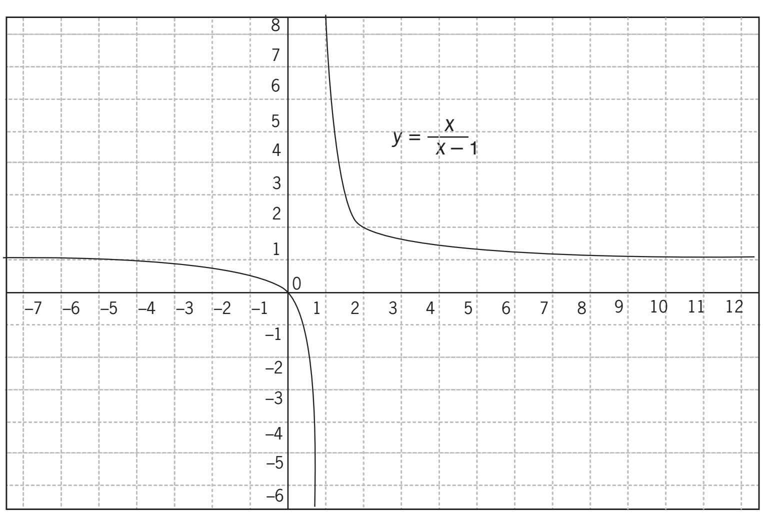
23. a)


$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$
8 7 6 5 4 3 2 1
–1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
–1 –2 –3 –4

b)


$y = \log_4 x$
7 6 5 4 3 2 1
–1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
–1 –2 –3

c)


$y = \frac{x}{x-1}$
8 7 6 5 4 3 2 1 0
–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
–1 –2 –3 –4 –5 –6

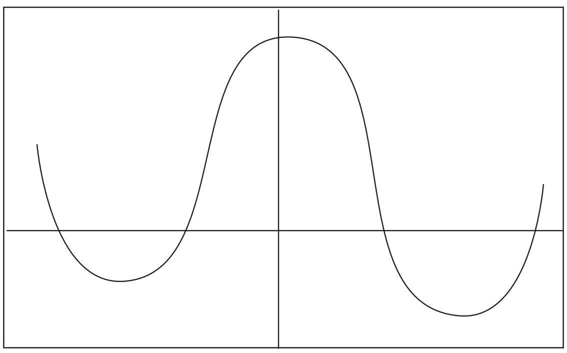
24. $b = 0$. El punt de tangència és el $(0, 0)$

25. a) $y = \dfrac{\log_5 e}{50} x + \dfrac{2 - \log_5 e}{2}$

b) $y = -x + \dfrac{\pi}{2}$

26. $g(x)$ és la funció derivada de $f(x)$.

27.



28. La gràfica de la dreta és la derivada de la gràfica de l'esquerra i a la inversa.

29. a) $y = 3$
b) $x = 1$

30. a) $y = -0{,}375x + 3{,}75$
b) $y = \dfrac{-8x}{3} - \dfrac{7}{3}$

Per saber–ne més

31. a) $\dfrac{f(a + h) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a)}{h}$

b) Sí, perquè sumem i restem el mateix nombre.

c) $\dfrac{f(a + h) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \dfrac{f(a + h) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a + h)}{h} +$

$+ \dfrac{f(a) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a)}{h} = \dfrac{(f(a + h) - f(a)) \cdot g(a + h)}{h} + \dfrac{f(a)(g(a + h) - g(a)}{h}$

d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(f(a + h) - f(a)) \cdot g(a + h)}{h} + \dfrac{f(a) \cdot (g(a + h) - g(a))}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} g(a + h) + f(a) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(a + h) - g(a)}{h} =$

$= (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$

32. a) $\dfrac{\dfrac{1}{f(a+h)} - \dfrac{1}{f(a)}}{h}$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{f(a+h)} - \dfrac{1}{f(a)}}{h} = \dfrac{f(a) - f(a+h)}{h \cdot f(a) \cdot f(a+h)} \Rightarrow h \Rightarrow -\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \dfrac{1}{f(a+h) \cdot f(a)}$

c) $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{f(a+h)} - \dfrac{1}{f(a)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \dfrac{1}{f(a+h) \cdot f(a)} =$

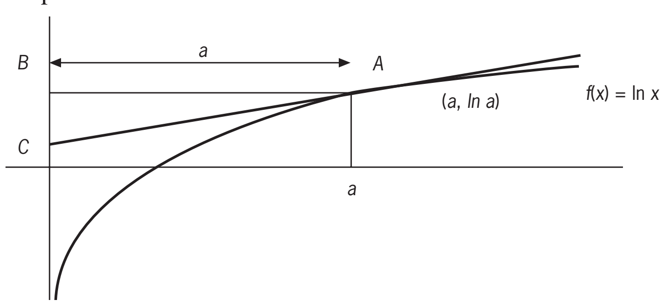
$= -\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{f(a+h) \cdot f(a)} = \dfrac{-f(x)}{(f(x))^2}$

d) Perquè la fórmula anterior no és vàlida quan el denominador val zero.

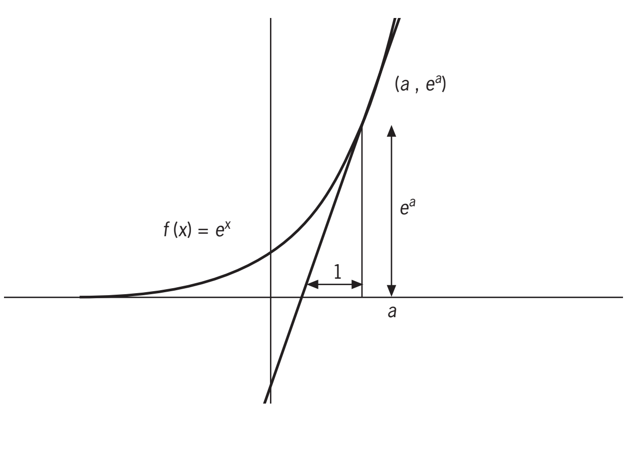
33. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2} \cdot f(x) =$

$= \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

34. 2n pas



$f'(a)$ = pendent de la recta tangent = $BC/a = 1/a \Rightarrow BC = 1$
Com que la funció $f(x) = e^x$ és la funció inversa de la funció $f(x) = \ln x$, el segment BC coincideix amb la subtangent. Per tant, hem vist la propietat següent: per qualsevol punt d'abscissa $x = a$, la subtangent a la gràfica de la funció $f(x) = e^x$ sempre val 1.



Els passos 3-6 són: l'activitat 48, l'explicació prèvia a l'activitat 52 i les activitats 53 i 54.

35. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\log(4x)}} \cdot \dfrac{\log e}{x}$

b) $f'(x) = e^{\text{arc sin}\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{2\cos(\ln x^2)}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3x \sin(\tan x^3)}{\cos^2 x^3}$

e) $j'(x) = \dfrac{4^{\log\sqrt{x}} \ln 4 \log e}{2x}$

36. a) La recta $x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) No es pot calcular $f'(0)$ perquè no es pot dividir per zero.

d) Que la recta tangent és vertical i el seu pendent no és un nombre.

37. a) El pendent és 1.

b) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

38. En la circumferència de radi 1, per a tots els angles negatius del quart quadrant, mesurats en radians, es compleix la igualtat següent: $\sin x > x > \tan x$.

Si dividim els termes d'aquesta desigualtat per $\sin x$ ($\sin x < 0$ per a tots els angles del quart quadrant) obtenim:

$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

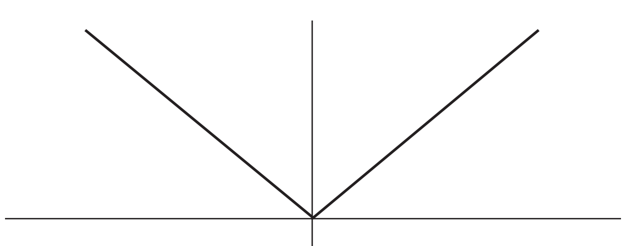
D'on es dedueix que: $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

Ara bé, quan $x \to 0$, $\cos x \to 1$, per la qual cosa $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

39. a) $(\cos)'(x) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

b) $(\cos)'(x) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

40. a)



b) En $x = 0$ perquè té forma de punxa.
c) $y = -x$

41. En $x = 0$ no existeix la derivada perquè la funció és discontínua en aquest punt.

unitat 3 Representació gràfica de funcions

1. En principi sembla que sí.

2. Ara podem dir que presenta un màxim.

3. a) Donada una funció $f(x)$, direm que és decreixent en el punt d'abscissa $x = a$ si existeix un entorn d'aquest valor tal que per a tots els valors x d'aquest entorn tenim: per a $x < a$, $f(x) \geq a$ i per a $x > a$, $f(x) \leq$ a.
b) Donada una funció $f(x)$, direm que és estrictament decreixent en el punt d'abscissa $x = a$ si existeix un entorn d'aquest valor tal que per a tots els valors x d'aquest entorn tenim: per a $x < a$, $f(x) > a$ i per a $x > a$, $f(x) < a$.

4. a) Positiu.
b) Sí, perquè en un entorn de $x = 3$ la funció pren valors més petits que $f(3)$ per a $x < 3$ i pren valors més grans que $f(3)$ per a $x > 3$. O bé perquè la funció travessa la recta $y = 4$ d'esquerra a dreta.
e) Positiu.
f) Sí. Perquè la recta tangent és positiva.

5. a) En $x = 3$ és decreixent. En $x = 0$ és creixent.
b) En ambdós casos és creixent.
c) No és ni creixent ni decreixent.
d) En $x = 0$ és creixent.

6. a) 0
b) Per a a, c i e.

7. a) $f'(x) = x^2 - 5x + 4$
b) 1 i 4
c) $f'(0, 9) = 0{,}31$ $\quad$ $f'(1, 1) = -0{,}29$
$f'(3, 9) = -0{,}29$ $\quad$ $f'(1, 1) = 0{,}31$
d) El punt d'abscissa $x = 1$ és un màxim.
El punt d'abscissa $x = 4$ és un mínim.

8.