

## Estimació de l'error comès en determinar el lloc des d'on s'ha pres una fotografia\*

RAMON GONZÁLEZ, JOSEP HOMS I JORDI SOLSONA

### 1 Introducció

En l'article [3], publicat en aquesta mateixa revista, es tracta l'anomenat «problema de la fotografia», que es pot enunciar de la manera següent: si en una fotografia d'una ciutat es pot identificar un mínim de cinc edificis, l'emplaçament dels quals es pot situar sobre un plànol de la ciutat, es demana situar, també sobre el plànol, l'emplaçament del punt des d'on s'ha fet la fotografia. Resumirem, en primer lloc, el procediment descrit en l'esmentat article per resoldre aquest problema.

Designem per  $A, B, C, D$  i  $E$  l'emplaçament sobre el plànol de la ciutat dels cinc edificis identificats. Tracem sobre la fotografia una recta horitzontal i designem per  $A', B', C', D'$  i  $E'$  les interseccions d'aquesta recta horitzontal amb les verticals sobre la fotografia que passen pels edificis corresponents a  $A, B, C, D$  i  $E$  (figura 1). Mesurant sobre la fotografia, calculem les dues raons dobles  $r = (A', B', C', D')$  i  $s = (A', B', C', E')$ . Si  $X$  és un punt qualsevol del plànol de la ciutat, designem per  $(XA, XB, XC, XD)$  la raó doble de les quatre rectes  $\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XD}$ . Sabem pel teorema de Chasles que el lloc geomètric dels punts  $X$  tals que  $(XA, XB, XC, XD) = r$  és una cònica que passa pels punts  $A, B, C$  i  $D$ . El punt de vista de la fotografia ve donat pel punt d'intersecció de les dues còniques:

$$\begin{cases} r = (XA, XB, XC, XD) \\ s = (XA, XB, XC, XE) \end{cases}$$

que no és ni  $A$  ni  $B$  ni  $C$ .

A continuació donarem un procediment de càlcul de la raó doble de les quatre rectes  $\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{XC}, \overline{XD}$ .

---

\* Aquest article ha estat elaborat a partir d'una proposta de treball de curs de Joan Girbau, professor de l'assignatura complements de geometria analítica del mestratge «matemàtiques per a ensenyants» de la Universitat Autònoma de Barcelona.

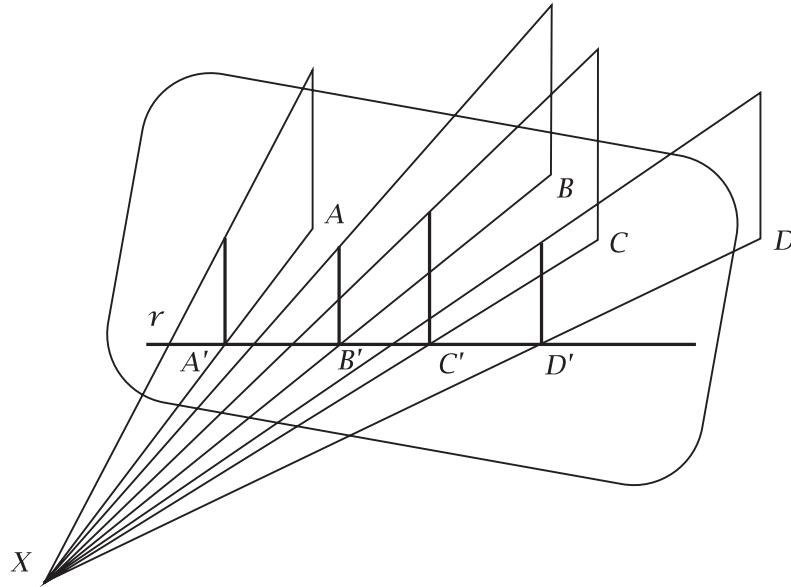


FIGURA 1

En virtut de la demostració del teorema 1 de [3]:

$$(XA, XB, XC, XD) = \frac{\sin \widehat{AXC} \sin \widehat{BXD}}{\sin \widehat{AXD} \sin \widehat{BXC}}. \quad (1)$$

Per tal d'obtenir una fórmula més agradable de càlcul d'aquesta raó doble, definim el producte exterior de dos vectors  $u, v$  en el pla de la següent forma (Grassmann, p. 99):

$$\wedge : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto u \wedge v = u_x v_y - u_y v_x = |u| |v| \sin(u, v).$$

En realitat  $u \wedge v$  no és altra cosa que el determinant dels components dels vectors  $u, v$  i a vegades es designa per  $\det(u, v)$ .

Si designem per  $XA$  el vector  $A - X$  d'origen  $X$  i extrem  $A$ , tenim:

$$XA \wedge XC = |XA| |XC| \sin \widehat{AXC}, \text{ etc.}$$

Si d'aquí s'aïlla  $\sin \widehat{AXC}$  i se substitueix en l'expressió (1), s'obté fàcilment:

$$(XA, XB, XC, XD) = \frac{(XA \wedge XC) (XB \wedge XD)}{(XA \wedge XD) (XB \wedge XC)}.$$

Per tant, les dues còniques, la intersecció de les quals ens dona el punt de vista de la fotografia, tenen per equacions:

$$r = \frac{(XA \wedge XC) (XB \wedge XD)}{(XA \wedge XD) (XB \wedge XC)}; \quad s = \frac{(XA \wedge XC) (XB \wedge XD)}{(XA \wedge XD) (XB \wedge XC)}.$$

Des d'ara endavant, per simplificar la notació, designarem per  $A, B, C, D$  i  $E$  tant els punts sobre el plànol on es troben els edificis que hem identificat, com els edificis corresponents a la fotografia.

En el càlcul intervé una quantitat relativament nombrosa de dades, un total de 10 coordenades en el plànol i 5 en la fotografia, i les proves prèvies han mostrat que aquest mètode acumula fàcilment errors. Així, hem pensat que calia analitzar els factors d'error i intentar quantificar-ne la magnitud amb l'objectiu de minimitzar-los.

## 2 Factors d'error

L'objectiu d'aquest treball és, no només determinar l'interval de confiança de les coordenades que es calculen, sinó també establir les condicions òptimes de càlcul amb les quals es minimitzen els errors.

Els factors que poden produir error són els següents:

- a) Suposar que la fotografia s'ha fet en un pla vertical, tot i que sigui lleugerament inclinat. Si la fotografia està feta en un pla vertical, les verticals es projecten sobre la fotografia com a rectes paral·leles, però si la fotografia està en un pla inclinat, les verticals es projecten sobre el pla de la fotografia com a rectes concurrents en un punt. Si l'angle entre la vertical i el pla de la fotografia és petit, el punt de concurrència està força lluny del centre de la fotografia i les projeccions poden considerar-se paral·leles (figura 1). En canvi, si la fotografia té molta inclinació (per exemple, la d'un campanar d'una església feta de prop), aleshores cal mesurar la raó doble del feix de projeccions de les verticals. En els dos exemples analitzats (amb una inclinació de  $-3^\circ$  i  $-2^\circ$  aproximadament), s'observen les cantonades dels diferents edificis com a paral·leles, fins a la precisió d'1 *pixel* sobre les imatges digitalitzades.
- b) Imprecisió en la determinació de la referència vertical o horitzontal. El fet que la base de la fotografia no sigui horitzontal (figura 1) no té importància si es té aquesta referència (per exemple, un edifici, una torre de comunicacions, l'horitzó marítim, etc.). En cas contrari, (per exemple, la fotografia d'un paisatge), pot introduir-se error perquè s'està calculant la raó doble a partir de la fotografia en un pla diferent de l'horitzontal. En aquest cas s'hauria d'utilitzar un nivell associat amb l'aparell fotogràfic. En la mesura manual de la raó doble en la fotografia, el millor és calcar les posicions dels objectes ben identificats sobre un full de paper mil·limetrat vegetal, que permet alinear bé les ratlles verticals amb edificis alts o altres referències. Si la fotografia ha estat digitalitzada amb un escàner, emprant un programa adequat, es pot fer girar fins a situar la imatge perfectament horitzontal, sempre que es tingui una referència.
- c) Distorsió deguda a l'òptica fotogràfica. La imatge fotogràfica normalment es forma en un pla i és aproximadament una projecció plana de l'espai. La distorsió és la diferència que hi ha entre la imatge fotogràfica real i la projecció plana que cabria esperar (Sirohi-Kothiyal, p. 86). Que la imatge es formi amb la mínima distorsió és el principi que guia la construcció de les càmeres fotogràfiques més emprades. Alguns objectius especials com l'«ull de peix» tenen una gran distorsió que impossibilita un càlcul fiable. Els objectius normals com els de 50 mm de distància focal no presenten pràcticament distorsió. El centre de la perspectiva d'un negatiu de  $24 \times 36$  mm obtingut amb aquests objectius se situa a 50 mm. En una ampliació de  $9 \times 13$  cm el centre de la perspectiva està situat a uns 18 cm (Malacara, p. 80), des d'on hem de mirar la fotografia per

tenir una visió similar a la real, amb els mateixos angles de visió.

- d) Errors de mesura en les distàncies sobre la fotografia. Un bon sistema per disminuir-los és digitalitzar la fotografia i determinar les coordenades en la pantalla de l'ordinador. En aquest cas, cal girar la imatge fins que estigui completament horitzontal. Els errors en la mesura manual poden ser importants si es té en compte que hi ha diverses mesures i que no són gaire precises (error habitual d'1 mm sobre 10 cm).
- e) Error de mesura i/o d'ubicació dels punts sobre el plànol. L'error pròpiament de mesura de les coordenades pot minimitzar-se prenent una ampliació del plànol. Ara bé, en alguns casos és complicat determinar la situació exacta sobre el plànol de les construccions o objectes que observem. Per exemple, observem una torre, però el centre de la torre està situat una mica dins la façana. A més, els plànols no sempre són una representació prou bona de la realitat. Una petita variació de la localització d'un punt en el plànol respecte la realitat pot produir errors importants en el càlcul. Si es disposa d'un programa que contingui el mapa (com el *VisualMap* que conté el plànol de Barcelona), les coordenades poden mesurar-se amb molta precisió.
- f) Un mapa, com a representació plana d'una superfície esfèrica, no pot conservar alhora angles i distàncies (Strahler, p. 24-25). Com més petita és l'àrea representada en el mapa, més petit és l'error que genera suposar que el mapa és una representació exacta de la realitat i que els edificis estan situats sobre un pla i no sobre una superfície esfèrica.

A continuació estudiarem la propagació dels errors de mesura, els més importants amb diferència, en el càlcul de la posició del punt  $X$  des d'on s'ha fet la fotografia.

### 3 Tècnica diferencial

Per avaluar com influeixen els errors inicials en el càlcul de la posició del punt del pla des d'on s'ha fet la fotografia, utilitzarem la tècnica  $\delta$ , o diferencial. Per a cada variable  $X$  que mesurem tenim el seu error  $dX$ , que és una variable aleatòria centrada en el zero. Com a mesura de l'interval d'error es pren l'arrel quadrada de la variància:

$$X = E(X) + dX$$

$$E(dX) = E(X - E(X)) = 0$$

$$\text{Var}(dX) = \text{Var}(X - E(X)) = \text{Var}(X) = E(dX^2).$$

La tècnica diferencial és aplicable quan els errors relatius de qualsevol variable aleatòria  $X$  són prou petits com per utilitzar el desenvolupament en sèrie de Taylor només amb la primera derivada. En aquest cas, l'error de tota funció de  $X$  és proporcional a la seva derivada avaluada per al valor que pren  $X$ , considerat constant (Dunn, apèndix 3, p. 171-174). Si la funció depèn de diverses variables tenim:

$$df[X_i] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$$

$$\text{Var}(f[X_i]) = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \text{Var}(X_i) + \sum_{i \neq k} \sum \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial X_k} \right) \text{Cov}(X_i, X_k),$$

on les derivades parcials estan avaluades en els valors de  $X_i$  mesurats. Si totes les variables  $X_i$  són independents, llavors totes les covariàncies són nulles:

$$\text{Var}(f[X_i]) = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \text{Var}(X_i).$$

#### 4 Anàlisi d'errors en la fotografia

En primer lloc, analitzem l'error que es comet en el càlcul de la raó doble a partir de la fotografia. La raó doble de les projeccions verticals  $A, B, C$  i  $D$  dels elements identificats en la fotografia és:

$$r = (ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Diferenciant trobem:

$$\frac{dr}{r} = \frac{dAC}{AC} + \frac{dBD}{BD} - \frac{dBC}{BC} - \frac{dAD}{AD}.$$

Tenint en compte que  $AC = C - A$ , etc., es troba:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= dA \left( -\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right) + dB \left( -\frac{1}{BD} + \frac{1}{BC} \right) + dC \left( \frac{1}{AC} - \frac{1}{BC} \right) + dD \left( \frac{1}{BD} - \frac{1}{AD} \right) \\ &= dA \frac{CD}{AC \cdot AD} - dB \frac{CD}{BC \cdot BD} + dC \frac{AB}{AC \cdot BC} - dD \frac{AB}{AD \cdot BD}. \end{aligned}$$

Les quatre diferencials són estadísticament independents si mesurem  $A, B, C, D$  des d'un origen arbitrari  $O$ . En aquest cas:

$$\frac{\text{Var}(r)}{r^2} = \text{Var}(A) \frac{CD^2}{AC^2 AD^2} + \text{Var}(B) \frac{CD^2}{BC^2 BD^2} + \text{Var}(C) \frac{AB^2}{AC^2 BC^2} + \text{Var}(D) \frac{AB^2}{AD^2 BD^2}.$$

Si la raó doble no és gaire petita, el seu error pot ser minimitzat fent que les distàncies  $AB$  i  $CD$  siguin petites i les altres,  $AC, BC, AD$  i  $BD$ , grans. Quan els punts  $A, B, C, D$  estan ordenats d'esquerra a dreta, això significa prendre en la fotografia els punts distribuïts de la següent manera:

$$A \quad B \qquad \qquad \qquad C \quad D$$

En el cas extrem,  $AB$  i  $CD$  valen zero i la raó doble val 1. Això vol dir que  $A$  i  $B$  i el punt d'observació estan alineats en el plànol, així com també  $C$  i  $D$  i el punt d'observació. En aquest cas, la localització sobre el plànol és immediata. Es traça la recta que passa per  $A$  i  $B$ , i la que passa per  $C$  i  $D$ . El punt d'intersecció de les dues rectes en el plànol és el punt des d'on s'ha fet la fotografia. Aquest cas, però, no és habitual perquè és difícil reconèixer llocs que en la fotografia tinguin la mateixa vertical.

En el cas general, la intuïció indica que convé que els punts  $A, B, C, D$  estiguin prou separats perquè l'error relatiu en la mesura de les distàncies sigui prou petit. Però no és evident que convé que uns punts estiguin més junts que uns altres.

Anàlogament, per a la raó doble dels punts  $A, B, C$  i  $E$  s'obté:

$$s = (ABCE) = \frac{AC \ BE}{BC \ AE}$$

$$\frac{\text{Var}(s)}{s^2} = \text{Var}(A) \frac{CE^2}{AC^2 AE^2} + \text{Var}(B) \frac{CE^2}{BC^2 BE^2} + \text{Var}(C) \frac{AB^2}{AC^2 BC^2} + \text{Var}(E) \frac{AB^2}{AE^2 BE^2},$$

d'on se segueix que una disposició anàloga per als quatre punts  $A, B, C$  i  $E$  minimitza l'error:

$$A \quad B \quad \quad \quad C \quad E$$

Les variables  $r$  i  $s$  no són independents, perquè tenen una covariància no nul·la:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r, s) &= E(rs) - E(r)E(s) = E([E(r) + dr][E(s) + ds]) - E(r)E(s) \\ &= E(r)E(ds) + E(s)E(dr) + E(dr \ ds) = E(dr \ ds). \end{aligned}$$

Considerant que  $A, B, C, D, E$  són variables independents, tenim:

$$E(dA \ dB) = E(dA)E(dB) = 0$$

$$E(dA \ dC) = 0, \text{ etc.}$$

$$\frac{\text{Cov}(r, s)}{rs} = \text{Var}(A) \frac{CD \ CE}{AC^2 AD \ AE} + \text{Var}(B) \frac{CD \ CE}{BC^2 BD \ BE} + \text{Var}(C) \frac{AB^2}{AC^2 BC^2}.$$

Si  $r$  i  $s$  són no nul·les, la covariància és nul·la quan  $AB$  i  $CD$  o  $CE$  valen zero:

$$\begin{array}{ccc} A & B & D & C & E \\ A & B & E & C & D \end{array}$$

Si, a més, volem que les variàncies de  $r$  i  $s$  siguin petites o nul·les, haurem de prendre la configuració:

$$A \quad B \quad \quad \quad C \quad D \quad E$$

Podria semblar que no resulta convenient prendre els punts  $D$  i  $E$  junts, però cal recordar que això només cal fer-ho a la fotografia, perquè en el plànol, òbviament, es prendran punts diferents. És a dir, es tracta de prendre punts alineats respecte de la visual.

## 5 Anàlisi d'errors en el plànol

Per fer el càlcul d'errors en el mapa, es prenen logaritmes de  $r$  i  $s$  i es diferencien:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} &= dXA \wedge \left( \frac{XC}{XA \wedge XC} - \frac{XD}{XA \wedge XD} \right) + dXB \wedge \left( \frac{XD}{XB \wedge XD} - \frac{XC}{XB \wedge XC} \right) + \\ &+ dXC \wedge \left( -\frac{XA}{XA \wedge XC} + \frac{XB}{XB \wedge XC} \right) + dXD \wedge \left( -\frac{XB}{XB \wedge XD} + \frac{XA}{XA \wedge XD} \right). \end{aligned}$$

Separant les diferencials de les coordenades dels punts i tenint en compte en el coeficient de  $dX$  que  $XC - XA = AC$ , etc., s'obté:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} = & dX \wedge \left( -\frac{AC}{XA \wedge XC} + \frac{AD}{XA \wedge XD} - \frac{BD}{XB \wedge XD} + \frac{BC}{XB \wedge XC} \right) + \\ & + dA \wedge \left( \frac{XC}{XA \wedge XC} - \frac{XD}{XA \wedge XD} \right) + dB \wedge \left( \frac{XD}{XB \wedge XD} - \frac{XC}{XB \wedge XC} \right) + \\ & + dC \wedge \left( -\frac{XA}{XA \wedge XC} + \frac{XB}{XB \wedge XC} \right) + dD \wedge \left( -\frac{XB}{XB \wedge XD} + \frac{XA}{XA \wedge XD} \right). \end{aligned}$$

Anàlogament, la diferencial de la raó doble dels punts  $A, B, C$  i  $E$  és:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{s} = & dX \wedge \left( -\frac{AC}{XA \wedge XC} + \frac{AE}{XA \wedge XE} - \frac{BE}{XB \wedge XE} + \frac{BC}{XB \wedge XC} \right) + \\ & + dA \wedge \left( \frac{XC}{XA \wedge XC} - \frac{XE}{XA \wedge XE} \right) + dB \wedge \left( \frac{XE}{XB \wedge XE} - \frac{XC}{XB \wedge XC} \right) + \\ & + dC \wedge \left( -\frac{XA}{XA \wedge XC} + \frac{XB}{XB \wedge XC} \right) + dE \wedge \left( -\frac{XB}{XB \wedge XE} + \frac{XA}{XA \wedge XE} \right). \end{aligned}$$

Per interpretar més precisament els factors de les diferencials, hom modifica el coeficient de  $dX$ , emprant el fet que el producte exterior de dos vectors de la mateixa direcció és zero:

$$\begin{aligned} XA \wedge XC &= XA \wedge (XA + AC) = XA \wedge AC \\ XA \wedge XD &= XA \wedge (XA + AD) = XA \wedge AD \\ XB \wedge XC &= XB \wedge (XB + BC) = XB \wedge BC \\ XB \wedge XD &= XB \wedge (XB + BD) = XB \wedge BD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} = & dX \wedge \left( -\frac{AC}{XA \wedge AC} + \frac{AD}{XA \wedge AD} - \frac{BD}{XB \wedge BD} + \frac{BC}{XB \wedge BC} \right) + \\ & + dA \wedge \left( \frac{XC}{XA \wedge XC} - \frac{XD}{XA \wedge XD} \right) + dB \wedge \left( \frac{XD}{XB \wedge XD} - \frac{XC}{XB \wedge XC} \right) + \\ & + dC \wedge \left( -\frac{XA}{XA \wedge XC} + \frac{XB}{XB \wedge XC} \right) + dD \wedge \left( -\frac{XB}{XB \wedge XD} + \frac{XA}{XA \wedge XD} \right). \end{aligned}$$

En l'expressió anterior s'observa que l'error depèn principalment de les direccions. Prenent els vectors unitaris i els sinus dels angles corresponents tenim:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{r} = & dX \wedge \left( \frac{1}{|XA|} \left( \frac{u_{AC}}{\sin \widehat{XAC}} - \frac{u_{AD}}{\sin \widehat{XAD}} \right) + \frac{1}{|XB|} \left( \frac{u_{BD}}{\sin \widehat{XBD}} - \frac{u_{BC}}{\sin \widehat{XBC}} \right) \right) + \\ & + \frac{dA}{|XA|} \wedge \left( \frac{u_{XC}}{\sin \widehat{AXC}} - \frac{u_{XD}}{\sin \widehat{AXD}} \right) + \frac{dB}{|XB|} \wedge \left( \frac{u_{XD}}{\sin \widehat{BXD}} - \frac{u_{XC}}{\sin \widehat{BXC}} \right) + \\ & + \frac{dC}{|XC|} \wedge \left( -\frac{u_{XA}}{\sin \widehat{AXC}} + \frac{u_{XB}}{\sin \widehat{BXC}} \right) + \frac{dD}{|XD|} \wedge \left( -\frac{u_{XB}}{\sin \widehat{BXD}} + \frac{u_{XA}}{\sin \widehat{AXD}} \right). \end{aligned}$$

L'error de  $X$  depèn de l'error de  $r$  (calculat a partir de la fotografia) i dels errors en la posició de  $A, B, C, D$  en el plànol. Cadascun d'aquests errors estan multiplicats per un vector coeficient que depèn de la disposició dels punts sobre el plànol. L'error de  $X$  serà petit quan els vectors coeficients de  $dA, dB, dC$  i  $dD$  siguin petits. Fixem els mòduls dels vectors  $XA, XB, XC$  i  $XD$  i estudiem la influència dels angles sobre

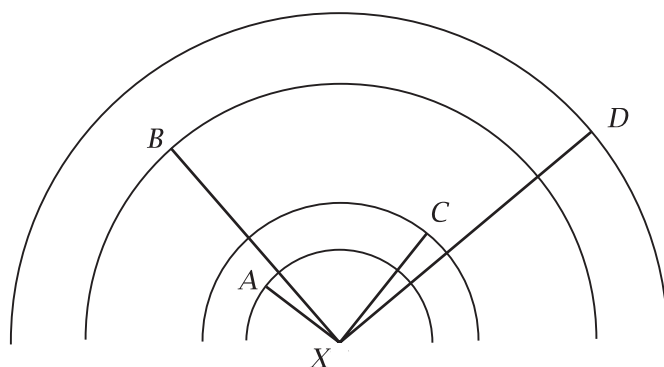


FIGURA 2

l'error de  $X$ . Aquest error és mínim quan els angles  $AXC$ ,  $BXC$ ,  $AXD$  i  $BXD$  són tots iguals. Això significa que els punts  $A$ ,  $B$  i  $X$  han d'estar alineats en el plànol, així com també els punts  $C$ ,  $D$  i  $X$ . La disposició ideal d'aquests quatre punts per minimitzar l'error és la mostrada en la figura 2.

Reordenant les equacions anteriors i escrivint-les en forma condensada tenim:

$$\frac{dr}{r} - dA \wedge v_A - dB \wedge v_B - dC \wedge v_C - dD \wedge v_D = dX \wedge v_X$$

$$\frac{ds}{s} - dA \wedge w_A - dB \wedge w_B - dC \wedge w_C - dE \wedge w_E = dX \wedge w_X,$$

on  $v_A, v_B, \dots, w_A, w_B, \dots$  són els vectors pels quals estan multiplicades  $dA, dB, \dots$  en la primera i segona igualtats, respectivament.

El concepte de variància d'una variable aleatòria bidimensional ve representat per una matriu. En efecte, suposem que  $X = (x, y)$  és una variable en la qual els seus components poden estar parcialment correlacionats. En aquest cas, a més de les variàncies de  $x$  i de  $y$  tenim la covariància:

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - E(x)^2 \quad \text{Var}(y) = E(y^2) - E(y)^2$$

$$\text{Cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y).$$

Considerem ara qualsevol variable  $z$  combinació lineal de  $x$  i de  $y$ :

$$z = \alpha x + \beta y.$$

La variància de  $z$  es calcula fàcilment:

$$\text{Var}(z) = E([\alpha x + \beta y]^2) - E(\alpha x + \beta y)^2 = \alpha^2 \text{Var}(x) + \beta^2 \text{Var}(y) + 2\alpha\beta \text{Cov}(xy).$$

Escrit en forma matricial (Dunn, apèndix 2, p. 165-169):

$$\text{Var}(z) = (\alpha\beta) \begin{pmatrix} \text{Var}(x) & \text{Cov}(x, y) \\ \text{Cov}(x, y) & \text{Var}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Aquesta igualtat mostra que la variància és una aplicació bilineal simètrica que quan s'aplica doblement a una variable aleatòria  $z$ , entesa com un vector de components  $(\alpha, \beta)$  en la base  $\{x, y\}$ , dona la variància. Quan s'aplica a dos vectors



diferents, dóna la covariància de les dues variables representades per aquests vectors. En efecte, considerem una altra variable  $t$ , combinació lineal de  $x$  i  $y$ , i calculem la covariància amb  $z$ :

$$t = \gamma x + \delta y$$

$$\text{Cov}(z, t) = E([\alpha x + \beta y][\gamma x + \delta y]) - E(\alpha x + \beta y)E(\gamma x + \delta y) =$$

$$\alpha\gamma \text{Var}(x) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \text{Cov}(x, y) + \beta\delta \text{Var}(y)$$

$$\text{Cov}(z, t) = (\alpha\beta) \begin{pmatrix} \text{Var}(x) & \text{Cov}(x, y) \\ \text{Cov}(x, y) & \text{Var}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}.$$

La variància del producte exterior d'una variable aleatòria  $X = (x, y)$  multiplicada per un vector constant  $v_x = (\alpha, \beta)$  és:

$$\text{Var}(X \wedge v_x) = \text{Var}(\beta x - \alpha y) = \beta^2 \text{Var}(x) + \alpha^2 \text{Var}(y) - 2\alpha\beta \text{Cov}(x, y).$$

Escrit en forma matricial:

$$\text{Var}(X \wedge v_x) = (\alpha\beta) \begin{pmatrix} \text{Var}(y) & -\text{Cov}(x, y) \\ -\text{Cov}(x, y) & \text{Var}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = v_x^t \text{Var}^{\text{adj}} v_x.$$

És a dir, la variància del producte exterior s'obté aplicant el vector  $v_x$  a la matriu adjunta de la variància. Utilitzant aquesta igualtat es determina la matriu de variància de  $X$ . Tenint en compte que les raons dobles calculades a partir de la fotografia són variables independents de les coordenades mesurades del pla, s'obté:

$$\frac{\text{Var}(r)}{r^2} + v_A^t \text{Var}^{\text{adj}}(A)v_A + v_B^t \text{Var}^{\text{adj}}(B)v_B + v_C^t \text{Var}^{\text{adj}}(C)v_C +$$

$$v_D^t \text{Var}^{\text{adj}}(D)v_D = v_X^t \text{Var}^{\text{adj}}(X)v_X$$

$$\frac{\text{Var}(s)}{s^2} + w_A^t \text{Var}^{\text{adj}}(A)w_A + w_B^t \text{Var}^{\text{adj}}(B)w_B +$$

$$w_C^t \text{Var}^{\text{adj}}(C)w_C + w_E^t \text{Var}^{\text{adj}}(E)w_E = w_X^t \text{Var}^{\text{adj}}(X)w_X$$

$$\frac{\text{Cov}(r, s)}{rs} + v_A^t \text{Var}^{\text{adj}}(A)w_A + v_B^t \text{Var}^{\text{adj}}(B)w_B +$$

$$v_C^t \text{Var}^{\text{adj}}(C)w_C = v_X^t \text{Var}^{\text{adj}}(X)w_X.$$

Considerem el cas particular en què les variàncies de les coordenades d' $A, B, C, D$  i  $E$  són totes iguals, i les coordenades horitzontals són independents de les verticals, és a dir, las covariàncies són nul·les. Això correspon a considerar el mateix error en qualsevol direcció i, per tant, a suposar que la posició real d'un punt està dins un cercle a l'entorn de la posició mesurada d'aquest punt. Sigui  $\text{Var}(P)$  l'escalar de la variància de tots aquests punts. Aleshores, les equacions esdevenen:

$$\frac{\text{Var}(r)}{r^2} + \text{Var}(P)[v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 + v_D^2] = v_X^t \text{Var}^{\text{adj}}(X)v_X$$

$$\frac{\text{Var}(s)}{s^2} + \text{Var}(P)[w_A^2 + w_B^2 + w_C^2 + w_E^2] = w_X^t \text{Var}^{\text{adj}}(X)w_X$$

$$\frac{\text{Cov}(r, s)}{rs} + \text{Var}(P)[v_A^t \times w_A + v_B^t w_B + v_C^t w_C] = v_X^t \text{Var}^{\text{adj}}(X)w_X.$$

Si denotem per  $h, j, k$  cada terme de l'esquerra de cada igualtat, tenim:

$$\begin{aligned} h &= v_x^t \text{Var}^{\text{adj}}(X) v_x \\ j &= w_x^t \text{Var}^{\text{adj}}(X) w_x \\ k &= v_x^t \text{Var}^{\text{adj}}(X) w_x. \end{aligned}$$

Escrivint en components  $v_x = (\alpha, \beta)$  i  $w_x = (\gamma, \delta)$ , en construïm la matriu que anomenarem  $M$ :

$$M = (v_x \ w_x) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Llavors les tres igualtats anteriors són una sola igualtat matricial:

$$\begin{pmatrix} h & k \\ k & j \end{pmatrix} = M^t \text{Var}^{\text{adj}}(X) M.$$

Aïllant la matriu de variància s'obté:

$$M^{-1,t} \begin{pmatrix} h & k \\ k & j \end{pmatrix} M^{-1} = \text{Var}^{\text{adj}}(X).$$

I d'aquí, prenent les adjuntes:

$$\frac{M}{\det M} \begin{pmatrix} j & -k \\ -k & h \end{pmatrix} \frac{M^t}{\det M} = \text{Var}(X).$$

Explícitament:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= \frac{hy^2 + j\alpha^2 - 2k\alpha\gamma}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \\ \text{Var}(y) &= \frac{h\delta^2 + j\beta^2 - 2k\beta\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \\ \text{Cov}(x, y) &= \frac{h\gamma\delta + j\alpha\beta - k(\alpha\delta + \beta\gamma)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}. \end{aligned}$$

Les variàncies poden arribar a ser molt grans quan el denominador és petit:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = v_x \wedge w_x = v_x \wedge (w_x - v_x) = 0.$$

Recordem què valen aquests vectors:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{|XA|} \left( \frac{u_{AC}}{\sin \widehat{XAC}} - \frac{u_{AD}}{\sin \widehat{XAD}} \right) + \frac{1}{|XB|} \left( \frac{u_{BD}}{\sin \widehat{XBD}} - \frac{u_{BC}}{\sin \widehat{XBC}} \right) \\ w_x &= \frac{1}{|XA|} \left( \frac{u_{AC}}{\sin \widehat{XAC}} - \frac{u_{AE}}{\sin \widehat{XAE}} \right) + \frac{1}{|XB|} \left( \frac{u_{BE}}{\sin \widehat{XBE}} - \frac{u_{BC}}{\sin \widehat{XBC}} \right) \\ w_x - v_x &= \frac{1}{|XA|} \left( \frac{u_{AD}}{\sin \widehat{XAD}} - \frac{u_{AE}}{\sin \widehat{XAE}} \right) + \frac{1}{|XB|} \left( \frac{u_{BE}}{\sin \widehat{XBE}} - \frac{u_{BD}}{\sin \widehat{XBD}} \right). \end{aligned}$$

Quan algun d'aquests vectors és nul, el producte exterior del denominador val zero.  $v_x$  s'anulla quan l'angle  $XAC$  coincideix amb  $XAD$  i l'angle  $XBC$  coincideix amb  $XBD$ . Això té lloc quan els punts  $A, B, C, D$  estan alineats o quan els punts  $C$

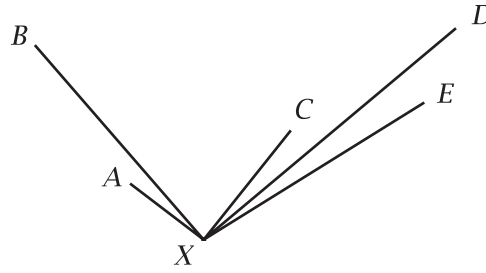


FIGURA 3

i  $D$  coincideixen.  $w_X$  s'anulla quan l'angle  $XAC$  coincideix amb  $XAE$  i l'angle  $XBE$  coincideix amb  $XBC$ . Això passa quan els punts  $A, B, C$  i  $E$  estan alineats, o bé quan  $C$  i  $E$  coincideixen. Per últim,  $w_X - v_X$  s'anulla quan l'angle  $XAD$  coincideix amb el  $XAE$  i l'angle  $XBE$  coincideix amb el  $XBD$ . Això succeeix quan els punts  $A, B, D, E$  estan alineats, o bé quan coincideixen  $D$  i  $E$ . Si  $D$  i  $E$  estan junts, les dues còniques es col·lapsen en una cònica i el sistema esdevé indeterminat.

Tampoc els punts  $A$  i  $B$  poden estar junts, ja que en aquest cas els termes del primer parèntesi es cancel·len amb els del segon parèntesi i tots tres vectors s'anul·len. A la mateixa conclusió s'arriba analitzant els angles en expressions anàlogues d'aquests vectors en funció dels mòduls de  $XC$  i  $XD$ :

$$v_X = \frac{1}{|XC|} \left( -\frac{u_{AC}}{\sin XCA} + \frac{u_{BC}}{\sin XCB} \right) + \frac{1}{|XD|} \left( \frac{u_{AD}}{\sin XDA} - \frac{u_{BD}}{\sin XDB} \right).$$

Resumint, perquè les variàncies no siguin grans, cal evitar que la direcció  $AB$  sigui la mateixa que la direcció d'alguna parella dels punts  $C, D, E$ . L'alineació d'aquests tres punts no implica cap augment de l'error. D'altra banda, també és convenient que  $A$  i  $B$  no estiguin junts, així com tampoc  $C, D$  i  $E$  pròxims dos a dos (figura 3). La pitjor configuració, que cal evitar, és que els cinc punts estiguin alineats sobre el plànol. En un estudi previ d'una fotografia panoràmica de l'Aneto i la seva serralada (Enríquez, fotografia número 71, p. 72-73), que sabíem que estava feta des del port de la Picada, vam observar un gran error en la localització d'aquest punt. *A posteriori* hem vist que els cinc pics de la serralada que havíem agafat com a referència estaven alineats.

L'error en la localització del punt  $X$  no és pas el mateix en totes les direccions. Siguin  $x', y'$  les coordenades d'un sistema d'eixos girat un angle  $\theta$  respecte del sistema  $x, y$ :

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

L'error en la direcció de  $x'$  i de  $y'$  depèn de l'angle  $\theta$ , i ve donat per l'arrel quadrada de la seva variància:

$$\text{Var}(x') = \cos^2 \theta \text{Var}(x) + 2 \sin \theta \cos \theta \text{Cov}(x, y) + \sin^2 \theta \text{Var}(y)$$

$$\text{Var}(y') = \sin^2 \theta \text{Var}(x) - 2 \sin \theta \cos \theta \text{Cov}(x, y) + \cos^2 \theta \text{Var}(y).$$

Per trobar el valor mínim de la variància, es deriva respecte de l'angle i s'igualava la derivada a zero:

$$\frac{d \operatorname{Var}(x')}{d\theta} = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \operatorname{Cov}(x, y)}{\operatorname{Var}(x) - \operatorname{Var}(y)},$$

d'on surten dos angles:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \operatorname{Cov}(x, y)}{\operatorname{Var}(x) - \operatorname{Var}(y)}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \operatorname{Cov}(x, y)}{\operatorname{Var}(x) - \operatorname{Var}(y)} + 90^\circ.$$

Aquests dos angles determinen la direcció d'error mínim i la d'error màxim (les direccions principals d'error), que són perpendiculars. Les coordenades preses en aquestes direccions les indicarem amb  $x_e, y_e$  i són variables estadísticament independents, si suposem que els errors tenen una distribució normal:

$$x_e = x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1; \quad y_e = -x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1 = x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2;$$

$$\operatorname{Cov}(x_e, y_e) = (\cos \theta_1 \sin \theta_1) \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(x) & \operatorname{Cov}(x, y) \\ \operatorname{Cov}(x, y) & \operatorname{Var}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Referida a les coordenades principals d'error, la matriu de variància és diagonal. Un parell d'eixos de coordenades qualsevol  $x', y'$  formaran un angle  $\varphi$  amb els eixos principals  $x_e, y_e$ :

$$\varphi = \theta - \theta_1; \quad x' = x_e \cos \varphi + y_e \sin \varphi; \quad y' = -x_e \sin \varphi + y_e \cos \varphi;$$

$$\operatorname{Var}(x') = (\cos \varphi \sin \varphi) \begin{pmatrix} \operatorname{Var}(x_e) & 0 \\ 0 & \operatorname{Var}(y_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \cos^2 \varphi \operatorname{Var}(x_e) + \sin^2 \varphi \operatorname{Var}(y_e).$$

La representació gràfica de la variància, o la desviació típica, és una corba en forma de glòbul roig vist de cantó amb dos eixos determinats per les direccions d'error. Quan la proporció  $\operatorname{Var}(x_e) / \operatorname{Var}(y_e)$  és 1, aquesta figura és una circumferència; quan la proporció de variàncies és gran (o petita), aquesta figura es converteix en dues quasicircumferències preses lateralment. De fet, l'invers de la variància és una el·lipse amb semieixos iguals als inversos de les variàncies de les direccions principals d'error. En conclusió, no totes les direccions són equivalents i s'observa que, habitualment, hi ha molt més error en una direcció que en la perpendicular. Es pot prendre com a mesura global d'error la traça de la matriu de variància que no depèn de la base en què s'expressi l'aplicació bilineal:

$$\operatorname{Var}(x') + \operatorname{Var}(y') = \operatorname{Var}(x) + \operatorname{Var}(y) =$$

$$= \frac{h(y^2 + \delta^2) + h(\alpha^2 + \beta^2) - 2k(\alpha\gamma + \beta\delta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = \frac{hw_X^2 + jv_X^2 - 2kv_X \cdot w_X}{(v_X \wedge w_X)^2}.$$



FOTOGRAFIA 1

## 6 Exemple primer

Fotografia sobre el port de Barcelona feta des del mirador de l'Alcalde (fotografia 1). Els punts de referència no són els òptims per minimitzar els errors, ja que estan repartits uniformement sobre la panoràmica, en comptes de concentrar-se al voltant de dos punts.

- A: el monument a Colom.
- B: el final de la part coberta de l'estació de França.
- C: la cantonada de ponent de l'hotel Arts de la Vila Olímpica.
- D: la torre de Jaume I de l'aeri sobre el port.
- E: la torre de Sant Sebastià, també de l'aeri sobre el port.

La imatge ha estat digitalitzada a partir de la fotografia sobre paper amb un escàner de mà i tractada amb el programa *FinishingTouch*. Emprant l'horitzó del mar s'ha ajustat l'ortogonalitat de les projeccions: ha calgut girar la fotografia  $1^\circ$ . Ampliant la imatge es poden trobar les posicions horitzontals dels cinc punts amb molta precisió. Els valors obtinguts per aquesta fotografia, en les unitats del *FinishingTouch*, són:

$$A = 66, B = 216, C = 401, D = 757 \text{ i } E = 1044.$$

S'han situat aquests punts sobre un plànol informàtic de Barcelona, el *VisualMap* (figura 4), i s'han obtingut les següents coordenades:

$$A = (-2691, 1631), B = (-1514, 1605), C = (-754, 1834),$$

$$D = (-2844, 2058) \text{ i } E = (-2305, 2431).$$

Cada unitat del *VisualMap* correspon a un metre de la realitat. Els punts A, B, D i E queden clarament definits en el *VisualMap*. La posició del punt C, la cantonada

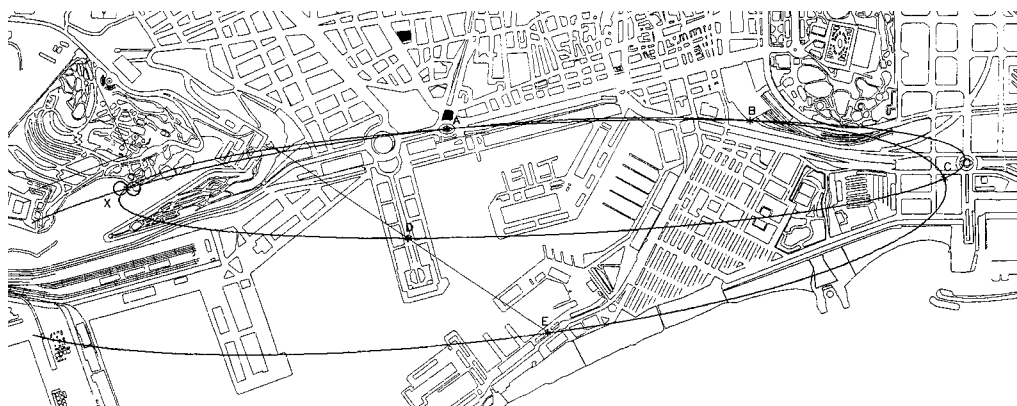


FIGURA 4

de ponent de l'hotel Arts, no estava tan clara i s'ha acabat de precisar *in situ*. Per a la primera coordenada, hem comptat cent quaranta passos des del carrer Francesc Aranda fins el passeig de Carles I, i la cantonada de l'edifici estava en el pas número 49. Per precisar la segona coordenada hem comptat divuit passos de vorera.

En el *VisualMap* l'origen de coordenades està en el centre de la plaça de les Glòries, el sentit negatiu per a l'eix  $x$  és anant a la plaça d'Espanya i el sentit positiu per a l'eix  $y$  és anant cap al mar. Per treballar amb l'orientació habitual dels eixos hem canviat el signe de la segona coordenada en tots els punts i, llavors, les coordenades dels punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$  amb què fem els càlculs són totes negatives.

La raó doble  $r$  dels punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , calculada a partir de la fotografia val 1,41773. Utilitzant el programa *Mathematica*, amb les instruccions que s'adjunten (annex 1), s'ha obtingut l'equació de la cònica que passa per aquests punts amb aquesta raó doble:

$$46670,5x^2 + 2,41136 \cdot 10^6 y^2 - 197063xy - 1,44143 \cdot 10^8 x + 8,36409 \cdot 10^9 y + 7,3663 \cdot 10^{12} = 0.$$

De la mateixa manera, amb la raó doble  $s$  dels punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $E$ , que val 1,53308, s'ha obtingut l'equació de la cònica que passa per aquests punts:

$$113182x^2 + 1,98191 \cdot 10^6 y^2 - 371762xy - 1,58823 \cdot 10^8 x + 7,13671 \cdot 10^9 y + 6,75244 \cdot 10^{12} = 0.$$

Les dues còniques són el·lipses. Els punts d'intersecció de les dues còniques són  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $X$ . Amb el *Mathematica* s'han calculat les coordenades de  $X$ :  $(-3932, 11, -1852, 18)$ . Arrodonint i amb els signes del *VisualMap*,  $(-3932, 1852)$ .

Per a les dades inicials, valorem en 2 unitats del *FinishingTouch* l'error en la situació dels punts sobre la fotografia, i en 3 unitats del *VisualMap* (3 metres), l'error de les coordenades dels punts sobre el mapa.



FOTOGRAFIA 2

Amb aquestes dades i utilitzant el programa en *QBasic* que s'adjunta (annex 2), el càlcul dels errors dona:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= 2688,792 && \text{desviació típica de les } x = 51,85 \\ \text{Var}(y) &= 30,287 && \text{desviació típica de les } y = 5,50 \\ \text{Cov}(x, y) &= -101,467. \end{aligned}$$

Direcció d'error màxim:  $-2,18^\circ$  respecte de l'eix de les  $x$ , amb variància 2692,659.  
Direcció d'error mínim:  $87,82^\circ$  amb variància 26,420.

La traça de la matriu de variància és 2719,079 i, en no dependre de la direcció, l'agafem com una mesura global de l'error d'aquest exemple primer.

Les coordenades calculades del punt  $X$  més menys la desviació típica són:

$$(-3932 \pm 52, 1852 \pm 6).$$

I en el *VisualMap*, les coordenades del punt del mirador de l'Alcalde des d'on realment es va fer la fotografia són:

$$(-3889 \pm 3, 1859 \pm 3).$$

Les còniques i el «glòbul» d'error sobre el mapa de Barcelona estan representats en la figura 4.

## 7 Exemple segon

Fotografia feta des del terrat de l'edifici 129 del carrer Tarragona sobre l'Eixample de Barcelona (fotografia 2). Sobre la fotografia s'han escollit els punts agrupats al voltant de dos per minimitzar l'error i, per tant, sobre el pla (figura 5) hi ha gairebé dues alineacions:  $XBA$  i  $XEDC$ . S'han pres  $A$  i  $B$  prou separats i també  $C$ ,  $D$  i  $E$  entre ells. Aquests punts són:

A: la cantonada nord de l'edifici Colom.

B: la línia d'unió dels edificis de números 10 i 12 del carrer Diputació.

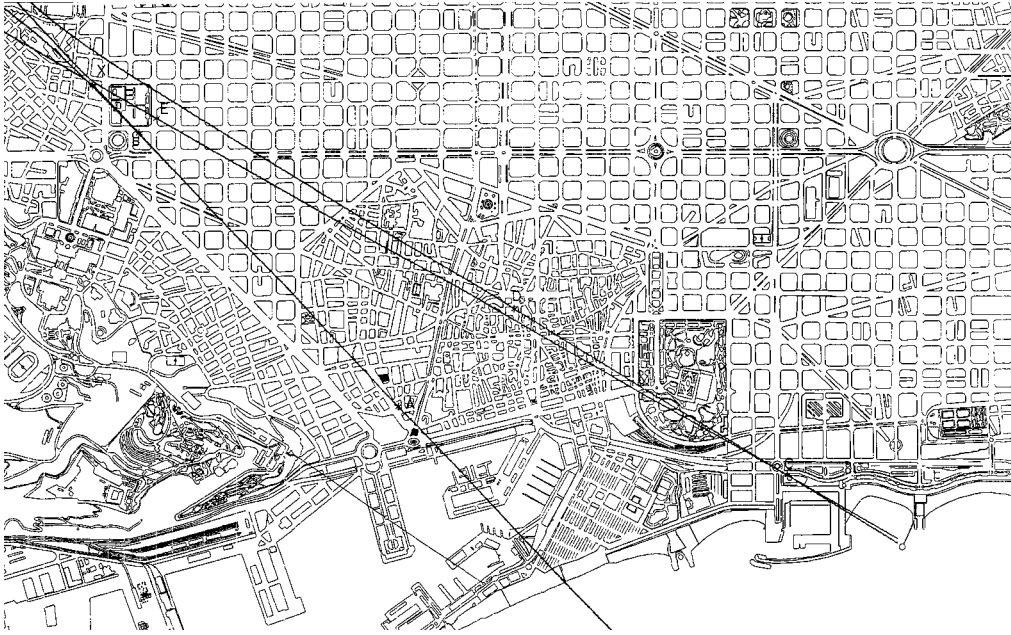


FIGURA 5

C: la cantonada de ponent de l'edifici Mapfre de la Vila Olímpica.

D: l'agulla de la catedral de Barcelona.

E: de la façana de l'I. B. Joan Miró que està en el carrer Vilamarí 78, el punt indicat en la fotografia, que és de fàcil identificació.

La fotografia ha esta revelada i gravada en CD-ROM en comptes de fer còpia sobre paper. El programari per visualitzar les fotografies en CD-ROM ha permès convertir-les en format TIF, que és l'habitual del programa *FinishingTouch*. Els valors obtinguts, en les unitats d'aquest programa, són:

$$A = 1658, B = 1611, C = 355, D = 251 \text{ i } E = 205.$$

Les coordenades d'aquests punts sobre el *VisualMap* són:

$$A = (-2772, 1431), B = (-4206, -126), C = (-611, 1833),$$

$$D = (-2126, 888) \text{ i } E = (-4108, -207).$$

Només el punt *C* queda determinat amb precisió en el *VisualMap*. Per situar els altres punts ha calgut mesurar *in situ*.

Per treballar amb l'orientació habitual dels eixos s'ha canviat el signe de la segona coordenada en tots els punts.

La raó doble dels punts *A*, *B*, *C* i *D* és 1,00277. La cònica que passa per aquests punts amb aquesta raó doble és:

$$1,47413 \cdot 10^6 x^2 + 2,16609 \cdot 10^6 y^2 + 3,71588 \cdot 10^6 xy + \\ 1,12554 \cdot 10^{10} x + 1,44497 \cdot 10^{10} y + 2,13735 \cdot 10^{13} = 0.$$



La raó doble d' $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $E$  és 1,00386. La cònica que passa per aquests punts amb aquesta raó doble és:

$$3,18868 \cdot 10^6 x^2 + 5,03238 \cdot 10^6 y^2 + 8,40305 \cdot 10^6 xy + 2,501 \cdot 10^{10} x + 3,33782 \cdot 10^{10} y + 4,89507 \cdot 10^{13} = 0$$

Les dues còniques són hipèrboles. Les coordenades del punt  $X$  obtingudes amb el *Mathematica* són  $(-4463, 48, 398, 192)$ ; arrodonint i amb el signes del *VisualMap* són  $(-4463, -398)$ .

Valorem en 3 unitats del *VisualMap* (3 metres) l'error en les coordenades dels punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ , que és el mateix valor de l'exemple 1, la qual cosa permetrà comparar els errors d'ambdós exemples.

La valoració de l'error en la situació dels punts sobre la fotografia és més complexa. Una unitat del *FinishingTouch* en la fotografia 1 no equival a una unitat en la fotografia 2. Per poder comparar els errors dels dos exemples cal trobar les equivalències entre les dues unitats. La fotografia 1 tenia inicialment una amplada de 15,2 cm. Després de digitalitzar-la amb un escàner, girar-la i retallar-la, ha quedat amb una amplada de 14,75 cm. La mesura horitzontal del fitxer gràfic és de 1.153 unitats. Cada unitat «informàtica» de la fotografia 1 equival a  $1,28 \cdot 10^{-2}$  cm de la fotografia inicial en paper.

La fotografia 2 estava en CD-ROM. Després de retallar-la, l'amplada final és el 61,18 % de l'amplada inicial. El nou fitxer gràfic mesura 1.770 unitats. Si s'hagués fet una còpia en paper de la fotografia 2 de la mateixa mida que la fotografia 1, cada unitat «informàtica» de la fotografia 2 equivaldria a  $15,2 \cdot 0,6118/1770 = 5,25 \cdot 10^{-3}$  cm de la còpia en paper. Si comparem, cada unitat de la fotografia 1 equival a 2,44 unitats de la fotografia 2.

Com que en l'exemple 1 hem valorat en 2 unitats l'error en la posició dels punts sobre la fotografia, hem de prendre 4,88 unitats d'error en la fotografia 2.

Amb aquests errors en les dades inicials (3 m en el pla, 4,88 unitats en la fotografia), el resultat del càlcul d'errors és:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= 186,247 && \text{desviació típica de les } x = 13,65 \\ \text{Var}(y) &= 115,611 && \text{desviació típica de les } y = 10,75 \\ \text{Cov}(x, y) &= -139,767. \end{aligned}$$

Direcció de màxim error:  $-37,91^\circ$  amb variància 295,089.

Direcció de mínim error:  $52,09^\circ$  amb variància 6,769.

La traça de la matriu de variància val 301,858, que prenem com a mesura global de l'error d'aquest exemple 2.

Com que els errors presos en les dades inicials són equivalents en els dos exemples, tant en la fotografia com en el plànol, es pot comparar l'error en la determinació del punt  $X$  emprant la traça de la matriu de variància que no depèn de les direccions. L'error és molt més petit en l'exemple 2 que en l'exemple 1 ja que la traça de la matriu de variància és 9 vegades més petita.

Les coordenades calculades del punt  $X$ , més menys la desviació típica, són:

$$(-4463 \pm 14, -398 \pm 11).$$

En *VisualMap*, les coordenades del punt des d'on realment es va fer la fotografia són:

$$(-4445 \pm 3, -379 \pm 3).$$

Prescindint de comparar els dos exemples i mesurant directament l'error en la posició dels punts de la fotografia 2, valorem l'error en 4 unitats perquè la fotografia no és tan nítida. Casualment no és gaire diferent de 4,88 i els canvis són mínims (traça de la variància 295,472). Els intervals d'error de les coordenades calculades de  $X$  són els mateixos que abans.

Les còniques s'han representat sobre el *VisualMap* en la figura 5, juntament amb el glòbul d'error, tot i que és massa petit com per poder-se distingir. L'escala del plànol és diferent de la figura 4.

## 8 Conclusions

El mètode de la raó doble, en el fons, és una generalització del mètode de les alineacions. El mètode de les alineacions és el que qualsevol persona utilitza intuïtivament quan intenta esbrinar des d'on s'ha fet una fotografia. El mètode de les alineacions necessita quatre punts alineats dos a dos amb l'observador. Si no estan alineats cal emprar el mètode de la raó doble amb un cinquè punt. L'error en el mètode de la raó doble és mínim en el cas límit del mètode de les alineacions.

Els càlculs de les interseccions de les còniques amb el *Mathematica* ha mostrat que la solució trobada per a  $X$  és sempre la mateixa sigui quina sigui la parella de còniques emprada, sempre que les dades d' $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$  siguin les mateixes. Els errors observats en els valors de  $X$  no són de càlcul sinó que s'han propagat a partir dels errors inicials de mesura.

El programa de càlcul d'errors ha permès comprovar que, un cop fixats els cinc punts de referència, l'error del punt  $X$  no depèn de l'assignació de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ , és a dir, de la parella de còniques que s'han emprat, de les deu parelles que hi ha.

Aquests resultats responen la pregunta final de Stewart (p. 98): «¿No habrá una combinación —como la media, por ejemplo— de estas diez soluciones, cuyo error sea el mínimo posible?». La resposta és no. La solució és sempre la mateixa i amb el mateix error, que només depèn de l'error de les mesures inicials. Ara bé, només es pot disminuir l'error utilitzant més solucions amb una mostra estadística obtinguda escollint conjunts diferents de cinc punts. Això planteja la possibilitat d'utilitzar dues fotografies o més, orientades com es vulgui, amb l'única condició que fetes tirades des del mateix lloc.

Aquests resultats també contradiuen l'afirmació de Stewart (p. 98) «[...]confirmando así nuestro primer resultado, pero tiene la ventaja de cortar a la primera elipse (y también, además, a la segunda) en un ángulo mayor, lo que facilita una determinación más precisa del punto de intersección  $P$ .» La precisió no depèn dels angles amb què es tallen les còniques en el punt  $X$ .

Sempre existeixen dues direccions principals d'error, una d'error mínim i una altra d'error màxim, que són ortogonals. L'error en qualsevol altra direcció és funció de l'angle que aquesta forma amb les direccions principals. Amb els diferents exemples estudiats a part dels aquí mostrats, s'observa que la direcció de màxim error es dirigeix cap al centre de la distribució de punts.

L'error depèn de la disposició relativa entre els punts escollits i respecte al punt d'observació, tal com mostren els exemples 1 i 2. En dependre de quinze mesures (cinc en la fotografia i deu en el mapa), el resultat té molt error si aquestes no estan fetes amb molta cura.

## Referències

- [1] DUNN, G. *Design and analysis of reliability studies. The statistical evaluation of measurement errors*. Oxford University Press, 1989.
- [2] ENRÍQUEZ DE SALAMANCA, C. [autor i editor]; SICILIA, A. G.; *Panoramas del Pirineo español*. Madrid, 1977.
- [3] GRAÑÓ, N.; LLONA, A.; SUAU, F. «Geometria projectiva: El problema de la fotografia». *Butll. Soc. Cat. Mat.* 12-1 (1997), p. 73-83.
- [4] GRASSMANN, H. *Teoría de la Extensión*. Traducció de *Die Ausdehnungslehre*, 1844, per Emilio Òscar Roxin. Buenos Aires: Espasa Calpe, 1947.
- [5] MALACARA, D. [editor] *Geometrical and Instrumental Optics. Methods of Experimental Physics*. London: Academic Press, Inc. 1988. Vol. 25.
- [6] SIROHI, R. S.; KOTHIYAL, M. P. *Optical Components, Systems and Measurement Techniques*. N. Y.: Marcel Dekker Inc., 1991.
- [7] STEWART, I., «Armoniosas relaciones (y razones no menos armónicas) entre el mapa y el territorio». *Investigación y Ciencia*. (maig 1990) p. 93-98.
- [8] STRAHLER, A. N. *Geografía Física*. 5a ed. Barcelona: Omega, 1981.

### Annex 1: Fitxer per fer els càlculs de l'exemple primer amb el programa *Mathematica*.

```

Rd[A_,B_,C_,D_] :=(C-A)(D-B)/(C-B)/(D-A); (*Def. raó doble*)
(*Coordenades dels punts sobre el mapa *)
P1={-2691.,-1631.}; P2={-1514., -1605.}; P3={-754.,-1834.};
P4={-2844.,-2058.}; P5={-2305.,-2431};
(* Posicions dels punts sobre la foto *)
P1'=-66.; P2'=216.; P3'=401.; P4'=757.; P5'=1044.;
(* Cònica que passa pels punts P1, P2, P3 i P4 amb raó doble r1*)
r1=Rd[P1',P2',P3',P4']
f1[x_,y_] :=Expand[
(P1[[1]]P3[[2]]-P3[[1]]P1[[2]]+(P1[[2]]-P3[[2]])x+
(P3[[1]]-P1[[1]])y)(P2[[1]]P4[[2]]-P4[[1]]P2[[2]]+
(P2[[2]]-P4[[2]])x+(P4[[1]]-P2[[1]])y)-r1(
(P2[[1]] P3[[2]]-P3[[1]] P2[[2]]+(P2[[2]]-P3[[2]])x+
(P3[[1]]-P2[[1]])y)(P1[[1]]P4[[2]]-P4[[1]]P1[[2]]+
(P1[[2]]-P4[[2]])x+P4[[1]]-P1[[1]])y) )]
f1[x,y]
(*Cònica que passa pels punts P1,P2,P3 i P5 amb raó doble r2*)
r2=Rd[P1',P2',P3',P5']
f2[x_,y_] :=Expand[
(P1[[1]]P3[[2]]-P3[[1]]P1[[2]]+(P1[[2]]-P3[[2]])x+
(P3[[1]]-P1[[1]])y)(P2[[1]]P5[[2]]-P5[[1]]P2[[2]]+
(P2[[2]]-P5[[2]])x+(P5[[1]]-P2[[1]])y)-r2(
(P2[[1]] P3[[2]]-P3[[1]] P2[[2]]+(P2[[2]]-P3[[2]])x+
(P3[[1]]-P2[[1]])y)(P1[[1]]P5[[2]]-P5[[1]]P1[[2]]+
(P1[[2]]-P5[[2]])x+(P5[[1]]-P1[[1]])y) )]
f2[x,y]
(*Intersecció de les dues còniques *)
L=Solve [{f1[x,y]==0, f2[x,y]==0},{x,y}]
(*Representació gràfica de funcions implícites *)
Needs ["Graphics 'ImplicitPlot' "]

```

```
(*Representació gràfica de les còniques *)
A=ImplicitPlot [{f1[x,y]==0, f2[x,y]==0},
{x,-4000,-500},{y,-3000,-1500}, (*Ajustat a l'exemple 1*)
PlotPoints->100, Axes->None];
(*Representació gràfica dels punts i les còniques *)
B=ListPlot[{x,y}/.L, Axes->None];
Show[A,B,AspectRatio->Automatic];
```

## Annex 2: Programa de càlcul d'errors escrit en QBasic.

```
REM*****error 19/6/95*****
REM*****càlcul d'error en la fotografia*****
REM vrr=Var(r)/r^2 vss=Var(s)/s^2 cvrs=Covar(r,s)/(r*s)
CLS: INPUT "ef"; ef: vf=ef^2
INPUT "a"; a: INPUT "b"; b:INPUT "c"; c:INPUT "d"; d:INPUT "e"; e
ab =b-a: ac=c-a: ad=d-a: ae=e-a: bc=c-b: bd=d-b: be=e-b: cd=d-c: ce=e-c
r=ac*bd/(ad*bc): s=ac*be/(ae*bc)
vrr=(cd/(ac*ad))^2+(cd/(bc*bd))^2+(ab/(ac*bc))^2+(ab/(ad*bd))^2
vss=(ce/(ac*ae))^2+(ce/(bc*be))^2+(ab/(ac*bc))^2+(ab/(ae*be))^2
cvrs=cd*ce/(ac^2*ad*ae)+cd*ce/(bc^2*bd*be)+ ab^2/(ac*bc)^2
vrr=vrr*vf: vss=vss*vf: cvrs=cvrs*vf
REM*****punts del pla*****
INPUT "ep";ep: vp=ep^2: INPUT "a1";a1: INPUT "a2";a2: INPUT "b1";b1
INPUT "b2";b2: INPUT "c1";c1: INPUT "c2";c2: INPUT "d1";d1: INPUT "d2";d2
INPUT "e1";e1: INPUT "e2";e2: INPUT "x1";x1: INPUT "x2";x2
REM*****càlcul de vectors*****
ac1=c1-a1: ac2=c2-a2: ad1=d1-a1: ad2=d2-a2: ae1=e1-a1: ae2=e2-a2
bc1=c1-b1: bc2=c2-b2: bd1=d1-b1: bd2=d2-b2: be1=e1-b1: be2=e2-b2
xa1=a1-x1: xa2=a2-x2: xb1=b1-x1: xb2=b2-x2: xc1=c1-x1: xc2=c2-x2
xd1=d1-x1: xd2=d2-x2: xe1=e1-x1: xe2=e2-x2
REM*****càlcul de productes de vectors*****
xac=xa1*xc2-xc1*xa2: xad=xa1*xd2-xd1*xa2: xae=xa1*xe2-xe1*xa2
xbc=xb1*xc2-xc1*xb2: xbd=xb1*xd2-xd1*xb2: xbe=xb1*xe2-xe1*xb2
va1=xc1/xac-xd1/xad: va2=xc2/xac-xd2/xad
vb1=xd1/xbd-xc1/xbc: vb2=xd2/xbd-xc2/xbc
vc1=-xa1/xac+xb1/xbc: vc2=-xa2/xac+xb2/xbc
vd1=-xb1/xbd+xa1/xad: vd2=-xb2/xbd+xa2/xad
vx1=-ac1/xac+ad1/xad-bd1/xbd+bc1/xbc
vx2=-ac2/xac+ad2/xad-bd2/xbd+bc2/xbc
wa1=xc1/xac-xe1/xae: wa2=xc2/xac-xe2/xae
wb1=xe1/xbe-xc1/xbc: wb2=xe2/xbe-xc2/xbc
wc1=-xa1/xac+xb1/xbc: wc2=-xa2/xac+xb2/xbc
we1=-xb1/xbe+xa1/xae: we2=-xb2/xbe+xa2/xae
wx1=-ac1/xac+ae1/xae-be1/xbe+bc1/xbc
wx2=-ac2/xac+ae2/xae-be2/xbe+bc2/xbc
PRINT va1;TAB(20);va2;TAB(40);wa1;TAB(60);wa2
PRINT vb1;TAB(20);vb2;TAB(40);wb1;TAB(60);wb2
PRINT vc1;TAB(20);vc2;TAB(40);wc1;TAB(60);wc2
PRINT vd1;TAB(20);vd2;TAB(40);we1;TAB(60);we2
PRINT vx1;TAB(20);vx2;TAB(40);wx1;TAB(60);wx2
REM*****càlcul de variancies en el pla*****
REM vxx=Var(x) vyy=Var(y) cvxy=Covar(x,y)
h= vrr+vp*(va1^2+va2^2+vb1^2+vb2^2+vc1^2+vc2^2+vd1^2+vd2^2)
```

```

j=vss+vp*(wa1^2+wa2^2+wb1^2+wb2^2+vc1^2+wc2^2+we1^2+we2^2)
k=cvrs+vp*(va1+wa1+va2*wa2+vb1*wb1+vb2*wb2+vc1*wc1+vc2*wc2)
det=vx1*wx2-vx2*wx1
vxx=(h*wx1^2+j*vxx1^2-2*k*vxx1*wx1)/det^2
vyy=(h*wx2^2+j*vyy2^2-2*k*vyy2*wx2)/det^2
cvxy=(h*wx1*wx2+j*vxx1*vxx2-k*(vx1*wx2+vx2*wx1))/det^2
PRINT "h, j, k";TAB(20);h;TAB(40);j;TAB(60);k
PRINT "vxx, vyy, cvxy";TAB(20);vxx;TAB(40);vyy;TAB(60);cvxy
REM*****càlcul direccions principals d'error*****
pi=3.1415926535#
z1=ATN(2*cvxy/(vxx-vyy))/2
z2=z1+pi/2
vxe= vxx*COS(z1)^2+2*cvxy*COS(z1)*SIN(z1)+ vyy*SIN(z1)^2
vye= vxx*SIN(z1)^2-2*cvxy*SIN(z1)*COS(z1)+ vyy*COS(z1)^2
PRINT "angles(graus)"; TAB(20); z1*180/pi; TAB(40);z2*180/pi
PRINT; "var. principals"; TAB(20);vxe; TAB(40);vye

```

RAMON GONZÁLEZ  
 INSTITUT DE BATXILLERAT PERE CALDERS  
 CAMPUS UAB  
 08193 CERDANYOLA DEL VALLÈS

JOSEP HOMES  
 INSTITUT DE BATXILLERAT CARDEDEU  
 AV. VERGE DE MONTSERRAT  
 08440 CARDEDEU

JORDI SOLSONA  
 ESCOLA JOAN PELEGRÍ  
 CONSELL DE CENT, 14  
 08014 BARCELONA