b) En $x = 0$ perquè té forma de punxa.
c) $y = -x$

41. En $x = 0$ no existeix la derivada perquè la funció és discontínua en aquest punt.

1. En principi sembla que sí.

2. Ara podem dir que presenta un màxim.

3. a) Donada una funció $f(x)$, direm que és decreixent en el punt d'abscissa $x = a$ si existeix un entorn d'aquest valor tal que per a tots els valors x d'aquest entorn tenim: per a $x < a$, $f(x) \geq a$ i per a $x > a$, $f(x) \leq$ a.
b) Donada una funció $f(x)$, direm que és estrictament decreixent en el punt d'abscissa $x = a$ si existeix un entorn d'aquest valor tal que per a tots els valors x d'aquest entorn tenim: per a $x < a$, $f(x) > a$ i per a $x > a$, $f(x) < a$.

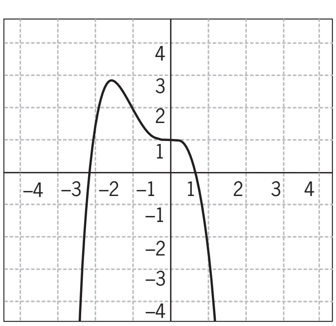
4. a) Positiu.
b) Sí, perquè en un entorn de $x = 3$ la funció pren valors més petits que $f(3)$ per a $x < 3$ i pren valors més grans que $f(3)$ per a $x > 3$. O bé perquè la funció travessa la recta $y = 4$ d'esquerra a dreta.
e) Positiu.
f) Sí. Perquè la recta tangent és positiva.

5. a) En $x = 3$ és decreixent. En $x = 0$ és creixent.
b) En ambdós casos és creixent.
c) No és ni creixent ni decreixent.
d) En $x = 0$ és creixent.

6. a) 0
b) Per a a, c i e.

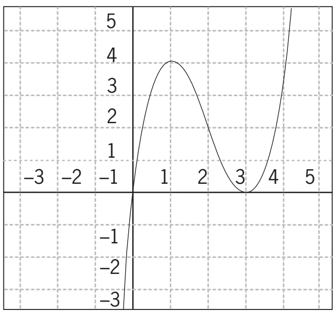
7. a) $f'(x) = x^2 - 5x + 4$
b) 1 i 4
c) $f'(0, 9) = 0,31$ $\quad$ $f'(1, 1) = -0,29$
$f'(3, 9) = -0,29$ $\quad$ $f'(1, 1) = 0,31$
d) El punt d'abscissa $x = 1$ és un màxim.
El punt d'abscissa $x = 4$ és un mínim.

8.



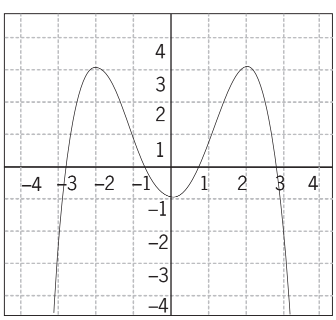
9. a)

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(1) = 4$ Màxim	↘	$f(3) = 0$ Mínim	↗



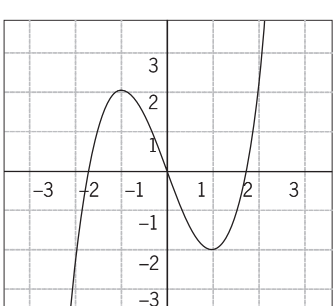
b)

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(-2) = 3$ Màxim	↘	$f(0) = -1$ Màxim	↘	$f(2) = 3$ Mínim	↗



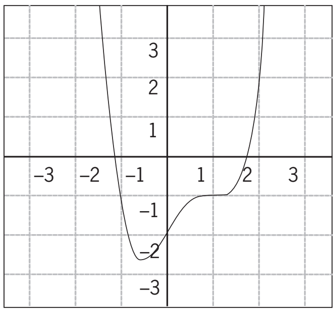
c)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-1) = 2$ Màxim	↘	$f(1) = -2$ Mínim	↗



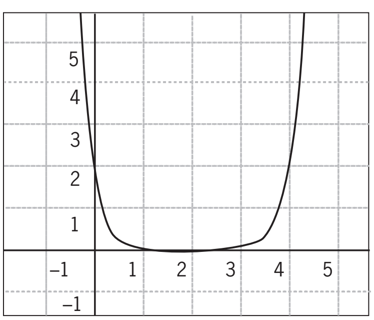
d)

x	$(-\infty, -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5,\ 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(0{,}5) = -2{,}6875$ Mínim	↗	$f(1) = -1$ punt d'inflexió	↗



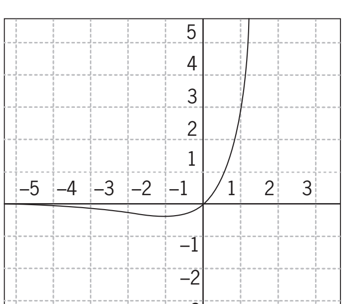
10. a)

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(2) = 2e^{-8}$ Màxim	↗



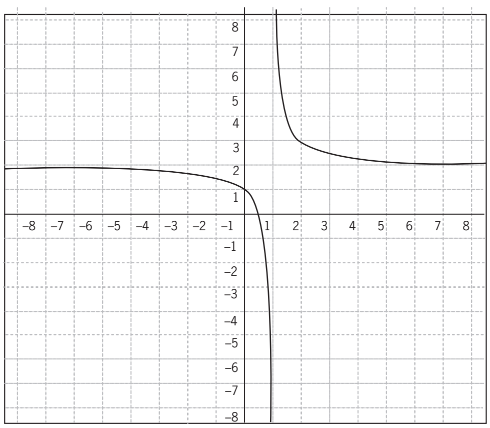
b)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(1) = -\frac{1}{e}$ Màxim	↗



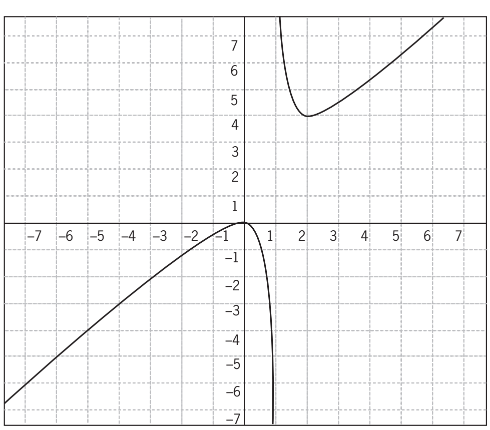
11. a)

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	–	No existeix	–
$f(x)$	↘	No existeix	↘

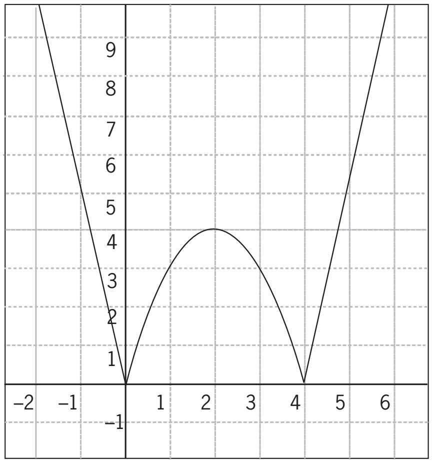


b)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	No existeix	–	0	+
$f(x)$	↗	$f(0) = -1$ Màxim	↘	No existeix	↘	$f(2) = 4$ Mínim	↗



12. a)



b)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	$f(0) = 0$ Mínim	↗	$f(2) = 4$ Màxim	↘	$f(4) = 0$ Mínim	↗

13. a) $f(x)$ en $x = 2$ i en $x = 3$ és convexa.
b) $g(x)$ en $x = 0$ és còncava.
c) $h(x)$ en $x = 0$ és còncava.
d) $i(x)$ en $x = 3$ i en $x = 2$ és còncava.

14. a) Són còncaves.
b) $f''(0) = 0$

15.

apartat	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
punt d'inflexió	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No	Sí	No	No
signe 1a derivada	–	+	–	+	–	–	+	+	0	0
signe 2a derivada	0	+	–	0	0	+	–	0	–	+

16. a)

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	«	$f(2) = 2$ Punt d'inflexió	»

b)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	«	$f(0) = 0$ Punt d'inflexió	»

c)

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	«	$f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 1{,}22$ Punt d'inflexió	»	$f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 1{,}22$ Punt d'inflexió	«

d)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	»	$f(0) = -2$ Punt d'inflexió	«	$f(1) = -1$ Punt d'inflexió	»

e) És còncava en tot el domini.

f)

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	«	$f(-2) = -2e^{-2}$ Punt d'inflexió	»

17. a) En $x = -2$ hi ha un màxim i en $x = 1$ hi ha un mínim.

b) En $x = -3$ hi ha un màxim i en $x = 5$ hi ha un mínim.

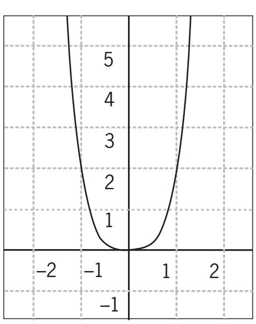
c) No n'hi ha.

d) En $x = 0$ hi ha un mínim.

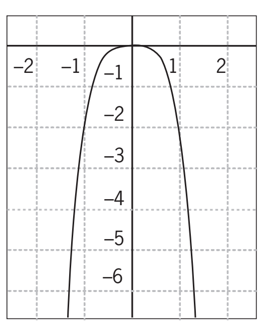
e) En $x = \dfrac{\pi}{2}$ hi ha un màxim. En $x = \dfrac{3\pi}{2}$ hi ha un mínim.

f) No n'hi ha.

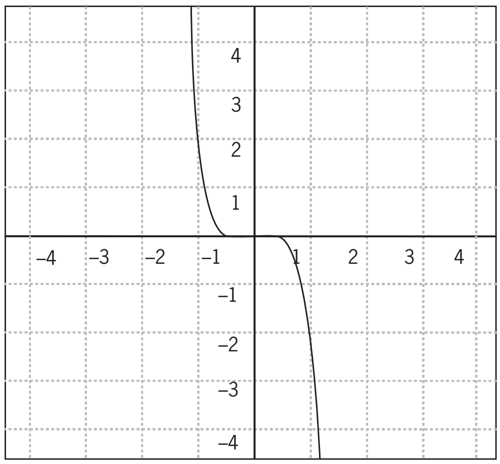
18. a)



$f(x) = 2x^4$



$g(x) = -2x^4$



$h(x) = -2x^5$

b) $f(x)$ presenta un mínim; $g(x)$ presenta un màxim i $h(x)$ presenta un punt d'inflexió.
c) En totes tres la segona derivada en $x = 0$ és 0.

19.

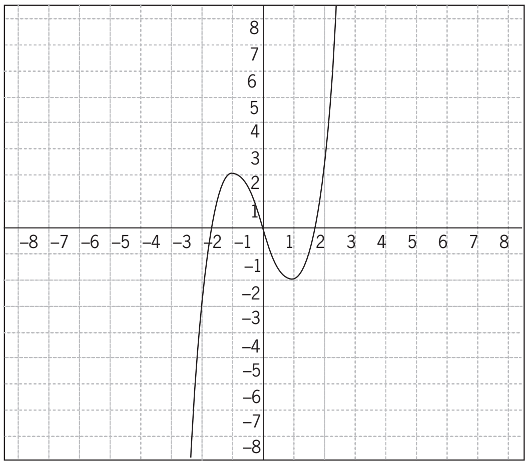
x	$(-\infty, -2)$	-2	$\left(-2, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	↗	Màxim	↘	Mínim	↗	Màxim	↘

20. $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
$D(g) = \mathbb{R} - \{5\}$
$D(h) = (1, +\infty)$

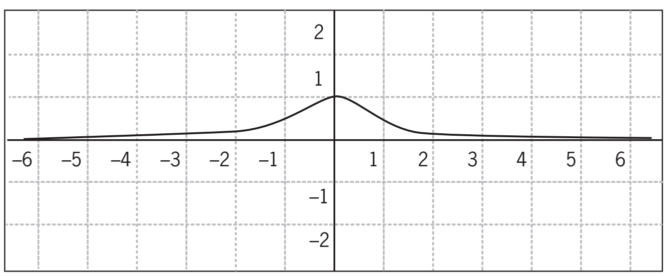
21. a) Punts de tall amb l'eix d'abscisses: (1, 0).
Punt de tall amb l'eix d'ordenades: (0, –1).
b) La gràfica no talla l'eix d'abscisses.
Punt de tall amb l'eix d'ordenades: (0, –1).
c) Punts de tall amb l'eix d'abscisses: (1, 0) i (4, 0).
Punt de tall amb l'eix d'ordenades: $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$.

22. a) $x = -1{,}25432$
b) $x = 0{,}782031$
c) $x = 1{,}31607$

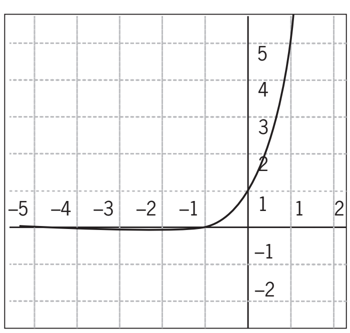
23. a)



b)



c)



24. a) Simetria respecte de l'eix d'ordenades.
b) Simetria respecte de l'origen de coordenades.
c) Simetria respecte de l'eix d'ordenades.
d) Simetria respecte de l'origen de coordenades.
e) No presenta cap d'aquests tipus de simetria.
f) No presenta cap d'aquests tipus de simetria.
g) Simetria respecte de l'eix d'ordenades.
h) No presenta cap d'aquests tipus de simetria.
i) Simetria respecte de l'eix d'ordenades.

25. a) Asímptotes horitzontals: $y = 0$.
Asímptotes verticals: $x = 1$ i $x = -1$.
b) No presenta asímptotes horitzontals.
Asímptotes verticals: $x = 5$.
c) Asímptotes horitzontals: $y = 0$.
No presenta asímptotes verticals.

26.

x	$f(x)$
100	100,01
1.000	1.000,001
10.000	10.000,0001
100.000	100.000,00001

x	y
100	100
1.000	1.000
10.000	10.000
100.000	100.000

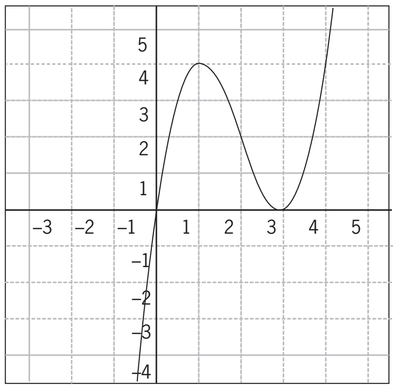
El límit és 0. Com que el límit és 0, la funció $f(x)$ s'apropa a la recta $y = x$ quan x tendeix a infinit.

27. a) $y = x$
b) $y = x$
c) No en té.
d) No en té.

28. a) Sí.
b) No.
c) Sí.

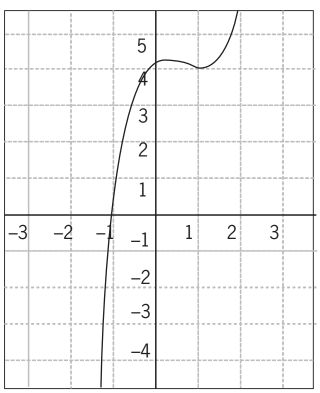
29. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. No té asímptotes.
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$. No té asímptotes.
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} l(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} l(x) = +\infty$. Asímptota vertical: $y = 1$. Asímptota obliqua: $y = \dfrac{2}{3}x$
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} o(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} o(x) = +\infty$. Asímptotes verticals: $y = 4$ i $y = 3$. Asímptota obliqua: $y = x + 6$.
e) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. No té asímptotes.
f) $\lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} j(x) = 2$. Asímptota horitzontal. $y = 2$.
g) $\lim\limits_{x \to -\infty} m(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} m(x) = +\infty$. Asímptota vertical: $y = 3$. Asímptota obliqua: $y = 2x + 1$.
h) $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$. Asímptota vertical: $y = 1$.
i) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Asímptota obliqua: $y = 2x + 1$.
j) $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -\infty$. No té asímptotes.
k) $\lim\limits_{x \to -\infty} n(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} n(x) = 0$. Asímptotes verticals: $y = 1$ i $y = -1$. Asímptota horitzontal: $y = 0$.
l) $\lim\limits_{x \to -\infty} q(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = 1$. Asímptota vertical: $x = 1$. Asímptota horitzontal: $y = 1$.

30. a)



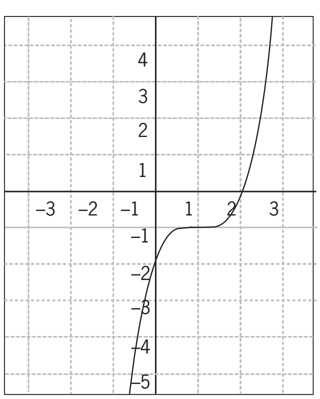
5
4
3
2
1
–3 –2 –1 1 2 3 4 5
–1
–2
–3
–4

b)



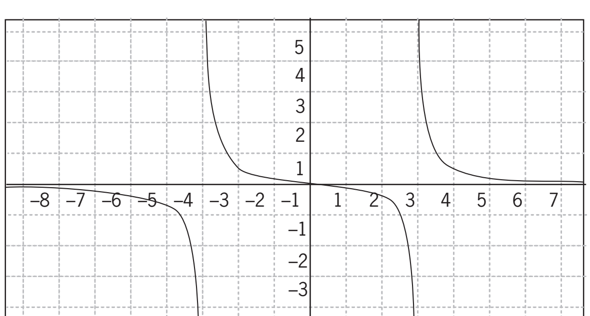
5
4
3
2
1
–3 –2 –1 1 2 3
–1
–2
–3
–4

c)



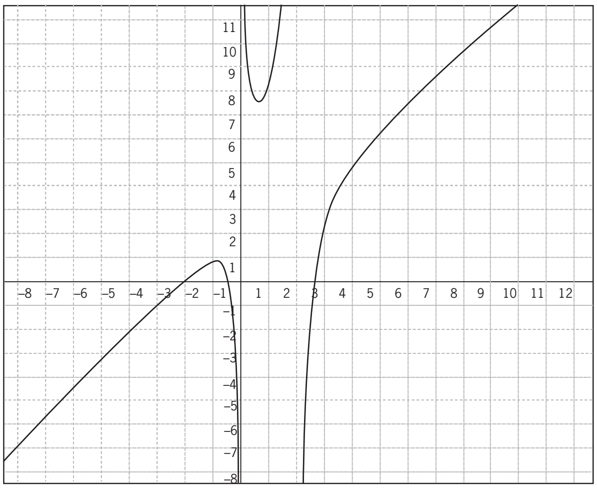
4
3
2
1
–3 –2 –1 1 2 3
–1
–2
–3
–4
–5

d)

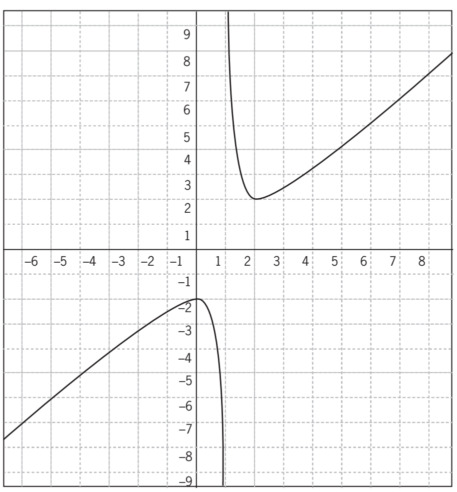


5
4
3
2
1
–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7
–1
–2
–3
–4

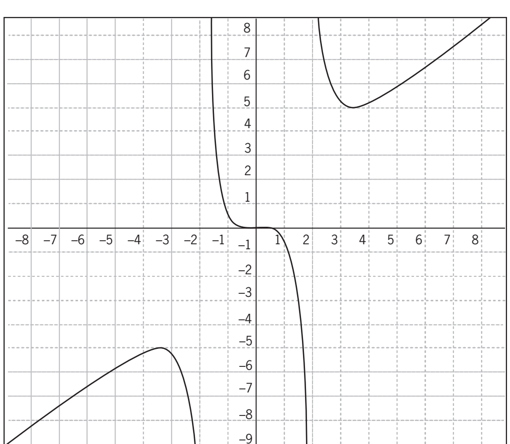
e)


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8

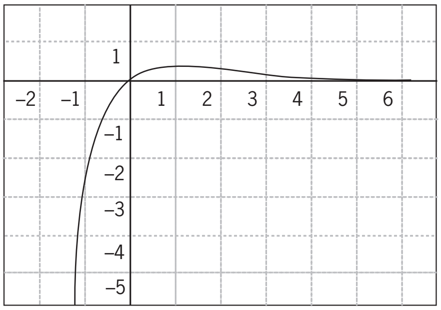
f)


9
8
7
6
5
4
3
2
1
–6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8
–9

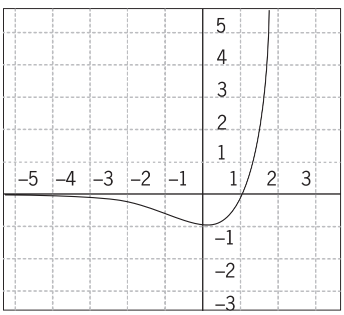
g)


8
7
6
5
4
3
2
1
–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8
–9

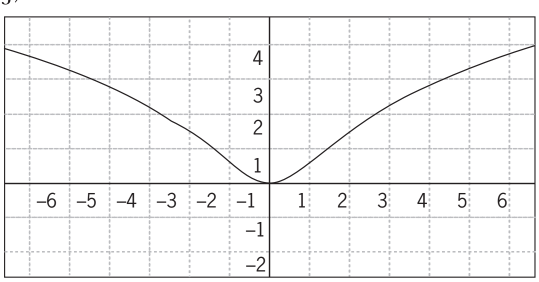
h)



i)

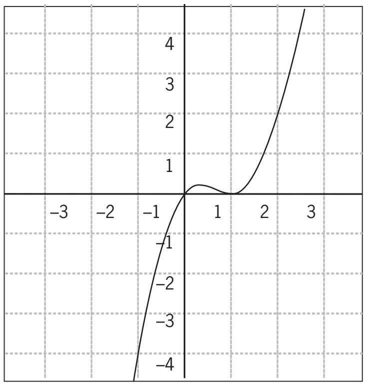


j)



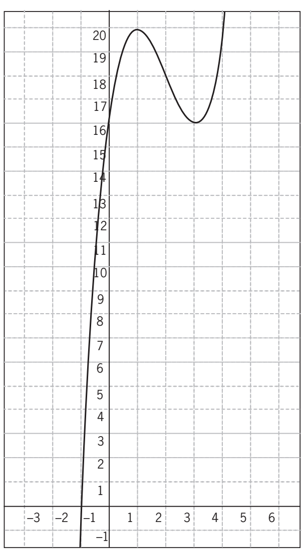
31. a) Punts de tall amb l'eix d'abscisses: (0, 0) i (1, 0).

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ Màxim	↘	$f(1) = 0$ Mínim	↗



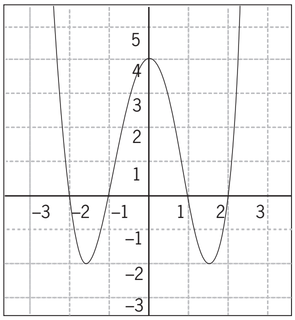
b) Punt de tall amb l'eix d'abscisses: (–1, 0).

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$f(1) = 20$ Màxim	↘	$f(3) = 16$ Mínim	↗



c) Punts de tall amb l'eix d'abscisses: (–2, 0), (–1, 0), (1, 0) i (2, 0).

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$	0	$\left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty\right)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	$f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{-9}{4}$ Mínim	↗	$f(0) = 4$ Màxim	↘	$f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{-9}{4}$	↗



32. a) Asímptotes verticals: $x = 1$ i $x = -1$. Asímptota horitzontal: $y = 0$.

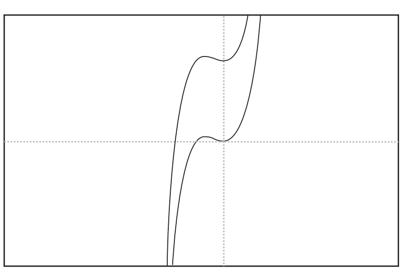
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	No existeix	+	0	–	No existeix	–
$f(x)$	↗	No existeix	↗	$f(0) = -1$ Màxim	↘	No existeix	↘

b) Asímptota vertical: $x = 0$. Asímptota obliqua: $y = x$.

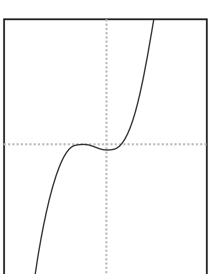
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	No existeix	+
$f(x)$	↗	No existeix	↗

33. a) El mínim s'assoleix a $x = 0$. El màxim, a $x = -\dfrac{2}{3}$. El valor en el mínim és $f(0) = b$ i en el màxim és $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = b + \dfrac{4}{27}$.

b)



c)



c) $b = -\dfrac{4}{27}$

d) Quan $b \in \left(-\infty, -\dfrac{4}{27}\right) \cup (0, +\infty)$.

Per practicar més

1. a) Decreixent.
b) Creixent.
c) Decreixent.

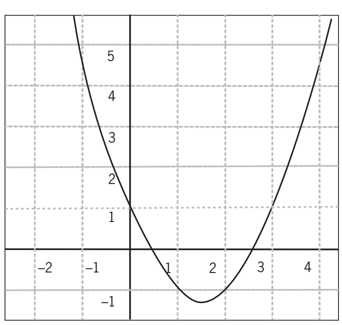
2. a) Creixent: $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$. Decreixent: $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$

En $x = \dfrac{3}{2}$ hi ha un mínim.

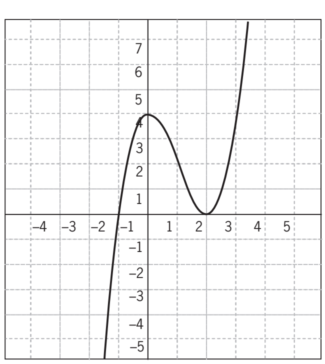
b) Creixent: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Decreixent: $(0, 2)$.
En $x = 0$ hi ha un màxim. En $x = 2$ hi ha un mínim.

c) Creixent: $(-1, 1) \cup (5, +\infty)$.
Decreixent: $(-\infty, -1) \cup (1, 5)$.
En $x = -1$ i $x = 5$ hi ha un màxim. En $x = 1$ hi ha un mínim.
Creixent: $(-\infty, 1)$. Decreixent: $(1, 2)$.
Creixent: $(2, +\infty)$.
Hi ha un màxim relatiu en $x = 1$ i un mínim relatiu en $x = 2$.

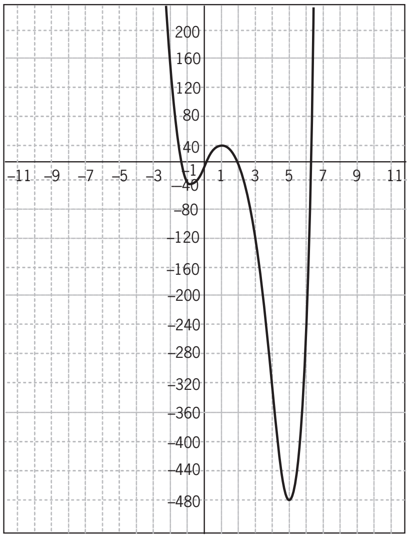
e)



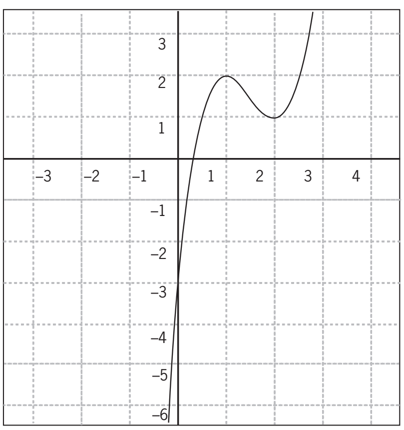
$f(x) = x^2 - 3x + 1$



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$



$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 8$



$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

3. a)

x	$(-\infty, -3{,}5)$	$-3{,}5$	$(-3{,}5, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$f(-3{,}5) = 0{,}6039476$ Màxim	↘	$f(1) = -13{,}591409$ Mínim	↗

b)

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$f(-2) = 4e^{2}$ Màxim	↘	$f(0) = 0$ Mínim	↗

c)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(0) = -1$ Màxim	↘

d)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	No existeix	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(0) = -1$ Màxim	↘	No existeix	↘	$f(2) = 5$ Mínim	↗

e)

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	No existeix	$-$
$f(x)$	↘	No existeix	↘

f)

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	No existeix	$+$	0	$-$	No existeix	$+$
$f(x)$	↘	$f(1) = 0$ Mínim	↗	$f(2) = 1$	↘	$f(3) = 0$ Mínim	↗

4. a) Convexa.
b) Còncava.
c) Còncava.
d) Còncava.
e) Convexa.

5. a)

x	$(-\infty, +\infty)$
$f''(x)$	$+$
$f(x)$	»

b)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	«	$f(0) = -3$ Punt d'inflexió	»

c)

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$	$-\sqrt{\frac{13}{6}}$	$\left(-\sqrt{\frac{13}{6}}, -\sqrt{\frac{13}{6}}\right)$	$-\sqrt{\frac{13}{6}}$	$\left(\sqrt{\frac{13}{6}}, +\infty\right)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	»	$f\left(-\sqrt{\frac{13}{6}}\right)=-\frac{115}{18}$ Punt d'inflexió	«	$f\left(\sqrt{\frac{13}{6}}\right)=-\frac{115}{18}$ Punt d'inflexió	»

d)

x	–p	(–p, 0)	0	(0, p)	p	(p, 2p)
$f'(x)$	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	f(–p) = –p Punt d'inflexió	»	$f(0) = 0$ Punt d'inflexió	»	f(p) = p Punt d'inflexió	»

e)

x	$(-\infty, -2-\sqrt{2})$	$-2-\sqrt{2}$	$(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$	$-2+\sqrt{2}$	$(-2-\sqrt{2}, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	»	$f(-2-\sqrt{2}) = 0{,}38569$ Punt d'inflexió	«	$f(-2+\sqrt{2}) = 0{,}191$ Punt d'inflexió	»

f)

x	$(0, e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2}, +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	«	$f(e^{3/2}) = 0{,}3347$ Punt d'inflexió	»

6. a) Màxim relatiu: (1, 4). Mínim relatiu: (5, –28).

b) Màxim relatiu: (1, 0). Mínim relatiu: $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{27}\right)$.

c) Màxim relatiu: no en té. Mínim relatiu: (0, 0).

d) Màxim relatiu: no en té.

Mínim relatiu: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0{,}84657\right)$.

e) Màxim relatiu: (2,03444; 2,2361). Mínim relatiu: (5,17603; –2,2361).

f) Màxim relatiu: (0, –1). Mínim relatiu: no en té.

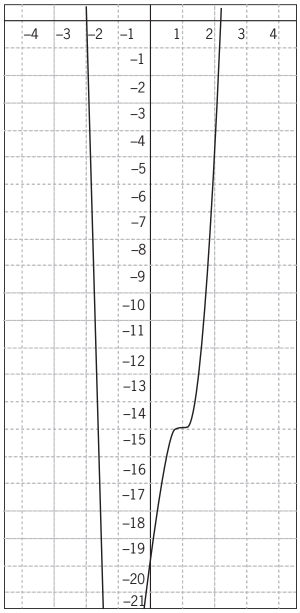
g) Màxim relatiu: (0, 0). Mínim relatiu: (2, 8).

7. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$

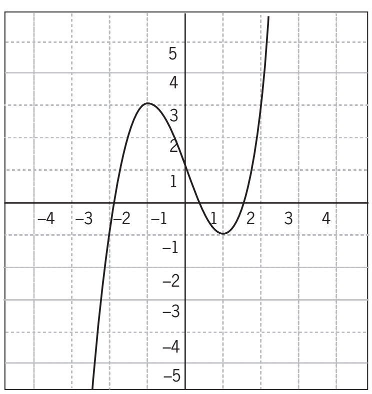
8. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 5$

9. $a = 2$. Sí en $x = 1$.

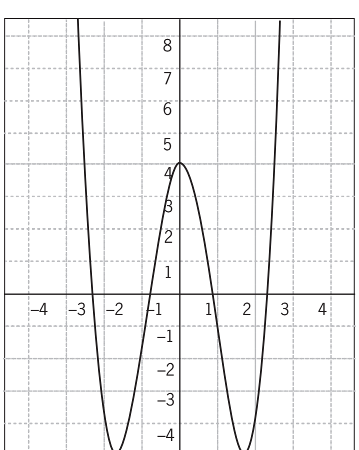
10. La part entera de les arrels: –1 i 2.



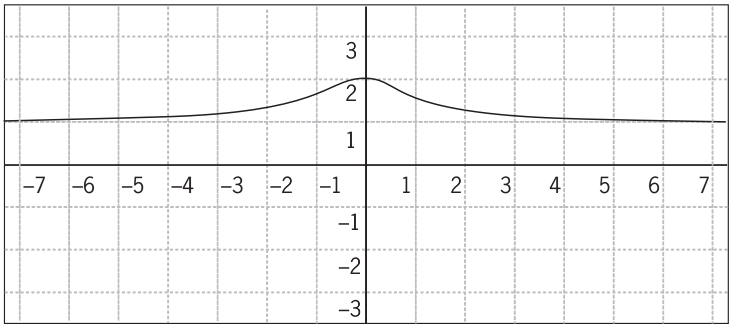
11. a)



b)

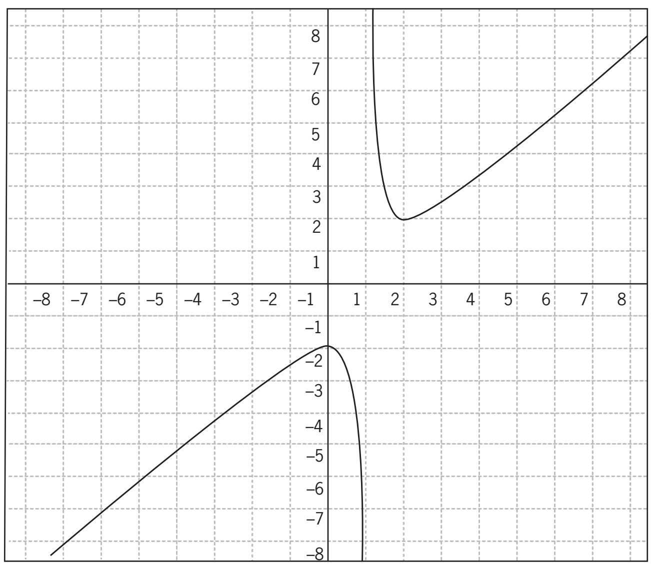


c)



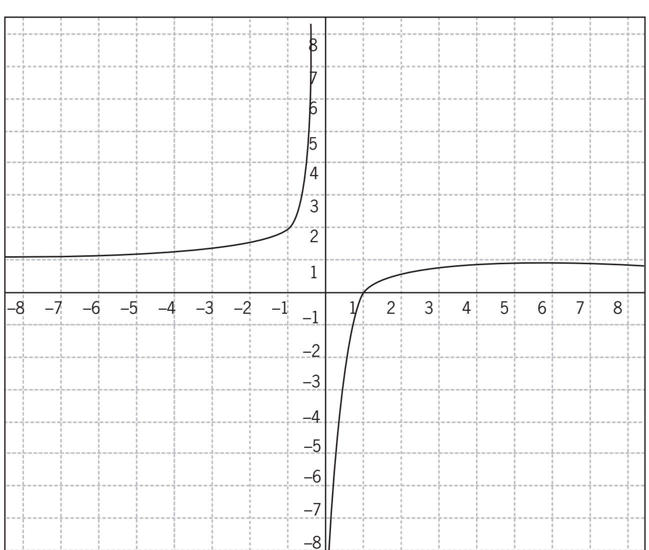
3
2
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7
−1
−2
−3

d)



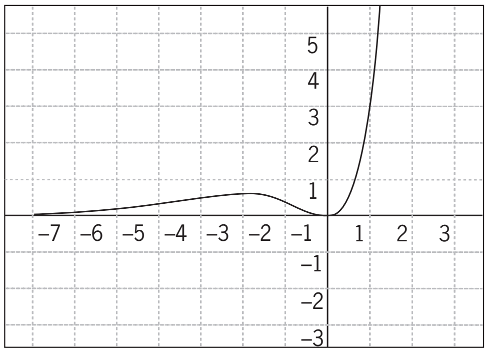
8
7
6
5
4
3
2
1
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8

e)



8
7
6
5
4
3
2
1
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8

f)

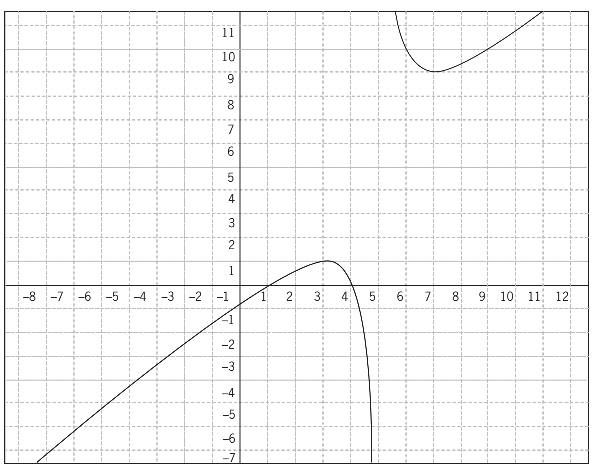


12. Si n parell: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

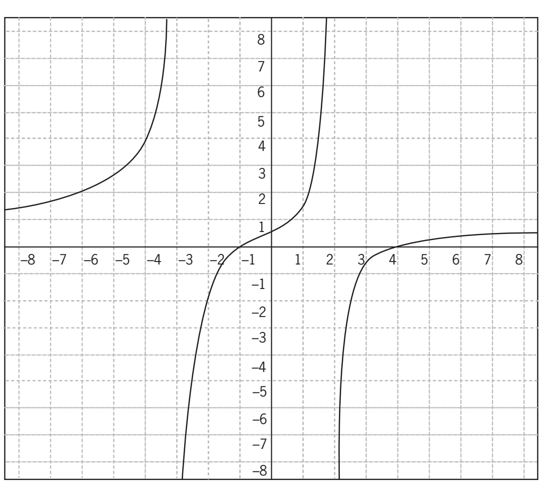
Si n imparell: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Perquè la gràfica d'una funció contínua que pren valors positius i negatius talla l'eix d'abscisses en algun punt.

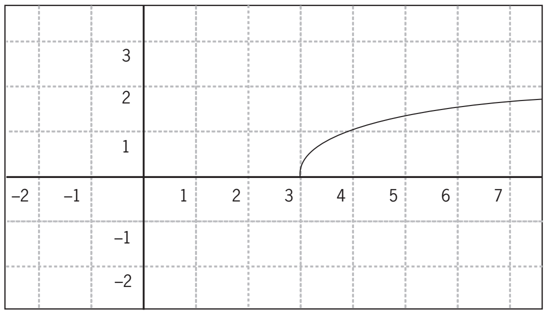
13. a)



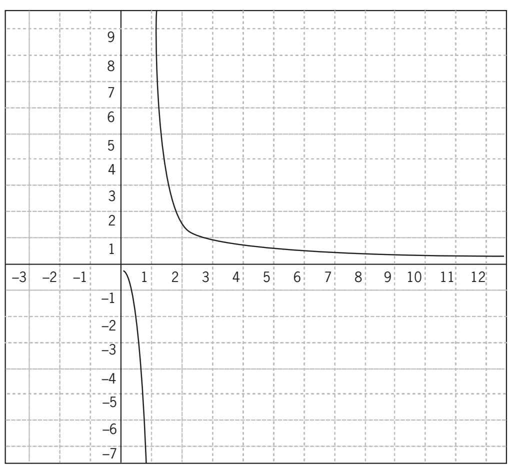
b)



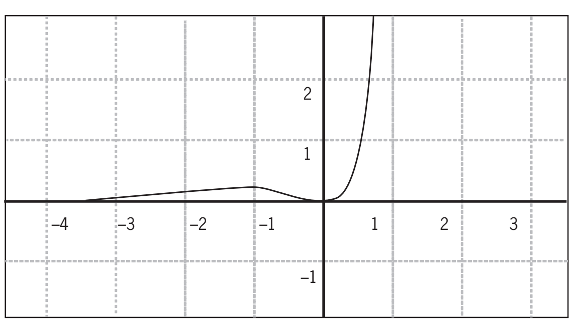
c)


3
2
1
–2 –1 1 2 3 4 5 6 7
–1
–2

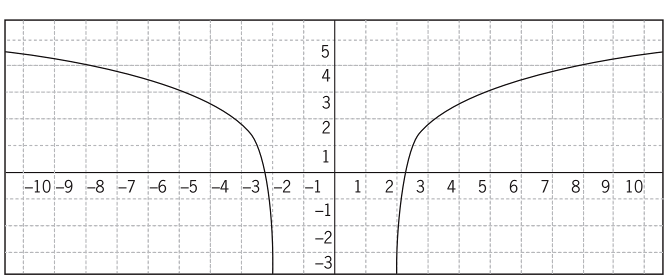
d)


9
8
7
6
5
4
3
2
1
–3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7

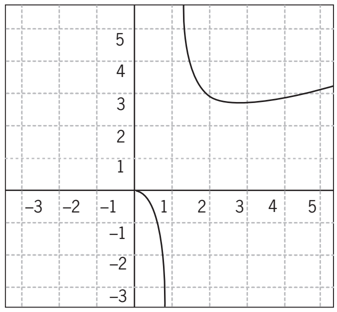
14. a)


2
1
–4 –3 –2 –1 1 2 3
–1

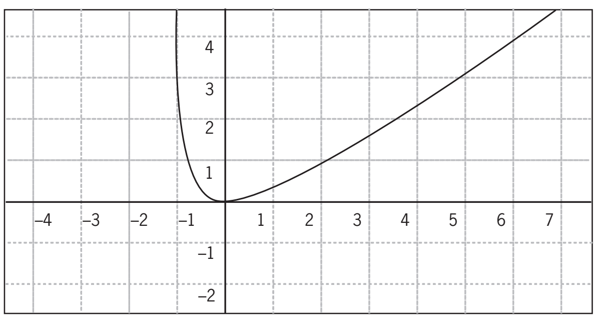
b)


5
4
3
2
1
–10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
–1
–2
–3

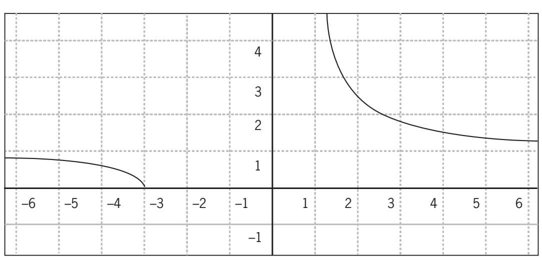
c)


5
4
3
2
1
–3 –2 –1 1 2 3 4 5
–1
–2
–3

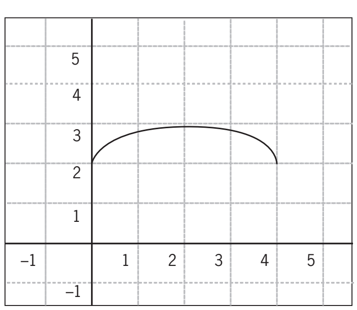
d)


4
3
2
1
–4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7
–1
–2

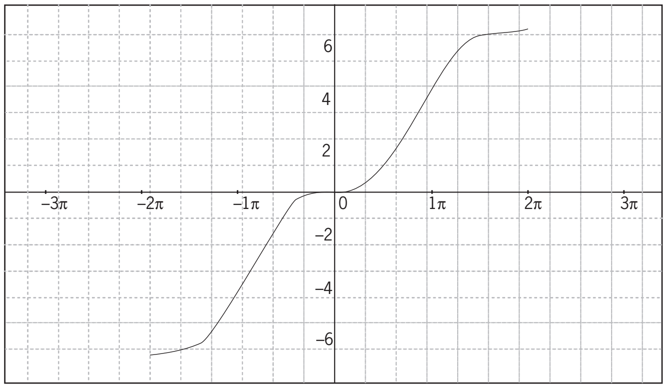
e)


4
3
2
1
–6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6
–1

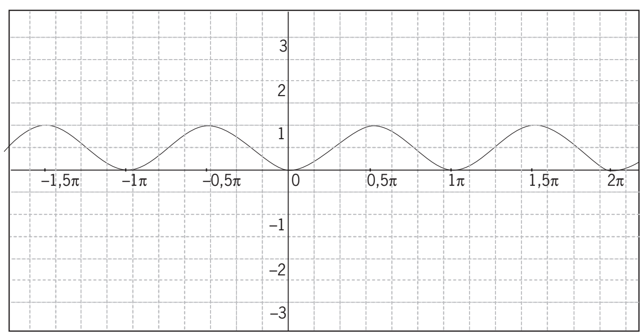
f)


5
4
3
2
1
–1 1 2 3 4 5
–1

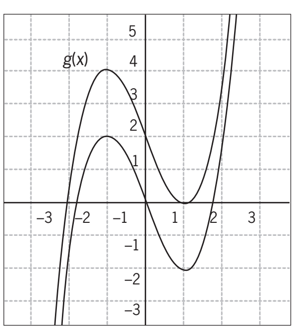
g)



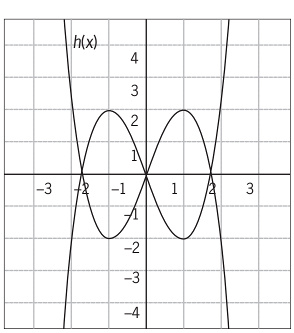
h)



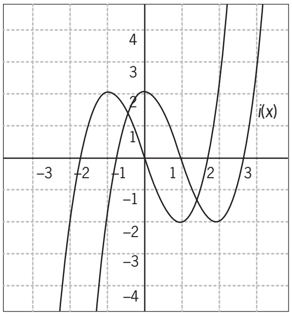
15. $g(x)$: translació vertical de 2 unitats cap amunt.



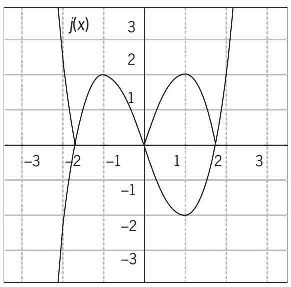
$h(x)$: simetria respecte de l'eix d'ordenades o reflexió.



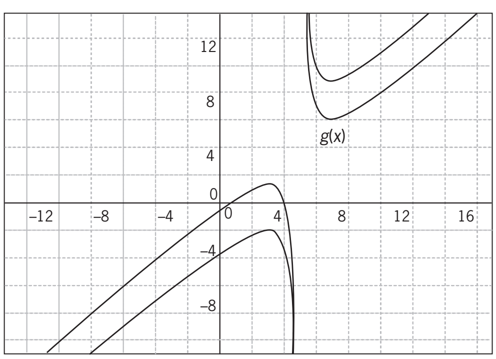
$i(x)$: translació horitzontal de 1 unitat cap a la dreta.



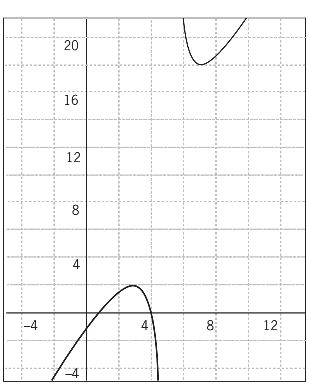
$j(x)$: reflexió només als intervals $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(0, \sqrt{3})$.



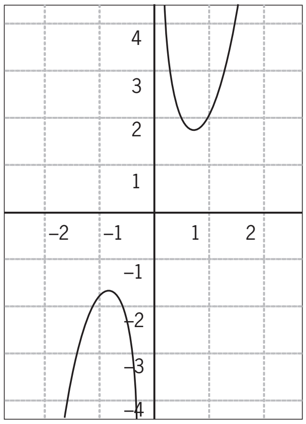
16. b)



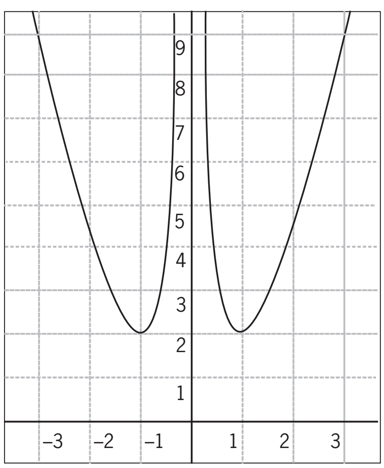
c)



17. a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$



b) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$



c) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$