Un satèl·lit paradoxal

Introducció

El moviment de satèl·lits en òrbita és una de les aplicacions que s'estudia a partir de la llei de la gravitació universal i que més atrau l'atenció a l'alumnat, segurament degut a l'actualitat de la temàtica i del seu caràcter innovador tot i que el primer satèl·lit artificial (Sputnik 1) es va llençar a l'espai el 4 d'octubre de 1957, ja fa més de 50 anys!

És fàcil arribar a calcular la velocitat que ha de mantenir un satèl·lit (massa m) en òrbita circular (radi r) al voltant de la Terra (massa M). Només cal igualar la força centrípeta amb la força gravitatòria:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M{\cdot}m}{r^2}$$

i aïllar la velocitat

$$v = \sqrt{\frac{G{\cdot}M}{r}} \qquad (1)$$

També és relativament senzill realitzar el càlcul de l'energia d'un satèl·lit en òrbita circular (de radi r), cal sumar l'energia cinètica i la potencial gravitatòria:

$$E = \frac{1}{2}m{\cdot}v^2 - G\frac{M{\cdot}m}{r}$$

i substituint la velocitat per l'expressió (1) obtenim:

$$E = -\frac{G{\cdot}M{\cdot}m}{2{\cdot}r}$$

Paradoxa

És possible que alguna vegada ens haguem fet la pregunta, o potser ens l'ha fet aquell alumne espavilat que sol fer preguntes "intel·ligents":

> *Si un satèl·lit que està en òrbita engega els coets propulsors tot sembla indicar que, en guanyar velocitat i per tant augmentar la seva energia, s'hauria d'allunyar de la Terra i per tant passar a òrbites de radis més grans... però, paradoxalment, comprovem que justament les òrbites més allunyades de la Terra són les que tenen velocitats més petites (segons la fórmula (1)).*

Així doncs tenim una paradoxa que cal solucionar!

Solució

La solució és molt senzilla i podem explicar-la a l'alumnat de batxillerat tot i que els detalls dels càlculs numèrics (no molt complicats) queden fora del seu currículum. Anem-ho a veure.

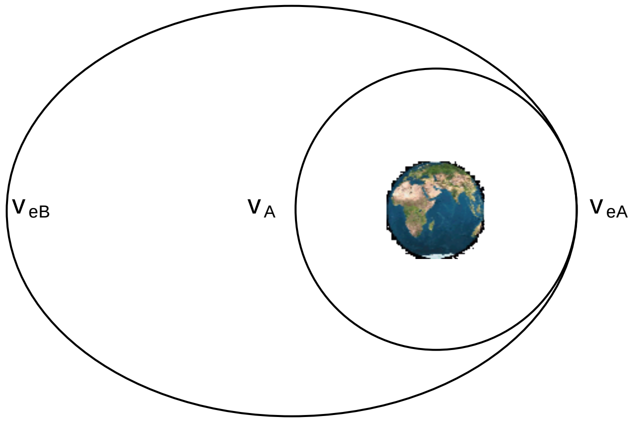

Figura 1

Les fórmules que acabem de calcular i que solem aplicar en tots els exercicis corresponen només a òrbites circulars malgrat que sabem que la primera llei de Kepler diu que, en general, les òrbites dels satèl·lits són el·líptiques. Així doncs la solució a la nostra paradoxa és senzillament que el satèl·lit que orbita amb velocitat v_A i que guanya velocitat (fins el valor $v_{eA} > v_A$) abandona l'òrbita circular per passar a orbitar en una el·lipsi al voltant de la Terra (Figura 1). Segons la segons llei de Kepler[1], la seva velocitat varia segons el punt de la trajectòria:

> *El radivector que uneix el planeta amb el Sol, escombra àrees iguals en temps iguals. Per tant, el planeta es desplaça més ràpidament quan està en el periheli (v_{eA}) que quan està en l'afeli (v_{eB}).*

De manera que, tal com observem en la Figura 2, $v_{eA} > v_{eB}$.

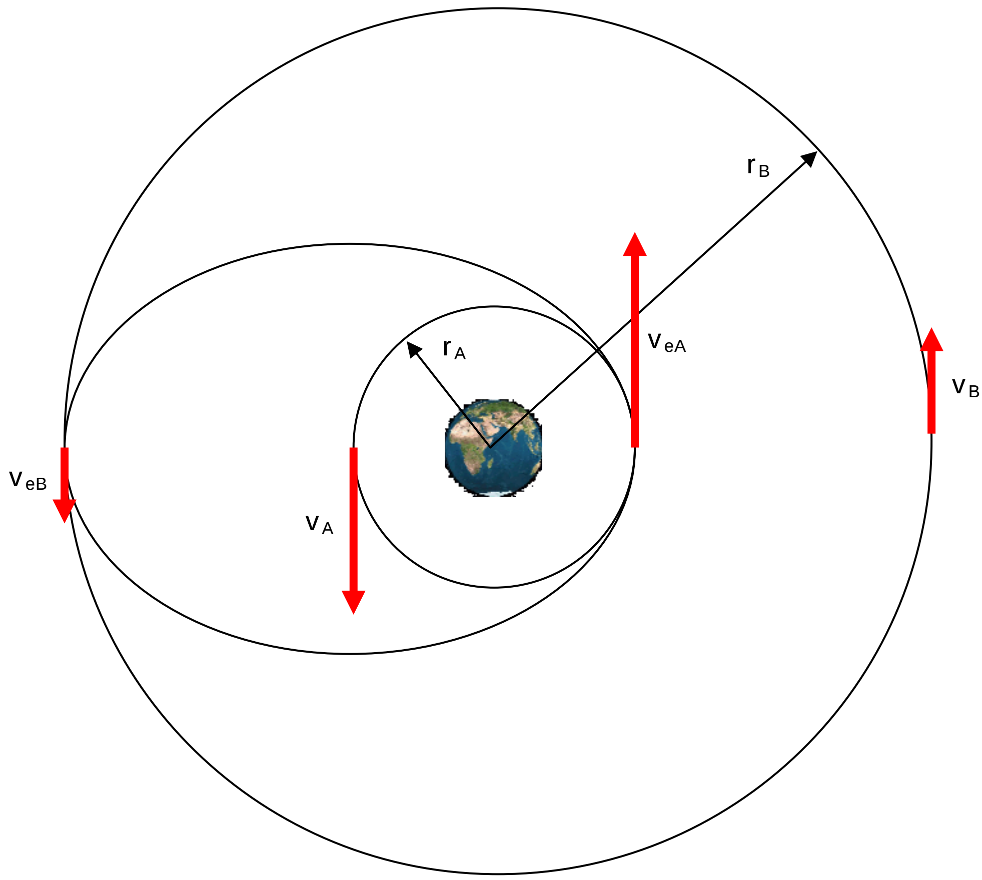

Figura 2

Així doncs perquè un satèl·lit situat en una òrbita circular (radi r_A) es pugui situar en una òrbita circular de radi més gran (r_B) cal que recorri una òrbita de transferència el·líptica amb velocitats màxima (v_{eA}) quan està a una distància r_A de la Terra i mínima (v_{eB}) quan està a una distància r_B.

El procés serà doncs el següent: el satèl·lit orbita circularment (radi r_A) amb una velocitat v_A i cal que acceleri fins a obtenir una velocitat superior v_{eA} que

[1] Wikipèdia: http://ca.wikipedia.org/wiki/Lleis_de_Kepler

correspon a la velocitat del periheli de l'òrbita el·líptica de transferència. Mentre recorre la trajectòria el·líptica va disminuint la velocitat fins arribar, just en l'afeli, al valor v_{eB}. Just en aquest moment ha de tornar a accelerar per augmentar la seva velocitat fins a la velocitat v_B que el situa en l'òrbita circular de radi r_B.

Així doncs la paradoxa és que el satèl·lit ha d'augmentar dues vegades la seva velocitat per acabar en una òrbita on la seva velocitat és inferior a la inicial. La segona llei de Kepler, és a dir, la variació de la velocitat al llarg de la trajectòria el·líptica, ens explica satisfactòriament la paradoxa.

Alguns càlculs

El càlcul de les velocitats en òrbites el·líptiques és relativament fàcil, tot i que no està inclòs en el currículum del batxillerat.

En el moviment d'un satèl·lit (òrbites circulars o el·líptiques) s'han de conservar l'energia i també el moment angular (segona llei de Kepler o llei de les àrees), de manera que podem escriure per dos punts 1 i 2 qualsevol d'una trajectòria:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{M\cdot m}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M\cdot m}{r_2} \tag{2}$$

Per facilitar la comprensió a l'alumnat en comptes de parlar de conservació de moment angular, podem igualar les dues àrees escombrades (triangles d'alçada r i de base v·dt, on dt és un diferencial de temps):

$$S = \frac{1}{2}v_1 r_1 dt = \frac{1}{2}v_2 r_2 dt \tag{3}$$

En la igualtat (3) aïllem la velocitat v_2

$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} \tag{4}$$

Multipliquem per 2 la igualtat (2) i després simplifiquem la massa m del satèl·lit

$$v_1^2 - \frac{2GM}{r_1} = v_2^2 - \frac{2GM}{r_2}$$

substituïm v_2 pel valor obtingut en l'expressió (3)

$$v_1^2 - \frac{2GM}{r_1} = \frac{v_1^2 r_1^2}{r_2^2} - \frac{2GM}{r_2}$$

D'on, amb alguns càlculs senzills, podem aïllar v_1 fins obtenir l'expressió

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_1 + r_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}}$$

I utilitzant de nou l'expressió també obtenim el valor de la velocitat v_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2}}$$

Podem comprovar que si l'òrbita és circular, és a dir, $r_1 = r_2$ aleshores obtenim en qualsevol de les dues fórmules la velocitat v

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r + r} \cdot \frac{r}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{2r}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Que coincideix amb l'expressió (1) que permet calcular la velocitat orbital circular.

També podem comprovar que si l'òrbita no és tancada (en el límit r_2 = infinit i $v_2 = 0$) obtenim l'expressió

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_1 + \infty} \cdot \frac{\infty}{r_1}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}}$$

Que correspon a la velocitat d'escapament d'una òrbita circular.

Ara estem en condicions de resoldre numèricament algun exercici i comprovar-ho amb alguna simulació.

Exercici

Enunciat

La NASA vol situar un satèl·lit del sistema GPS en la seva òrbita correcta però prèviament l'ha posat en l'òrbita de la ISS (Estació Espacial Internacional) per efectuar-hi alguns ajustaments en l'espai. Podeu calcular les velocitats orbitals així com les velocitats que cal comunicar al satèl·lit en els moments de les transferències entre òrbites?

Solució

Primer cal disposar de les dades de les òrbites que podem cercar a la Wikipèdia[2]:

- GPS: h = 20.200 km
- ISS: h = 400 km (entre 370 i 460 km)

Així doncs, amb el radi de la Terra de 6.400 km, els radis de les òrbites circulars seran:

- GPS: 26.600 km
- ISS: 6.800 km

Això ens permet calcular[3] les velocitats de les òrbites circulars de l'ISS i del sistema GPS, suposant la massa del planeta de $6 \cdot 10^{24}$ kg.

[2] Wikipèdia: http://ca.wikipedia.org/wiki/GPS i http://ca.wikipedia.org/wiki/ISS.

$$v_{ISS} = \sqrt{\frac{GM}{r_{ISS}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}8 \cdot 10^{6}}} = 7{,}67 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s}$$

$$v_{GPS} = \sqrt{\frac{GM}{r_{GPS}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{2{,}66 \cdot 10^{7}}} = 3{,}88 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s}$$

També podem obtenir les velocitats en el periheli i en l'afeli de l'òrbita el·líptica de transferència.

$$v_{ISS \to transferència} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}8 \cdot 10^{6} + 2{,}66 \cdot 10^{7}} \cdot \frac{2{,}66 \cdot 10^{7}}{6{,}8 \cdot 10^{6}}} = 9{,}69 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s}$$

$$v_{transferència \to GPS} = \sqrt{\frac{2GM}{r_1 + r_2} \cdot \frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}8 \cdot 10^{6} + 2{,}66 \cdot 10^{7}} \cdot \frac{6{,}8 \cdot 10^{6}}{2{,}66 \cdot 10^{7}}} = 2{,}48 \cdot 10^{3}\ \frac{m}{s}$$

Simulacions

Podem utilitzar un parell d'applets per simular els moviments del satèl·lit i alhora comprovar que les solucions són correctes.

A la web *Des simulations de sciences physiques pour vous cultiver ou pour illustrer vos cours* del professor G. Gastebois i dintre de l'apartat *Gravitation* podem trobar l'applet *Etude du mouvement (Satellites)*.

És recomanable visualitzar aquest applet amb una resolució alta de pantalla (1280x1024 o superior) , sense les barres d'eines auxiliars del navegador (Preferits, Històric...) i a pantalla completa (F11).

Per començar podem triar l'opció ***Satellite*** (així ens apareix la Terra) i assignar als paràmetres superiors els valors que corresponen a l'òrbita circular de la ISS:

- M (x M_{Terre}) = 1
- h_0 (km) = 400 (és l'alçada, no el radi de l'òrbita)
- v_{0x} (km/s) = 0
- v_{0y} (km/s) = 7,67
- v_{0z} (km/s) = 0

En iniciar la simulació (botó inferior ***Start***) efectivament comprovarem que l'òrbita és circular i molt propera al planeta (Figura 3). Podem realitzar altres observacions: valor d'excentricitat molt petita, velocitat pràcticament constant, la llei de les àrees de Kepler (botó inferior ***Aires***)...

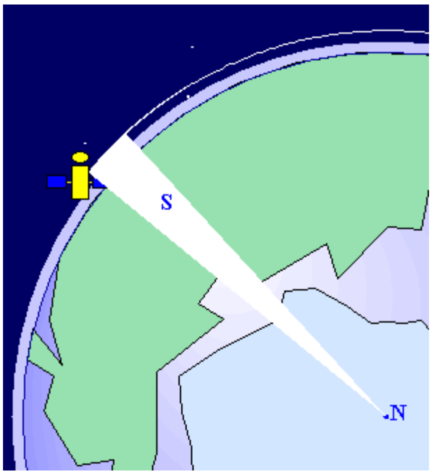

Figura 3

[3] En els càlculs utilitzem sempre el *Sistema Internacional d'Unitats*, de manera que les unitats dels resultats sempre seran les corresponents al *SI*.

Tot seguit podem simular l'òrbita del satèl·lits GPS amb els valors: 1 // 20200 // 0 // 3.88 // 0.

Podem observar també algunes característiques d'aquesta òrbita... potser la més interessant per a nosaltres torna a ser que l'òrbita és pràcticament circular.

I com a tercer pas reproduirem l'òrbita de transferència amb els valors dels paràmetres: 1 // 400 // 0 // 9.69 // 0.

És interessant observar que l'òrbita que descriu ara el satèl·lit és el·líptica (Figura 4) però sobretot que la velocitat màxima és 9,69 km/s (tal com li hem assignat nosaltres) i que la mínima en l'afeli és 2,48 km/s que coincideix plenament amb el valor calculat en l'anterior apartat. Per facilitar-ne l'observació podem utilitzar els botons inferiors ***Moins rapide*** i ***Plus rapide***. En la part superior esquerra el mateix applet subministra el valors numèrics de la velocitat màxima i mínima.

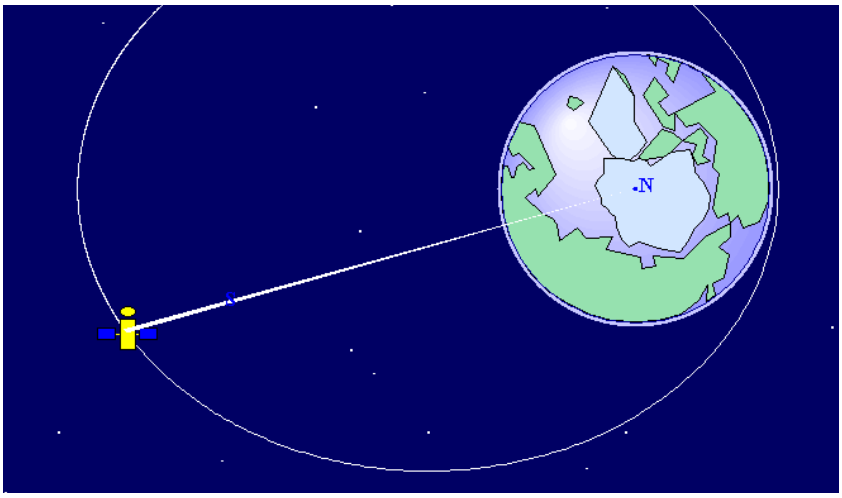

Figura 4

També pot ser pedagògic per l'alumnat observar la llei de les àrees i com varia la velocitat al llarg de la trajectòria.

A continuació podem utilitzar un segon applet per comprovar que els càlculs que hem realitzat per a efectuar correctament la transferència del satèl·lit són correctes. A la web de l'Ángel Franco García podem trobar *Física con ordenador - Curso Interactivo de Física en Internet* i al final de l'apartat *Dinàmica celeste // Fuerza central y conservativa // Órbita de transferencia* trobarem un applet que ens permet fer exercicis d'òrbites de transferència.

En el nostre cas assignarem els valors:

- Altura-A (km) = 400
- Altura-B (km) = 20200

I en prémer el botó ***Inicio*** observarem les òrbites de l'ISS i dels satèl·lits GPS.

En la Velocidad-A (m/s) obtindrem la velocitat inicial del satèl·lit però hi haurem de assignar el valor calculat (9690 m/s) i prémer el botó ***Lanzar*** per veure la trajectòria que seguirà el satèl·lit.

Quan el satèl·lit arriba a l'afeli l'applet ens confirma si efectivament ha aconseguit l'òrbita desitjada o no i, en cas afirmatiu, haurem d'escriure la Velocidad-B (m/s) adequada per poder situar el satèl·lit en l'òrbita dels GPS, el valor serà 3880 m/s, i prémer el botó ***Situar***.

En la Figura 5 podem observar la situació de l'applet després d'haver aconseguit la transferència amb èxit.

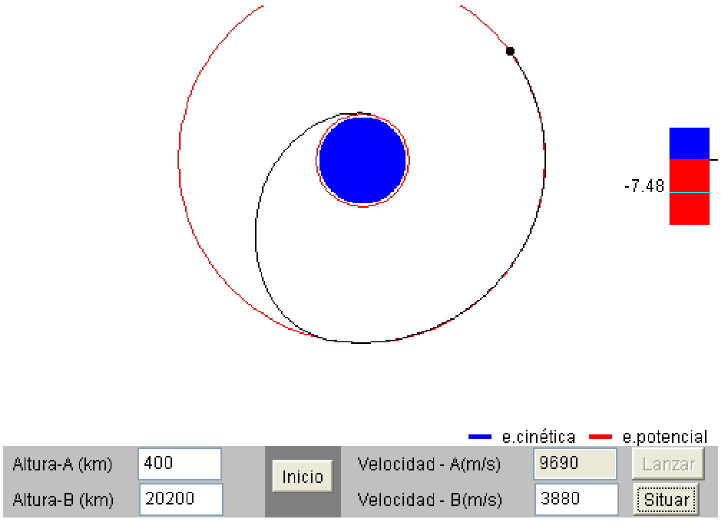

Figura 5

És interessant observar en aquest applet l'evolució de les energies (cinètica i potencial gravitatòria) del satèl·lit en les diferents fases del moviment.