1. GENERALIDADES DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Definición del álgebra geométrica del espacio-tiempo

Defino *el álgebra geométrica del espacio y tiempo* como el álgebra de las matrices cuadradas reales de dimensión 4, $\mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbf{R})$. Estas matrices, junto con la operación de suma de matrices y multiplicación por números reales forman un espacio vectorial. Defino el *producto geométrico* de dos elementos del álgebra como su producto matricial. La multiplicación de matrices les confiere estructura de grupo continuo y por lo tanto junto a la estructura de espacio vectorial forman un álgebra asociativa con elemento unidad, que es la matriz identidad. No entraré en estos detalles de sobra conocidos.

Espacio vectorial generador del álgebra geométrica

Toda el álgebra geométrica puede ser generada mediante suma y multiplicación de los elementos de un subespacio *E* de ella con dimensión 4. A los elementos de este subespacio los llamaré *vectores geométricos* o simplemente *vectores* en un sentido restringido, y a este subespacio lo llamaré *espacio vectorial generador del álgebra geométrica*, lo que podemos representar como $\mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbf{R}) = Cl(E)$. <u>El espacio vectorial generador no es único</u>, y puede ser escogido de diferentes maneras dando lugar a lo que aparentemente parecen diferentes álgebras geométricas. Lo que sí es único es su dimensión.

Producto exterior

Defino el *producto exterior de dos vectores* como aquella parte del producto matricial (geométrico) que no puede ser expresada como combinación lineal de los dos vectores y de la identidad (números reales). En general, defino el *producto exterior de tres o más vectores* como aquella parte del producto geométrico que no puede ser expresada como combinación lineal de productos de vectores en un número inferior en al menos una unidad. El producto exterior, como su nombre indica, nos da la parte del producto que corresponde a un aumento de dimensión geométrica. Por ejemplo, el producto exterior de dos vectores nos da el área del paralelogramo, es decir, base por altura (perpendicular a la base). Análogamente el producto exterior de tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo, es decir, área de la base por altura. El gran descubrimiento de Hermann Grassmann es que el producto exterior es anticonmutativo, es decir, al conmutar dos vectores su signo cambia. Dedicaremos un capítulo al producto exterior y sus aplicaciones geométricas.

Elementos homogéneos y su grado

Un *elemento homogéneo* del álgebra es aquel que puede obtenerse como combinación lineal de productos exteriores del mismo número de vectores. Al número de vectores de estos productos exteriores se le llama *grado*. Así pues, un elemento homogéneo es combinación lineal de elementos del mismo grado. El producto exterior aumenta la dimensión geométrica, que es lo que indica el grado. Así por ejemplo, los vectores son elementos de grado 1. A los elementos que se obtengan como combinaciones lineales de productos exteriores de pares de vectores geométricos se les llama *bivectores* y tienen grado 2; a los que se obtengan a partir de combinaciones lineales de productos exteriores de tres vectores se les llama *trivectores* y tienen grado 3 y así sucesivamente. Los bivectores representan superficies (en sentido amplio) y los trivectores volúmenes (en sentido amplio). Los elementos homogéneos del álgebra quedan clasificados por su grado y forman subespacios. Entonces se dice que el álgebra geométrica es un álgebra graduada. Así, toda el álgebra aparece subdividida en espacios vectoriales formados por elementos homogéneos de la siguiente manera:

grado	subespacio	símbolo	dimensión
0	números reales	**R**	1
1	vectores (subespacio generador)	E	4
2	bivectores	$\wedge^2 E$	6
3	trivectores	$\wedge^3 E$	4
4	volumen tetradimensional	$\wedge^4 E$	1

La dimensión de cada subespacio viene dada por los números combinatorios pues su base se obtiene por combinación de los elementos de la base del subespacio generador. El álgebra de Clifford es la unión de todos estos subespacios y, por la conocida fórmula que da la suma de los números combinatorios tenemos para un álgebra geométrica cualquiera con un subespacio generador de dimensión n:

$$\dim Cl(E_n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Para el caso concreto del álgebra del espacio-tiempo obtenemos:

$$\dim Cl(E_4) = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16$$

que es exactamente la dimensión del álgebra de matrices cuadradas reales de 4×4.

El grado no es una característica intrínseca de un elemento del álgebra, sino que depende del espacio vectorial escogido como generador del álgebra.

Módulo de un elemento del álgebra

Defino el módulo de un elemento cualquiera del álgebra como la raíz cuarta positiva de su determinante:

$$|\, v \,| = \sqrt[4]{\det(v)}$$

De aquí se sigue inmediatamente que el módulo del producto de dos elementos cualesquiera es igual al producto de módulos:

$$\det(u\, v) = \det(u) \cdot \det(v) \qquad \Rightarrow \qquad |\, u\, v \,| = \pm |\, u \,|\,|\, v \,|$$

Sólo en el caso de que los dos módulos sean imaginarios tendremos el signo menos en la igualdad.

Hasta ahora, muchos autores definían el módulo en un álgebra geométrica de forma arbitraria, lo que no es correcto y no tiene generalidad. Si bien el módulo de un vector del espacio-tiempo viene dado empíricamente por la teoría de la relatividad, no es tan obvio cuál es el módulo de cualquier otro elemento del álgebra. Una teoría coherente de las isometrías del álgebra geométrica, tal como se desarrollará en este libro, exige que el módulo se derive del determinante.

Perpendicularidad y ortogonalidad

Diré que dos elementos homogéneos con el mismo grado son *perpendiculares* si anticonmutan:

$$v\,w = -w\,v$$

y que *tienen la misma dirección* si su producto conmuta. Tener la misma dirección geométrica ya no implica ser proporcionales o linealmente dependientes. Lo primero es un concepto geométrico, mientras lo segundo es un concepto algebraico.

Diré que dos elementos homogéneos son *ortogonales* si el cuadrado del módulo de la suma es igual a la suma o resta de cuadrados de sus módulos.

$$|\,v+w\,|^2 = |\,v\,|^2 \pm |\,w\,|^2$$

Los adjetivos "perpendicular" y "ortogonal" coinciden para elementos homogéneos en el espacio de tres dimensiones pero ya no son idénticos para el álgebra geométrica de 4 dimensiones y hay que distinguirlos. El concepto de perpendicularidad es puramente geométrico y asociado a las direcciones del espacio generador. El concepto de ortogonalidad es puramente algebraico, y generaliza el teorema de Pitágoras.

Unidades geométricas y teorema de Pitágoras

A un elemento u del álgebra geométrica tal que su cuadrado sea ± la identidad (que se identifica con el 1) y su determinante igual a uno[1] le llamo *unidad geométrica*:

$$u^2 = \pm 1 \qquad \det u = 1$$

Veamos el siguiente teorema: El cuadrado de una combinación lineal de unidades geométricas mutuamente perpendiculares es un número real. Si las unidades son perpendiculares es que anticonmutan:

$$u_i^2 = \pm 1 \qquad u_i u_j = -u_j u_i$$

lo que nos lleva a:

---

[1] Este requisito no se exige al álgebra bidimensional Cl_2, pero sí es necesario en el espacio-tiempo.

$$b = \sum_i \lambda_i u_i \qquad \lambda_i \in \mathbf{R}$$

$$b^2 = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j u_i u_j = \sum_i \lambda_i^2 u_i^2 = \sum_i \lambda_i^2 \chi_i \in \mathbf{R} \qquad \chi_i = u_i^2 = \pm 1$$

Una consecuencia muy importante de este resultado es que el módulo de una combinación lineal de unidades geométricas mutuamente perpendiculares cumple el teorema de Pitágoras generalizado, es decir cada cuadrado con signo + o − (el signo en realidad tiene muy poca importancia como se irá viendo en este libro):

$$|b|^2 = \pm |b^2| = \pm \left| \sum_i \lambda_i^2 \chi_i \right|$$

En el caso de módulo imaginario ($b^2 < 0$) tendremos un signo menos delante.

Conjugado e inverso de un elemento del álgebra geométrica

Se define el *inverso* de un elemento cualquiera v del álgebra como aquel elemento v^{-1} que cumple[2]:

$$v\, v^{-1} = v^{-1} v = 1$$

entendiendo por 1 la matriz identidad. No todos los elementos del álgebra tienen inverso pues es condición necesaria y suficiente para que exista el inverso que el determinante sea no nulo:

$$\exists v^{-1} \Leftrightarrow \det v \neq 0$$

Un teorema al respecto muy importante es el de Frobenius[3] (1878): Las únicas álgebras asociativas reales de división son los números reales, los números complejos y los cuaterniones o bien álgebras que son isomorfas a ellos (por ejemplo sus representaciones matriciales). Un álgebra de división es un álgebra[4] en que todos sus elementos excepto el cero tienen inverso. Siendo en su tiempo este teorema un avance, en realidad se acabó convirtiendo en un freno conceptual, pues pareció que ya estaba todo descubierto y creó cierto desdén para el resto de álgebras que contenían elementos sin inverso. Por ejemplo, el álgebra geométrica no es de división. Tiene elementos de módulo nulo y sin inverso que generan discontinuidades hiperbólicas que se reflejan en la estructura topológica del espacio-tiempo.

Defino el *conjugado* v^* de un elemento v del álgebra como aquel que cumple:

---

[2] Es una consecuencia trivial de la propiedad asociativa que un elemento y su inverso siempre conmutan.

[3] Véase L. S. Pontriaguin, *Grupos continuos*, ed. Mir (Moscú, 1978) p. 170.

[4] Un *álgebra asociativa* es una estructura que contiene un conjunto de elementos y dos operaciones: una suma y un producto. La suma es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (el cero) y elemento opuesto. El producto es asociativo, tiene elemento neutro (el 1 o identidad) y es distributivo respecto de la suma. Puede haber elemento inverso para algunos elementos aunque no siempre para todos. Si el álgebra tiene elemento inverso de cualquier elemento excepto el cero entonces se llama *álgebra de división*.

$$v\, v^* = |v|^2 = \sqrt{\det v}$$

Por lo tanto, el conjugado se obtiene como:

$$v^* = |v|^2\, v^{-1} = v^{-1}\sqrt{\det v}$$

En algunos casos el conjugado coincide con el elemento. En otros cambia el signo de algunas componentes. En cualquier caso, otros autores han definido diversos conjugados en función del grado del elemento considerado, lo que no tenía generalidad. Esta definición engloba todos los conjugados corrientemente utilizados, como el de los números complejos y los cuaterniones, y generaliza la definición a cualquier elemento, aunque sea heterogéneo. El conjugado e inverso son simplemente proporcionales.

Ejercicios

1.1 Obténgase una fórmula que describa el producto exterior de dos vectores en función del producto geométrico.

1.2 Explíquese cómo podemos obtener una nueva unidad geométrica a partir de una combinación lineal de unidades geométricas mutuamente perpendiculares.

1.3 Aplíquese el resultado anterior para obtener dos unidades geométricas nuevas y perpendiculares entre sí a partir de $\{e_1, e_2\}$ tales que $e_1^2 = e_2^2 = 1$.

1.4 Aplíquese el resultado de 1.2 para obtener dos unidades geométricas nuevas y perpendiculares entre sí a partir de $\{e_0, e_1\}$ tales que $e_0^2 = -1$ y $e_1^2 = 1$.

1.5 Hemos dicho que el álgebra geométrica no es de división. Encuéntrense ejemplos sencillos de matrices reales de dimensión 4×4 sin inverso.

1.6 William Rowan Hamilton descubrió los cuaterniones el 16 de octubre de 1843 con las siguientes leyes de formación: $i\, j = -j\, i = k$, $j\, k = -k\, j = i$, $k\, i = -i\, k = j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Su representación matricial fiel[5] es:

$$a + b\, i + c\, j + d\, k = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbf{R}$$

a) Probar que es una subálgebra del álgebra geométrica del espacio-tiempo.
b) Calcular el módulo y demostrar que los cuaterniones son álgebra de división.
c) Calcular el conjugado e inverso de un cuaternión.

---

[5] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad nº 70, 5ª ed. (Madrid, 1982) vol. III, p. 392.