2. BASES Y REPRESENTACIÓN MATRICIAL

El objetivo de este capítulo es determinar una base ortonormal del espacio vectorial generador del álgebra geométrica del espacio-tiempo, es decir, un conjunto de 4 unidades e_i mutuamente perpendiculares:

$$e_i^2 = \pm 1 \qquad e_i e_j = -e_j e_i$$

cuyos sucesivos productos generen el resto de elementos del álgebra.

Antes de encontrar estos elementos, que son matrices reales de dimensión 4×4, vamos a ver cómo se puede obtener una representación matricial de un álgebra asociativa.

Representación matricial de un álgebra asociativa con elemento unidad

Una representación matricial de un álgebra asociativa es un conjunto de matrices cuya suma y producto reproducen la suma y producto de los elementos del álgebra. Existe un número infinito de representaciones de distinta dimensión. Una representación es *fiel* si es un isomorfismo del álgebra, es decir, si a cada elemento distinto del álgebra le corresponde una matriz distinta. Una representación que no sea fiel no tiene interés práctico, pues colapsa elementos distintos del álgebra en una misma matriz, es decir, es degenerada. La representación más útil es la que siendo fiel tiene la mínima dimensión posible y ésta se puede obtener por el método de los ideales[1]. La representación obtenida a partir del producto de elementos del álgebra asociativa se llama *regular* y puede no ser de dimensión mínima. Si el álgebra tiene elemento unidad (que es nuestro caso) la representación regular siempre es fiel. Como ejemplo, deduzcamos la representación regular del álgebra de los cuaterniones. Tomemos el producto de dos cuaterniones:

$$(a + b\,i + c\,j + d\,k)(e + f\,i + g\,j + h\,k)$$

$$= a\,e - b\,f - c\,g - d\,h + i\,(a\,f + b\,e + c\,h - d\,g)$$

$$+ j\,(a\,g + c\,e + d\,f - b\,h) + k\,(a\,h + d\,e + b\,g - c\,f)$$

y ahora escribámoslo en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,e - b\,f - c\,g - d\,h \\ a\,f + b\,e + c\,h - d\,g \\ a\,g + c\,e + d\,f - b\,h \\ a\,h + d\,e + b\,g - c\,f \end{pmatrix}$$

---

[1] Véase A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Alianza Universidad nº 70, 5ª ed. (Madrid, 1982) vol. III, p. 393.

de donde se deduce que[2]:

$$a + b\,i + c\,j + d\,k = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Es decir, un cuaternión, que originalmente era un vector columna, viene ahora representado por una matriz, cuya primera columna es el vector original. Esto es un hecho característico del álgebra geométrica: el producto geométrico opera sobre los elementos del álgebra, pero éstos no son sólo elementos pasivos sino que al mismo tiempo son también operadores, por lo cual todo elemento del álgebra geométrica tiene una representación como matriz y es también un operador que realiza una transformación geométrica. Precisamente una matriz no es nada más que un operador lineal y el producto de matrices se deduce de la composición de aplicaciones lineales. Por lo tanto, puesto que el álgebra de matrices puede representar cualquier álgebra asociativa, y las leyes de sus operaciones se deducen de la composición de transformaciones lineales, resultan ser el marco más general y, al mismo tiempo, más sencillo posible para describir cualquier álgebra múltiple. Un álgebra múltiple es un álgebra en que las cantidades múltiples (vectores o matrices) se operan bajo ciertas leyes, sean de suma, multiplicación, etc. Históricamente ha habido diversas propuestas de álgebras múltiples como, por ejemplo, los cuaterniones, el producto exterior, las matrices, el análisis vectorial[3]. A un álgebra múltiple siempre se le ha exigido que la suma de cantidades múltiples sume las mismas componentes y que el producto, fuere el que fuere, sea distributivo respecto de la suma. La forma más simple de representar una cantidad múltiple sin imponer propiedad alguna es mediante un vector o una matriz de números reales.

Base del álgebra geométrica

La base del álgebra geométrica es un conjunto de unidades independientes (elementos cuyo cuadrado es igual a 1 o –1) cuyas combinaciones lineales contienen todos los elementos del álgebra geométrica. Puesto que la dimensión de las matrices reales de 4×4 es 16, necesitamos 16 matrices como base del álgebra. Primero de todo veamos que, tomando el máximo de elementos nulos, las unidades sólo pueden ser de cuatro tipos:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

---

[2] Esta matriz que representa un cuaternión difiere de la dada en la página anterior porque ha sido obtenida por un método algo diferente. Sin embargo, ambas son válidas y pertenecen a la misma representación, cuyas matrices quedan definidas salvo transformación de semejanza (véase siguiente capítulo).

[3] Josiah Willard Gibbs discute extensamente las álgebras múltiples en el artículo "On Multiple Algebra", *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, vol. XXXV (1886) pp. 37-66, reproducido en *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*, Dover (N.Y. 1961) vol. 2, p. 91-117.

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm 1$$

Fijémonos en que las unidades que son matrices diagonales siempre tienen cuadrado +1 pues, sea cual sea el signo de un elemento, siempre se multiplica por sí mismo. En los otros tres casos el cuadrado puede ser positivo o negativo. Los subespacios que tienen por base cada tipo de unidades son de dimensión 4 y están formados por matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a buscar en cada subespacio cuatro unidades independientes y escribamos debajo su cuadrado:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^2 = \mathbf{D}^2 = 1$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{H}^2 = 1 \qquad \mathbf{F}^2 = \mathbf{G}^2 = -1$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = 1 \qquad \mathbf{K}^2 = \mathbf{L}^2 = -1$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{O}^2 = 1 \qquad \mathbf{N}^2 = \mathbf{P}^2 = -1$$

Obsérvese que en los tres últimos tipos de matriz siempre encontramos necesariamente dos unidades geométricas de cuadrado positivo y dos de cuadrado negativo. Lo que nos da en total 10 unidades de cuadrado positivo y 6 de cuadrado negativo.

Hay tres ternas de unidades que conmutan entre sí $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$, $\{\mathbf{E}, \mathbf{I}, \mathbf{M}\}$ y $\{\mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{O}\}$ y anticonmutan con las de la otra terna. Y hay dos ternas de unidades que anticonmutan entre sí $\{\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{P}\}$ y $\{\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{N}\}$ y conmutan con las de la otra terna. Siendo además las del primer tipo de cuadrado igual a 1 y las de segundo tipo de cuadrado igual a –1. Por otro lado, el producto de matrices diagonales siempre dará otra matriz diagonal, mientras que una matriz de la segunda fila por una de la tercera dará una matriz de la cuarta fila, una de la tercera por una de la cuarta dará una de la segunda fila, y una de la cuarta por una de la segunda dará una de la tercera. Las matrices de la primera fila sólo se obtendrán como productos de matrices de la misma fila.

Ahora vamos a investigar qué unidades generan toda el álgebra a través de su multiplicación. Buscamos cuatro unidades que anticonmuten entre sí y que, de acuerdo con la teoría de la relatividad especial, cumplan que:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \qquad e_0^2 = -1$$

Se representa el álgebra generada por estas cuatro unidades como $Cl_{3,1}$. Puesto que:

$$e_{12}^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1^2 e_2^2 = -1 \qquad e_{01}^2 = e_0 e_1 e_0 e_1 = -e_0^2 e_1^2 = 1$$

$$e_{123}^2 = e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 = e_1^2 e_2 e_3 e_2 e_3 = -1 \qquad e_{012}^2 = e_0 e_1 e_2 e_0 e_1 e_2 = e_0^2 e_1 e_2 e_1 e_2 = 1$$

$$e_{0123}^2 = e_{0123} e_{0123} = -e_0^2 e_{123}^2 = -1$$

etc., sus productos cumplirán:

$$e_{12}^2 = e_{23}^2 = e_{31}^2 = -1 \qquad e_{01}^2 = e_{02}^2 = e_{03}^2 = 1$$

$$e_{012}^2 = e_{023}^2 = e_{031}^2 = -e_{123}^2 = 1 \qquad e_{0123}^2 = -1$$

Es decir, tenemos 10 unidades de cuadrado +1 (contando la identidad) y 6 de cuadrado –1, exactamente igual que la base matricial del álgebra geométrica. Sólo falta dar una correspondencia adecuada entre las unidades geométricas y las matrices correspondientes[4]. Este espacio vectorial generador no es único y se demuestra que el álgebra generada por dos unidades de cuadrado +1 y dos de cuadrado –1 también tiene 10 unidades de cuadrado +1 y 6 de cuadrado –1 y es isomorfa a las matrices reales de orden 4. Resumidamente:

$$Cl_{3,1} = Cl_{2,2} = \mathbf{M}_{4\times4}(\mathbf{R})$$

Para buscar la correspondencia entre matrices y unidades geométricas, utilicemos la representación que antes hemos hallado para los cuaterniones e identifiquemos ya las unidades cuaterniónicas:

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hamilton dedujo los cuaterniones como cocientes de vectores[5], y concretamente definió los "versores"[6] $i = e_3 / e_2$, $j = e_1 / e_3$, $k = e_2 / e_1$, es decir:

$$i = e_3 e_2^{-1} = e_3 e_2 = -e_2 e_3 = -e_{23} \qquad j = -e_{31} \qquad k = -e_{12}$$

lo que nos da:

$$e_{23} = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{31} = \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_{12} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[4] Podría argumentarse que también generaríamos el álgebra mediante un conjunto de cuatro unidades de cuadrado +1, pero esto no es así, porque entonces hay 6 unidades de cuadrado positivo y 10 de cuadrado negativo, lo que no corresponde a las matrices reales de 4×4 sino a matrices imaginarias que, una vez substituida la representación bidimensional de la unidad imaginaria, son una subálgebra de las matrices reales de 8×8. Un resumen de las representaciones de las álgebras geométricas se puede observar en la tabla 1 de Pertti Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press (1997), p. 217.

[5] Véase la sección 2 "First Motive for naming the Quotient of two Vectors a Quaternion", en William Rowan Hamilton, *Elements of Quaternions* (1866), Chelsea, 3rd ed. (1969) vol. I, p. 110.

[6] Véase la sección 10 "On a system of Three Right Versors, in Three Rectangular Planes; and on the Laws of the Symbols, i, j, k" de la referencia anterior, p. 157

Puesto que sólo queda otra terna de unidades de cuadrado negativo $\{\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{N}\}$, tenemos necesariamente que identificar ésta con las unidades $\{e_0, e_{123}, e_{0123}\}$, no necesariamente correlativas aunque sí en el mismo orden. Escojo a mi antojo:

$$e_0 = \mathbf{G} \qquad e_{123} = \mathbf{L} \qquad e_{0123} = \mathbf{N}$$

con lo que ya podemos obtener el resto de elementos:

$$e_1 = -e_{123}e_{23} = -\mathbf{L}\,\mathbf{F} = -\mathbf{O} \qquad e_2 = e_1 e_{12} = -\mathbf{O}\,\mathbf{P} = \mathbf{B}$$

$$e_3 = e_{31}e_1 = -\mathbf{K}\,\mathbf{O} = \mathbf{E} \qquad e_{01} = e_0 e_1 = -\mathbf{G}\,\mathbf{O} = \mathbf{I}$$

$$e_{02} = e_0 e_2 = \mathbf{G}\,\mathbf{B} = -\mathbf{H} \qquad e_{03} = e_0 e_3 = \mathbf{G}\,\mathbf{E} = \mathbf{C}$$

Ya hemos deducido toda la base del álgebra geométrica que queda así:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{02} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{023} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad e_{031} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{012} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{123} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_{0123} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por supuesto pueden asignarse las unidades de otras maneras, pero siempre encontraremos un conjunto de 16 matrices reales (10 de cuadrado +1 y 6 de cuadrado –1) que corresponden a todas las unidades del álgebra geométrica del espacio-tiempo. Todas estas bases son equivalentes (en el siguiente capítulo detallaré esta cuestión) y corresponden a la misma representación llamada *representación de Majorana*[7]. En cualquier caso, las matrices aquí deducidas son directamente aplicables a cálculos de álgebra geométrica escritos en lenguajes de programación.

Dualidad del álgebra geométrica

En todas las álgebras geométricas puede invertirse el grado. Vamos a visualizarlo en el álgebra del espacio-tiempo. Las unidades $\{e_{123}, e_{023}, e_{031}, e_{012}\}$ son también una base generadora de toda el álgebra geométrica. Veamos sus productos:

$$e_{123}e_{023} = e_{13}e_{03} = -e_{10} = e_{01} \qquad e_{123}e_{031} = -e_{12}e_{01} = -e_{20} = e_{02}$$

$$e_{123}e_{012} = -e_{13}e_{01} = -e_{30} = e_{03} \qquad e_{012}e_{023} = -e_{12}e_{23} = -e_{13} = e_{31}$$

$$e_{023}e_{031} = -e_{23}e_{31} = -e_{21} = e_{12} \qquad e_{031}e_{012} = -e_{31}e_{12} = -e_{32} = e_{23}$$

$$e_{123}e_{23} = -e_1 \qquad e_{123}e_{31} = e_{12}e_1 = -e_2 \qquad e_{123}e_{12} = -e_3 \qquad e_{023}e_{23} = -e_0$$

$$e_0 e_{123} = e_{0123}$$

Por lo que el álgebra puede graduarse de la siguiente manera:

grado	subespacio	dimensión
0	**R**	1
1	$\langle e_{123}, e_{023}, e_{031}, e_{012}\rangle$	4
2	$\langle e_{01}, e_{02}, e_{03}, e_{12}, e_{23}, e_{31}\rangle$	6
3	$\langle e_0, e_1, e_2, e_3\rangle$	4
4	$\langle e_{0123}\rangle$	1

[7] Ettore Majorana, eminente físico teórico italiano nacido en 1906, descubrió que las matrices 4×4 complejas de Dirac eran equivalentes a una representación con matrices reales. Desapareció el 27 de Marzo de 1938 (véase Eduardo Amaldi "Nota biografica di Ettore Majorana" en *La vita e l'opera di Ettore Majorana*, Academia Nazionale dei Lincei [Roma, 1966], p. XLVII), tal vez por propia voluntad (véase Leonardo Sciascia, *La desaparición de Majorana*, Tusquets [Barcelona, 2007]) y probablemente con destino Argentina.

Módulo de algunos elementos del álgebra geométrica

Una vez encontrada la representación matricial, veamos los determinantes de los elementos de cada grado. El determinante de un vector de espacio-tiempo corresponde lógicamente a la potencia cuarta de su módulo dado por la teoría de la relatividad:

$$\det(a\,e_0 + b\,e_1 + c\,e_2 + d\,e_3) = \begin{vmatrix} c & a+d & 0 & -b \\ -a+d & -c & b & 0 \\ 0 & b & c & -a+d \\ -b & 0 & a+d & -c \end{vmatrix} = \left(-a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2$$

$$\left|\, a\,e_0 + b\,e_1 + c\,e_2 + d\,e_3 \right| = \sqrt{-a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Del determinante de un bivector de espacio-tiempo[8]:

$$\det(a\,e_{01} + b\,e_{02} + c\,e_{03} + f\,e_{23} + g\,e_{31} + h\,e_{12}) = \begin{vmatrix} c & -b+f & a+g & h \\ -b-f & -c & h & a-g \\ a-g & -h & -c & b+f \\ -h & a+g & b-f & c \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a^2 + b^2 + c^2 - f^2 - g^2 - h^2\right)^2 + 4(a\,f + b\,g + c\,h)^2$$

podemos deducir su módulo. Cuando la primera terna de componentes o la segunda vale cero, el módulo se reduce a la longitud de un “vector axial”[9] en sentido clásico:

$$\left|\, a\,e_{01} + b\,e_{02} + c\,e_{03} \right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\left|\, f\,e_{23} + g\,e_{31} + h\,e_{12} \right| = \sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$$

No obstante, si están presentes ambas componentes, el módulo, que es la raíz cuarta del determinante, viene a ser equivalente a la raíz cuadrada del módulo de un número complejo formado por los dos invariantes del campo electromagnético[10].

Veamos ahora el determinante de un vector de tercer grado formado por unidades de volumen y área-tiempo:

---

[8] Ejemplos físicos de este tipo de magnitudes los tenemos en el campo electromagnético y en el momento angular (juntamente con el momento temporal).

[9] Nombre dado a cantidades (como por ejemplo el elemento de área, el momento angular o el campo magnético) que se obtienen en análisis vectorial como producto vectorial de dos vectores “polares” y que son en realidad bivectores.

[10] Véase Landau-Lifshitz, *Curso abreviado de física teórica*, ed. Mir (1971), §51, p. 172.

$$\det\left(a\,e_{123}+b\,e_{023}+c\,e_{031}+d\,e_{012}\right)=\begin{vmatrix}-b & 0 & a+d & -c\\ 0 & -b & -c & a-d\\ -a+d & -c & b & 0\\ -c & -a-d & 0 & b\end{vmatrix}$$
$$=\left(-a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$

y encontramos que es igual a la potencia cuarta de su módulo como vector de espacio-tiempo:

$$\left|a\,e_{123}+b\,e_{023}+c\,e_{031}+d\,e_{012}\right|=\sqrt{-a^2+b^2+c^2+d^2}$$

Por último, puede ser interesante considerar el módulo de un elemento mixto, que contenga diferentes grados del álgebra. Por ejemplo un vector de primer grado junto con un vector de tercer grado:

$$\det\left(a\,e_0+b\,e_1+c\,e_2+d\,e_3+f\,e_{123}+g\,e_{023}+h\,e_{031}+j\,e_{012}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}c-g & a+d & f+j & -b-h\\ d-a & -c-g & b-h & f-j\\ j-f & b-h & c+g & d-a\\ -b-h & -f-j & a+d & g-c\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a^2-b^2-c^2-d^2-f^2+g^2+h^2+j^2\right)^2+4\left(a\,f-b\,g-c\,h-d\,j\right)^2$$

Con estos cálculos vamos viendo como el teorema de Pitágoras, sea en su versión euclidiana o pseudoeuclidiana, se va desmoronando poco a poco. Si en la expresión anterior sólo dejamos componentes espaciales sin el tiempo obtenemos:

$$\det\left(b\,e_1+c\,e_2+d\,e_3+f\,e_{123}\right)=\left(b^2+c^2+d^2+f^2\right)^2$$

Y si dejamos las temporales obtenemos:

$$\det\left(a\,e_0+g\,e_{023}+h\,e_{031}+j\,e_{012}\right)=\left(a^2+g^2+h^2+j^2\right)^2$$

¿Qué sucede si añadimos la identidad a un vector?

$$\det\left(a+b\,e_0+c\,e_1+d\,e_2+f\,e_3\right)=\left(a^2+b^2-c^2-d^2-f^2\right)^2$$

Pues que ¡los escalares también cumplen el teorema de Pitágoras!

Y si calculamos un elemento más complejo del álgebra obtenemos:

$$\det\left(a+b\,e_0+c\,e_1+d\,e_2+f\,e_3+g\,e_{01}+h\,e_{02}+j\,e_{03}\right)=$$

$$= \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - f^2 + g^2 + h^2 + j^2\right)^2 + 4\,(c\,g + d\,h + f\,j)^2 +$$

$$+ 4\left(a^2 + b^2\right)\left(g^2 + h^2 + j^2\right)$$

donde va surgiendo un nuevo concepto de perpendicularidad. Es decir, los términos que se apartan del teorema de Pitágoras son debidos al hecho de que, aunque las componentes son algebraicamente ortogonales, las direcciones espaciales coinciden, lo que se refleja en una especie de producto escalar añadido.

Subálgebras

Las 16 unidades del álgebra geométrica junto con su producto forman una estructura de grupo continuo. Si prescindimos de los signos, entonces tenemos un grupo finito abeliano de 16 elementos. Como es sabido, el número de elementos de cualquier subgrupo es siempre un divisor del número de elementos del grupo original. Lo que quiere decir que la dimensión de las subálgebras siempre es un divisor de 16, es decir, 2, 4 u 8 sin tener en cuenta los divisores triviales.

Por lo que respecta a las subálgebras de dimensión 2, encontramos lógicamente los números complejos (por ejemplo $\langle 1, e_{23}\rangle$) y los hiperbólicos (por ejemplo $\langle 1, e_1\rangle$). Estas álgebras ya fueron expuestas con detalle en el *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra* y remito al lector interesado a que lo consulte[11].

Por lo que respecta a subálgebras de dimensión 4, en la deducción de la base del álgebra geométrica del espacio-tiempo nos han ido apareciendo ternas de matrices que son cerradas respecto de la multiplicación, es decir cuyo producto mutuo es otra matriz del conjunto. Juntamente con la identidad nos proporcionan las subálgebras del espacio-tiempo. Por ejemplo las matrices $\{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$:

$$\mathbf{B\,C} = \mathbf{C\,B} = \mathbf{D} \qquad \mathbf{C\,D} = \mathbf{D\,C} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{D\,B} = \mathbf{B\,D} = \mathbf{C}$$

generan la subálgebra $\langle 1, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\rangle = \langle 1, e_2, e_{03}, -e_{023}\rangle$, que llamaré los *números bihiperbólicos*. La misma subálgebra generan las ternas $\{\mathbf{E}, \mathbf{I}, \mathbf{M}\}$ y $\{\mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{O}\}$. Su tabla de multiplicación es:

	1	e_2	e_{03}	e_{023}
1	1	e_2	e_{03}	e_{023}
e_2	e_2	1	$-e_{023}$	$-e_{03}$
e_{03}	e_{03}	$-e_{023}$	1	$-e_2$
e_{023}	e_{023}	$-e_{03}$	$-e_2$	1

Vamos a ver cuál es el determinante de un número bihiperbólico:

[11] R. González Calvet, *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra* (2007), pp. 13-26 y pp. 139-154.

$$\det(a + b\, e_2 + c\, e_{03} + d\, e_{023}) = \begin{vmatrix} a+b+c-d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b-c-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c+d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c+d \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right) - \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2 - 8abcd$$

Obsérvese que cualquier sección plana es un plano hiperbólico:

$$\det(a + b\, e_2) = \left(a^2 - b^2\right)^2 \qquad \det(a + c\, e_{03}) = \left(a^2 - c^2\right)^2$$

$$\det(b\, e_2 + c\, e_{03}) = \left(b^2 - c^2\right)^2 \qquad \text{etc.}$$

La terna de unidades anticonmutativas $\{\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{P}\}$ (o igualmente $\{\mathbf{G}, \mathbf{L}, \mathbf{N}\}$). genera la subálgebra $\langle 1, \mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{P}\rangle = \langle 1, e_{23}, e_{31}, e_{12}\rangle$ bien conocida y descubierta por W. R. Hamilton, los cuaterniones. Recordemos, por el resultado del ejercicio 1.6, que su determinante es siempre positivo:

$$\det(a + b\, e_{23} + c\, e_{31} + d\, e_{12}) = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2$$

Los cuaterniones representan el producto directo de los números complejos por sí mismos y, contrariamente a lo que pueda parecer y pareció a Hamilton durante mucho tiempo, el resultado es un álgebra no conmutativa. Es un álgebra de división pues todos los elementos no nulos tienen determinante positivo.

El conjunto de elementos anticonmutativos $\{\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{F}\}$ genera una subálgebra no conmutativa $\langle 1, \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{F}\rangle = \langle 1, e_2, e_3, e_{23}\rangle$ que llamaré los *tetraniones*, pues difiere de los cuaterniones ya que las dos primeras unidades tienen cuadrado positivo y la última cuadrado negativo. Su tabla de multiplicar es:

	1	e_2	e_3	e_{23}
1	1	e_2	e_3	e_{23}
e_2	e_2	1	e_{23}	e_3
e_3	e_3	$-e_{23}$	1	$-e_2$
e_{23}	e_{23}	$-e_3$	e_2	-1

Su determinante es:

$$\det(a + b\, e_2 + c\, e_3 + d\, e_{23}) = \begin{vmatrix} a+b & c+d & 0 & 0 \\ c-d & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & c+d \\ 0 & 0 & c-d & a-b \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2 - c^2 + d^2\right)^2$$

con lo que su módulo es:

$$|a + b\ e_2 + c\ e_3 + d\ e_{23}| = \sqrt{|a^2 - b^2 - c^2 + d^2|}$$

Por último las matrices $\{\mathbf{O}, \mathbf{F}, \mathbf{L}\}$ generan la subálgebra $\langle 1, \mathbf{O}, \mathbf{F}, \mathbf{L}\rangle = \langle 1, -e_1, e_{23}, e_{123}\rangle$ que llamaré los *números cuárticos o de Segre*[12] pues es conmutativa:

	1	e_1	e_{23}	e_{123}
1	1	e_1	e_{23}	e_{123}
e_1	e_1	1	e_{123}	e_{23}
e_{23}	e_{23}	e_{123}	-1	$-e_1$
e_{123}	e_{123}	e_{23}	$-e_1$	-1

Los números cuárticos son un producto directo de los números hiperbólicos por los números complejos. Veamos que su determinante siempre es positivo y su módulo siempre real:

$$\det(a + b\ e_1 + c\ e_{23} + d\ e_{123}) = \begin{vmatrix} a & c & d & -b \\ -c & a & b & d \\ d & b & a & c \\ -b & d & -c & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4\,(a\,d - b\,c)^2$$

$$|\,z\,| = |\,a + b\,e_1 + c\,e_{23} + d\,e_{123}\,| = \sqrt[4]{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 + 4\,(a\,d - b\,c)^2}$$

No obstante, existen divisores de cero, elementos no nulos con determinante nulo.

Por último tenemos subálgebras de dimensión 8, siendo la principal la subálgebra par $\langle 1, e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{01}, e_{02}, e_{03}, e_{0123}\rangle$ de toda el álgebra del espacio-tiempo, cuya tabla de multiplicación dejo como ejercicio al lector. El determinante de un elemento genérico de esta subálgebra es:

$$\det(a + b\ e_{23} + c\ e_{31} + d\ e_{12} + f\ e_{01} + g\ e_{02} + h\ e_{03} + l\ e_{0123})$$

$$= \begin{vmatrix} a+h & b-g & c+f & d+l \\ -b-g & a-h & d-l & -c+f \\ -c+f & -d+l & a-h & b+g \\ -d-l & c+f & -b+g & a+h \end{vmatrix}$$

---

[12] En F. Catón, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catón, E. Nichelatti, P. Zampetti, *The Mathematics of Minkowski Space-Time*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser (2008) p. 171, se les llama *cuaterniones de Segre* por haberlos descrito Corrado Segre en *Math. Ann.* **40** (1892) p. 413. La correspondencia con los símbolos de los autores es: $i = e_{23}$, $j = -e_1$, $k = e_{123}$.

$$= \left(a^2 + b + c^2 + d^2 - f^2 - g^2 - h^2 - l^2\right) + 4\left(b\ f + c\ g + d\ h - a\ l\right)^2$$

La determinación de la otra subálgebra de dimensión 8 se deja como ejercicio para el lector.

Ejercicios

2.1 Calcúlese la tabla de multiplicación del subálgebra par del espacio-tiempo, la generada por $\langle 1, e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{01}, e_{02}, e_{03}, e_{0123} \rangle$.

2.2 El álgebra de matrices reales $\mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbf{R})$ puede ser generada también por dos unidades geométricas de cuadrado positivo y dos de cuadrado negativo ($Cl_{2,2}$). Determínense estas unidades.

2.3 Una vez determinado en el ejercicio anterior el espacio vectorial generador de $Cl_{2,2}$, determínese la subálgebra par correspondiente, que contiene los elementos de grado par.

2.4 Los números bihiperbólicos no son un álgebra de división. Encuéntrese, pues, algún divisor de cero.

2.5 Los bivectores de espacio-tiempo forman el subespacio $\langle e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{01}, e_{02}, e_{03} \rangle$ de dimensión 6. Estudiar si las seis unidades geométricas son perpendiculares y/o ortogonales (véase definiciones en p. 3).

2.6 Los bicuaterniones son cuaterniones con componentes complejas en lugar de reales. Identifíquense las componentes de los bicuaterniones con las componentes de la subálgebra par del espacio-tiempo estudiada en el ejercicio 2.1.