3. TRANSFORMACIONES DE VECTORES

Las transformaciones de vectores son aplicaciones del espacio-tiempo en sí mismo. Son un subconjunto de las transformaciones más generales que aplican toda el álgebra geométrica en sí misma. Para las aplicaciones de la vida cotidiana es suficiente estudiar las transformaciones de vectores. Para aplicaciones más avanzadas relacionadas con la Mecánica Cuántica hay que tener en cuenta las transformaciones generales. En este capítulo veremos diferentes clases de transformaciones, siendo las más importantes las isometrías.

Isometrías

Defino las *isometrías* del álgebra geométrica como transformaciones de semejanza de las matrices. Una matriz **M** es *semejante* a $\mathbf{M'}$ si existe una matriz **Q** no singular tal que:

$$\mathbf{M'} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\,\mathbf{Q} \qquad \det\mathbf{Q} \neq 0$$

Las transformaciones de semejanza preservan el polinomio característico de cualquier matriz, es decir, se cumple:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda) \equiv \det(\mathbf{M'} - \lambda) \qquad \Rightarrow \qquad \det\mathbf{M} = \det\mathbf{M'}$$

Puesto que $\det\mathbf{M}$ es el término independiente del polinomio característico, las isometrías preservan el determinante y, por lo tanto, el módulo de cualquier elemento del álgebra. Por ejemplo si **M** es un vector, las isometrías preservarán su longitud. Por eso dos matrices **M** y $\mathbf{M'}$ semejantes también son *isométricas* y a la inversa.

La transformación de semejanza es una relación de equivalencia y clasifica los elementos del álgebra geométrica en clases de equivalencia. Puesto que el determinante es un número real habrá un infinito continuo de clases de equivalencia, lo que no tiene especial interés, pero sí podemos preguntarnos cómo quedan clasificadas las unidades geométricas. Para ello podemos calcular su polinomio característico y el resultado es que todas las unidades de cuadrado +1 (excepto la identidad) tienen el mismo polinomio característico:

$$\begin{aligned}\det(e_1 - \lambda) &= \det(e_2 - \lambda) = \det(e_3 - \lambda) = \det(e_{01} - \lambda) = \det(e_{02} - \lambda) = \det(e_{03} - \lambda)\\ &= \det(e_{023} - \lambda) = \det(e_{031} - \lambda) = \det(e_{012} - \lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2\end{aligned}$$

mientras que las de cuadrado –1 tienen otro distinto:

$$\begin{aligned}\det(e_0 - \lambda) &= \det(e_{23} - \lambda) = \det(e_{31} - \lambda) = \det(e_{12} - \lambda) = \det(e_{123} - \lambda) = \det(e_{0123} - \lambda)\\ &= (\lambda^2 + 1)^2\end{aligned}$$

Como comparación el polinomio característico de la identidad es:

$$\det(1 - \lambda) = (\lambda - 1)^4$$

La conclusión es que la identidad no es equivalente a las unidades geométricas de cuadrado +1 y éstas tampoco no son equivalentes a las unidades de cuadrado –1. No obstante, ello no quiere decir que todas las unidades de un tipo sean equivalentes entre sí porque tener el mismo polinomio característico no garantiza automáticamente que las matrices sean semejantes[1]. Dos matrices cuadradas son semejantes si y sólo si tienen los mismos factores invariantes[2] o si y sólo si tienen los mismos vectores propios. Pues bien, se comprueba que las seis unidades de cuadrado –1 son equivalentes entre sí.

$$e_{23} \sim e_{31} \sim e_{12} \sim e_0 \sim e_{123} \sim e_{0123}$$

Y también son equivalentes entre sí las nueve unidades de cuadrado +1 quedando lógicamente la identidad aparte[3]:

$$e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_{01} \sim e_{02} \sim e_{03} \sim e_{023} \sim e_{031} \sim e_{012}$$

Tal vez la forma más práctica de demostrarlo es encontrando una transformación de semejanza que las relacione. Por ejemplo e_1 es equivalente a e_2 porque si definimos el cuaternión:

$$q = \cos\frac{\pi}{4} + e_{12}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + e_{12}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

entonces tenemos que:

$$q^{-1} e_1\, q = \frac{1}{2}\left(1 - e_{12}\right) e_1 \left(1 + e_{12}\right) = e_2$$

Escribámoslo en forma matricial:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad q^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q^{-1} e_1\, q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = e_2$$

Las isometrías no sólo conservan el determinante sino también el polinomio característico entero. Así pues, todos los coeficientes del polinomio característico son

[1] Véase Joel N. Franklin, *Matrix Theory*, Dover (N.Y., 2000), p. 77.
[2] Véase el teorema 8-1de Sam Perlis, *Theory of Matrices*, Dover (N.Y., 1991), p. 143.
[3] Sorprenderá al lector que unidades medidas en metros, en metros cuadrados y las tres últimas en metros cúbicos sean todas equivalentes, pero la mecánica cuántica resuelve este problema, puesto que cada partícula tiene asociada una longitud de onda que nos iguala la dimensionalidad de todas las unidades.

invariantes bajo isometrías y, en consecuencia también cualquier combinación que hagamos con ellos, que pueden tener un significado físico directo. Como ejemplo, veamos cuál es el polinomio característico de un bivector de espacio-tiempo:

$$\det\left(a\,e_{01}+b\,e_{02}+c\,e_{03}+f\,e_{23}+g\,e_{31}+h\,e_{12}-\lambda\right)=\begin{vmatrix} c-\lambda & -b+f & a+g & h \\ -b-f & -c-\lambda & h & a-g \\ a-g & -h & -c-\lambda & b+f \\ -h & a+g & b-f & c-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4-2\lambda^2\left(a^2+b^2+c^2-f^2-g^2-h^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2-f^2-g^2-h^2\right)^2+4\left(a\,f+b\,g+c\,h\right)^2$$

Puesto que todos los coeficientes del polinomio característico son invariantes bajo isometrías, tenemos que $a^2+b^2+c^2-f^2-g^2-h^2$ y también $a\,f+b\,g+c\,h$ lo son por separado[4], aunque sólo el determinante es el módulo del bivector.

Planos euclidianos e hiperbólicos (pseudoeuclidianos)

Antes de concretar ciertos tipos de isometrías conviene estudiar la tipología de los diversos planos vectoriales del álgebra geométrica. Puesto que hay un total de 16 unidades geométricas, el número de planos distintos que éstas forman viene dado por la cantidad de diferentes posibles parejas que es el número combinatorio $C_2^{16}=16\times 15/2=120$ planos. Cada uno de estos planos es (tal como se demuestra más abajo), o bien euclidiano o bien hiperbólico (pseudoeuclidiano). Estos dos planos fueron estudiados en profundidad en el *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra*, a donde remito el lector.

Como se ha visto en el capítulo anterior, el determinante de un elemento general del álgebra tiene una expresión muy compleja, lo que quiere decir que no tiene sentido ya hablar de un álgebra euclidiana o pseudoeuclidiana, y el lector tiene que tener presente que este carácter es un atributo exclusivo de los planos. Por ejemplo el cuadrado del elemento de longitud en un espacio con signatura +, +, – es:

$$ds^2=dx^2+dy^2-dz^2$$

El plano *xy* es euclidiano mientras que los planos *xz* e *yz* son hiperbólicos. Por lo tanto, un plano es euclidiano o hiperbólico según que, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, los cuadrados tengan el mismo signo (no necesariamente positivo) o signo opuesto en el cuadrado del elemento de longitud. Como ejemplo de ello veamos algunos determinantes de combinaciones lineales de pares de unidades geométricas. Empecemos con el caso clásico:

---

[4] Puesto que el campo electromagnético es un bivector, estos invariantes corresponden a los conocidos invariantes del campo electromagnético (véase L. Landau, E. Lifshitz, *Curso abreviado de física teórica*, vol. 1, *Mecánica y electrodinámica*, ed. Mir [Moscú, 1971] p. 172).

$$\det(a\,e_1 + b\,e_2) = \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & -a \\ 0 & -b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)^2 \qquad \text{euclidiano}$$

Ahora veamos un plano de espacio-tiempo:

$$\det(a\,e_0 + b\,e_1) = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & -b \\ -a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & -a \\ -b & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^2 \qquad \text{hiperbólico}$$

Hemos visto que $e_0 \sim e_{23}$ y que las dos unidades son de cuadrado –1. ¿Es el plano euclidiano? Pues no:

$$\det(a\,e_0 + b\,e_{23}) = \begin{vmatrix} 0 & a+b & 0 & 0 \\ -a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^2 \quad \text{hiperbólico}$$

Hemos visto también que $e_2 \sim e_{02}$ y que ambas unidades tienen la misma dirección espacial, y sin embargo forman un plano euclidiano:

$$\det(a\,e_2 + b\,e_{02}) = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & -a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)^2 \quad \text{euclidiano}$$

Y qué decir de los planos cuaterniónicos como:

$$\det(a + b\,e_{23}) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)^2 \qquad \text{euclidiano}$$

que es isomorfo al plano complejo.

Hemos visto que $e_0 \sim e_{123}$. ¿Cómo será este plano?

$$\det(a\,e_0 + b\,e_{123}) = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & b \\ -b & 0 & 0 & -a \\ 0 & -b & a & 0 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)^2 \quad \text{euclidiano}$$

Y por último, ¿cómo es el plano formado por la identidad y el pseudoescalar, el elemento de hipervolumen?

$$\det(a + b\, e_{0123}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 + b^2\right)^2 \qquad \text{euclidiano}$$

Lo que se va viendo aquí es que las diferentes unidades geométricas son ortogonales a pares. Afirmamos, pues, que la base del álgebra geométrica que estamos utilizando es *ortonormal*, es decir, que todas las unidades tienen módulo 1 y son ortogonales a pares. La demostración de que tienen módulo unidad es sencilla. Toda unidad v del álgebra geométrica es un producto finito de las unidades $\{u_i\}$ del espacio vectorial generador:

$$v = \prod_i u_i \qquad \Rightarrow \qquad \det v = \prod_i \det u_i = 1 \quad \Rightarrow \qquad |v| = 1$$

y su determinante es igual a 1 puesto que $\det u_i = 1$. La demostración de que son ortogonales a pares es un poco más extensa. Consideremos una combinación lineal de dos unidades **A** y **B**:

$$\mathbf{C} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$$

$$\mathbf{C}^2 = a^2\mathbf{A}^2 + b^2\mathbf{B}^2 + ab(\mathbf{AB} + \mathbf{BA})$$

Supongamos que **A** y **B** anticonmutan. Entonces si $\chi_A = \mathbf{A}^2$ y $\chi_B = \mathbf{B}^2$ que valen +1 ó –1:

$$\mathbf{C}^2 = a^2\chi_A + b^2\chi_B \quad \Rightarrow \qquad \det \mathbf{C}^2 = \left(a^2\chi_A + b^2\chi_B\right)^4$$

$$\Rightarrow \qquad \det \mathbf{C} = \left(a^2\chi_A + b^2\chi_B\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{C}| = \sqrt{\left|a^2\chi_A + b^2\chi_B\right|}$$

Por lo tanto, son ortogonales.

Supongamos que **A** y **B** conmutan (y son distintas). Entonces:

$$\mathbf{C}^2 = a^2\chi_A + b^2\chi_B + 2ab\mathbf{D}$$

donde $\mathbf{D} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ es una matriz de cuadrado necesariamente igual a ± 1 distinta de la identidad:

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = \chi_A\chi_B$$

Entonces:

$$\mathbf{C}^2 = 2ab\left(\frac{a^2\chi_A + b^2\chi_B}{2ab} + \mathbf{D}\right)$$

$$\det \mathbf{C}^2 = 16a^4b^4 \det\left(\frac{a^2\chi_A + b^2\chi_B}{2ab} + \mathbf{D}\right)$$

El segundo determinante es el polinomio característico donde se ha sustituido $\lambda = -\dfrac{a^2\chi_A + b^2\chi_B}{2ab}$. Tenemos dos casos. Primer caso, $\chi_A = \chi_B$ y $\mathbf{D}^2 = 1$, entonces $\det(\mathbf{D} - \lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2$ lo que nos lleva a:

$$\det \mathbf{C}^2 = 16a^4b^4\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2\left(1 + \frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 = \left(a^2 - b^2\right)^4$$

Por lo que:

$$\det \mathbf{C} = \left(a^2 - b^2\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{C}| = \sqrt{\left|a^2 - b^2\right|}$$

Segundo caso $\chi_A = -\chi_B$ y $\mathbf{D}^2 = -1$, entonces $\det(\mathbf{D} - \lambda) = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$ lo que nos lleva a:

$$\det \mathbf{C}^2 = 16a^4b^4\left(\left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^2 + 1\right)^2 = \left(a^2 + b^2\right)^4$$

$$\det \mathbf{C} = \left(a^2 + b^2\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\mathbf{C}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es decir, en los dos casos las unidades son ortogonales. Además, de esta demostración obtenemos el siguiente cuadro sinóptico:

plano	**A B = B A**	**A B = −B A**
$\chi_A = \chi_B$	hiperbólico	euclidiano
$\chi_A = -\chi_B$	euclidiano	hiperbólico

Podemos resumir la tabla anterior en la siguiente conclusión: Si la unidad de área del plano del álgebra geométrica tiene cuadrado −1, el plano es euclidiano. Si la unidad de área del plano tiene cuadrado +1, el plano es hiperbólico.

Giros

Vamos a ver cómo son las isometrías restringidas a un plano vectorial del álgebra geométrica. Tenemos dos casos que hay que diferenciar: las dos unidades o bien conmutan o bien anticonmutan.

Para un plano generado por dos unidades u_1 y u_2 que conmutan, el operador z de la isometría debería ser un elemento del álgebra geométrica generada por estas dos unidades. Sin embargo, debido a que u_1 y u_2 conmutan, también conmutan con $n = u_1 u_2$ (y toda el álgebra geométrica restringida a este plano es conmutativa), lo que produce la automática cancelación de los factores izquierdo y derecho (el operador y su inverso) cualesquiera que sean y deja invariante el vector que deseábamos transformar:

$$v = v_1 u_1 + v_2 u_2 \qquad v_1, v_2 \in \mathbf{R}$$

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 \quad \Rightarrow \quad v' = z^{-1} v\, z = z^{-1} z\, v = v \qquad \forall z \in Cl(u_1, u_2)$$

Por lo tanto, una isometría del álgebra geométrica de un plano generado por dos unidades conmutativas es simplemente una identidad, lo que no sucede si las unidades anticonmutan[5]. Así pues, defino como *giro* una isometría de un plano del álgebra geométrica cuyas unidades anticonmuten. Los giros mantienen la orientación de la base.

Tenemos dos tipos de giros:

1) Giro circular. Las dos unidades tienen el mismo cuadrado y se cumple el teorema de Pitágoras (el plano es euclidiano). Las dos unidades son equivalentes y pueden transformarse la una en la otra. El giro es, pues, circular.
2) Giro hiperbólico. Los cuadrados de las dos unidades tienen distinto signo y el plano es hiperbólico. No se puede transformar mediante una isometría una unidad en la otra unidad. El giro hiperbólico del espacio-tiempo es lo que se llama en Física una *transformación de Lorentz*.

Los giros son un tema bien conocido y fue ampliamente tratado en el *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra*. Vamos a recordar los giros circulares. Cualquier elemento v se transforma en v' mediante la expresión:

$$v' = z^{-1} v\, z$$

donde z es un número complejo (del álgebra geométrica generada por este plano euclidiano) no necesariamente de módulo unidad, aunque habitualmente se utiliza:

$$z = \cos\frac{\varphi}{2} + n \sin\frac{\varphi}{2}$$

Aquí $n = u_1 u_2$ es la unidad de área del plano euclidiano en que se está llevando a cabo el giro y φ es el ángulo del giro circular. Puesto que las dos unidades u_1 y u_2 del plano tienen el mismo cuadrado, el cuadrado de n es necesariamente igual a -1:

$$n^2 = u_1\, u_2\, u_1\, u_2 = -u_1^2\, u_2^2 = -1$$

El resultado de aplicar este operador es:

---

[5] Como ya se estudió en el *Treatise*, el álgebra geométrica del plano se subdivide en un plano vectorial (que puede ser euclidiano o hiperbólico) y un plano numérico (que es respectivamente complejo o hiperbólico). Las unidades del plano vectorial anticonmutan mientras que las del plano numérico conmutan. Las rotaciones están definidas sólo para los planos vectoriales, pues dejan invariantes los números complejos o hiperbólicos según sea el caso.

$$v' = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - n\sin\frac{\varphi}{2}\right)(v_1 u_1 + v_2 u_2)\left(\cos\frac{\varphi}{2} + n\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= (v_1 \cos\varphi - \chi_2 v_2 \sin\varphi)\, u_1 + (v_2 \cos\varphi + \chi_1 v_1 \sin\varphi)\, u_2$$

En forma matricial el giro se escribe como:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\chi_2 \sin\varphi \\ \chi_1 \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Cuando lo aplicamos a vectores del plano vectorial $\langle e_1, e_2 \rangle$, tenemos $\chi_1 = \chi_2 = 1$ y φ es el ángulo de giro en sentido antihorario (figura 3.1):

$$v' = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - e_{12}\sin\frac{\varphi}{2}\right)(v_1 e_1 + v_2 e_2)\left(\cos\frac{\varphi}{2} + e_{12}\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= (v_1 \cos\varphi - v_2 \sin\varphi) e_1 + (v_2 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) e_2$$

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

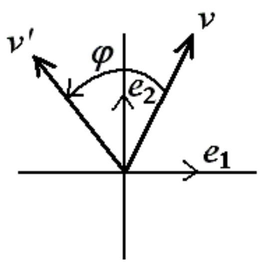


Figura 3.1

Pero si se aplica a un plano en que $\chi_1 = \chi_2 = -1$, entonces φ es el ángulo de giro en sentido horario, contrario al sentido positivo de los ángulos. Por ejemplo en el plano bivectorial $\langle e_{12}, e_{23} \rangle$, incluido en los cuaterniones, tenemos que su unidad de área es $e_{12} e_{23} = e_{13}$, por lo que:

$$w' = \left(\cos\frac{\varphi}{2} - e_{13}\sin\frac{\varphi}{2}\right)(w_{12} e_{12} + w_{23} e_{23})\left(\cos\frac{\varphi}{2} + e_{13}\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= e_{12}(w_{12} \cos\varphi + w_{23} \sin\varphi) + e_{23}(w_{23} \cos\varphi - w_{12} \sin\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} w'_{12} \\ w'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{23} \end{pmatrix}$$

Un giro en un ángulo recto que nos lleve de e_1 a e_3 corresponde a $\varphi = \pi / 2$ con lo que obtendríamos:

$$\begin{pmatrix} w'_{12} \\ w'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{23} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w'_{12} = w_{23} \\ w'_{23} = -w_{12} \end{cases}$$

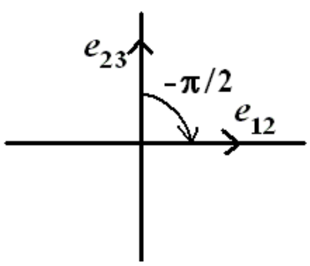


Figura 3.2

lo que corresponde a un giro con ángulo $\varphi = -\pi/2$ en el plano $\langle e_{12}, e_{23} \rangle$ (figura 3.2). No obstante, véase que tiene todo el sentido geométrico si lo analizamos en el espacio $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Efectivamente el bivector e_{12} se transforma en el bivector $e_{32} = -e_{23}$, pues le cambia la orientación (figura 3.3), y el bivector e_{23} se transforma en el bivector e_{12}, pues mantiene la orientación.

Veamos ahora los giros hiperbólicos. La expresión general de un giro hiperbólico es:

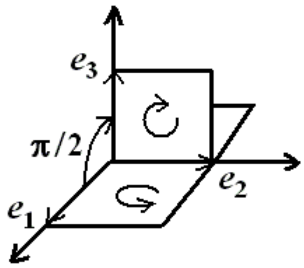


Figura 3.3

$$v' = t^{-1} v\, t$$

donde t es un número hiperbólico (del álgebra geométrica generada por este plano hiperbólico) no necesariamente de módulo unidad, aunque habitualmente se utiliza:

$$t = \cosh\frac{\psi}{2} + m \sinh\frac{\psi}{2}$$

Aquí m representa la unidad de área del plano hiperbólico en que se está llevando a cabo el giro y ψ el argumento del giro hiperbólico. Puesto que las dos unidades u_1 y u_2 del plano tienen cuadrados de distinto signo y $m = u_1\, u_2$, tenemos que su cuadrado es necesariamente igual a +1:

$$m^2 = u_1\, u_2\, u_1\, u_2 = -u_1^2\, u_2^2 = +1$$

El resultado de aplicar este operador es:

$$v' = \left(\cosh\frac{\psi}{2} - m \sinh\frac{\psi}{2}\right)(v_1 u_1 + v_2 u_2)\left(\cosh\frac{\psi}{2} + m \sinh\frac{\psi}{2}\right)$$

$$= (v_1 \cosh\psi - \chi_2 v_2 \sinh\psi)\, u_1 + (v_2 \cosh\psi + \chi_1 v_1 \sinh\psi)\, u_2$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\chi_2 \sinh\psi \\ \chi_1 \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Si $\chi_1 = 1$ y $\chi_2 = -1$ entonces tenemos un giro hiperbólico de argumento ψ en el sentido positivo de argumentos hiperbólicos tal como se definió en el *Treatise* (p. 157):

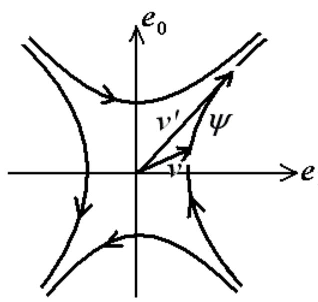


Figura 3.4

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

La transformación de Lorentz de la relatividad es un giro hiperbólico en el plano $\langle e_1, e_0 \rangle$, donde colocamos la unidad espacial e_1 en el eje horizontal y la unidad temporal e_0 en el eje vertical (convenio de Feynman[6]). Por tanto tenemos $\chi_1 = 1$ y $\chi_0 = -1$, con lo que el giro queda:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, ψ es el argumento del giro hiperbólico en sentido positivo de argumentos, el indicado en la figura 3.4.

Rotaciones

Las *rotaciones* son giros de planos del espacio tridimensional euclídeo. Podemos encontrar en la bibliografía expresiones específicas que se aplican, por ejemplo, a vectores[7] pero que no son aplicables a cualquier elemento del álgebra. La expresión general para un giro o rotación en el espacio euclídeo (espacio común) es:

$$v' = q^{-1} v\, q \qquad\qquad q \in \mathbf{H}$$

q puede ser cualquier cuaternión que contenga el plano de rotación (es decir el plano perpendicular al eje de rotación) aunque comúnmente se utiliza un cuaternión unitario:

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + n\,\sin\frac{\theta}{2}$$

donde n es el bivector unitario que representa el plano de rotación y θ es el ángulo de giro en este plano. De esta guisa la expresión para una rotación queda así:

$$v' = \left(\cos\frac{\theta}{2} - n\,\sin\frac{\theta}{2}\right) v \left(\cos\frac{\theta}{2} + n\,\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

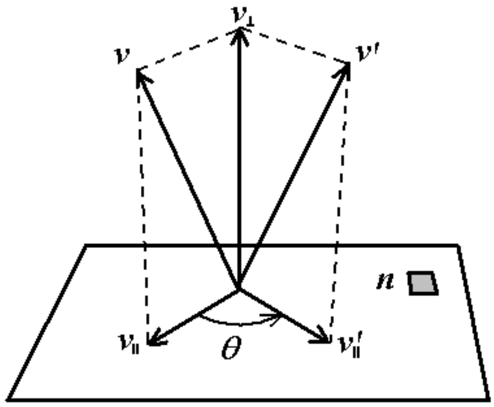


Figura 3.5

La expresión como transformación de semejanza es totalmente general y se aplica a cualquier elemento del álgebra como, por ejemplo, los bivectores. De hecho, durante mucho tiempo se han descrito las rotaciones exclusivamente con cuaterniones[8] sin tener en cuenta la existencia del resto del álgebra geométrica.

---

[6] Este es el sistema de ejes utilizado por Richard P. Feynman en sus famosos diagramas (véase su libro *Electrodinámica cuántica*, Alianza Universidad [Madrid, 1988] p. 91-92).

[7] Por ejemplo un giro en el plano vectorial euclidiano puede escribirse $v' = v\,z$, donde v es el vector original y v' el vector girado, y $z = \cos\varphi + e_{12}\sin\varphi$, donde φ es el ángulo de giro (véase *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra*, p. 27).

[8] Un clásico de las rotaciones es el libro de Jack B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton Univ. Press (1999).

Descompongamos el vector v en dos componentes, una $v_{\|}$ contenida en el plano de rotación y otra $v_{\perp}$ perpendicular que tiene la dirección del eje de rotación:

$$v = v_{\|} + v_{\perp}$$

Mientras $v_{\perp}$ conmuta con *n* (por ejemplo $e_1\, e_{23} = e_{23}\, e_1$), $v_{\|}$ anticonmuta (por ejemplo $e_1\, e_{12} = -e_{12}\, e_1$). Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} v' &= \left(\cos\frac{\theta}{2} - n\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + n\sin\frac{\theta}{2}\right) \\ &= v_{\perp} + v_{\|}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2n\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= v_{\perp} + v_{\|}\left(\cos\theta + n\sin\theta\right) \end{aligned}$$

donde vemos como a la componente coplanar del vector se le está aplicando un giro en el plano dado por *n* con ángulo φ (figura 3.5):

$$v'_{\|} = v_{\|}\left(\cos\theta + n\sin\theta\right)$$

Al consultar la bibliografía sobre rotaciones en el espacio descritas con cuaterniones debe irse con cuidado pues a menudo se encontrará:

$$v' = q\, v\, q^{-1} \quad \text{con} \quad q = a + b\, i + c\, j + d\, k$$

Obsérvese que se está utilizando la notación *i*, *j*, *k* de Hamilton y recuérdese del capítulo anterior que $i = -e_{23}$, $j = -e_{31}$, $k = -e_{12}$ lo que es exactamente lo mismo que escribir:

$$v' = q^{-1}\, v\, q \quad \text{con} \quad q = a + b\, e_{23} + c\, e_{31} + d\, e_{12}$$

Este último formato es el recomendable y describe correctamente las rotaciones tanto de vectores como de bivectores (planos) o cuaterniones o cualquier otro elemento del álgebra.

La composición de rotaciones en el espacio viene dada simplemente por la aplicación sucesiva de esta expresión:

$$\begin{cases} v' = q^{-1}\, v\, q \\ v'' = r^{-1}\, v'\, r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v'' = r^{-1} q^{-1}\, v'\, q\, r \qquad q, r \in \mathbf{H}$$

Es decir el operador correspondiente a la composición de dos rotaciones viene dado por un cuaternión que es el producto de los dos anteriores:

$$v'' = s^{-1} v\, s \qquad s = q\, r \in \mathbf{H}$$

Por lo tanto, el resultado de componer dos rotaciones es otra rotación, cuya dirección y ángulo pueden ser determinados utilizando cuaterniones unitarios:

$$\cos\frac{\varphi_s}{2} + n_s \sin\frac{\varphi_s}{2} = \left(\cos\frac{\varphi_q}{2} + n_q \sin\frac{\varphi_q}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi_r}{2} + n_r \sin\frac{\varphi_r}{2}\right) \qquad \text{con} \quad n_i^2 = -1$$

La descripción de las rotaciones con cuaterniones se considera el método óptimo.

Transformaciones de Lorentz

Los giros hiperbólicos son isometrías restringidas a un plano hiperbólico de dos unidades que anticonmuten. Si este plano está generado por e_0 y un vector espacial entonces se le llama *transformación de Lorentz*. Podemos escribir la isometría como:

$$v' = \left(\cosh\frac{\psi}{2} - e_{01}\sinh\frac{\psi}{2}\right)(v_0 e_0 + v_1 e_1)\left(\cosh\frac{\psi}{2} + e_{01}\sinh\frac{\psi}{2}\right)$$

$$= (v_0\cosh\psi - v_1\sinh\psi)\, e_0 + (v_1\cosh\psi - v_0\sinh\psi)\, e_1$$

Esta isometría es un giro en el plano hiperbólico $\langle e_0, e_1\rangle$ en el sentido negativo de argumentos[9] (figura 3.6). Escribiendo las componentes:

$$\begin{cases} v_0' = v_0\cosh\psi - v_1\sinh\psi \\ v_1' = v_1\cosh\psi - v_0\sinh\psi \end{cases}$$

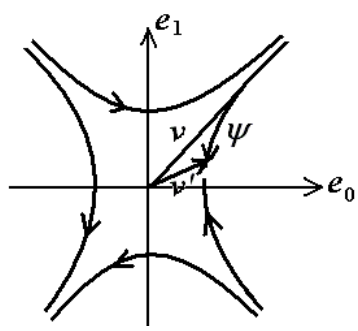


Figura 3.6

Si el vector v es el vector posición, entonces tenemos:

$$\begin{cases} c\,t' = c\,t\cosh\psi - x\sinh\psi \\ x' = x\cosh\psi - c\,t\sinh\psi \end{cases}$$

Consideremos que el sistema de referencia K está en reposo y el K' se mueve con velocidad V en la dirección positiva del eje x (figura 3.7[10]). La posición del origen de coordenadas del sistema de referencia K' medida en el propio sistema es $x' = 0$ y obtenemos de la segunda ecuación:

$$0 = -ct\sinh\psi + x\cosh\psi \qquad \Rightarrow \qquad \tanh\psi = \frac{x}{ct} = \frac{V}{c}$$

[9] Es decir $\psi > 0$ corresponde ahora en realidad a un argumento hiperbólico negativo. Este es el convenio utilizado por L. Landau y E. Lifshitz en *Curso abreviado de física teórica*, *Libro 1, Mecánica y electrodinámica*, ed. Mir (Moscú, 1971) p. 132.

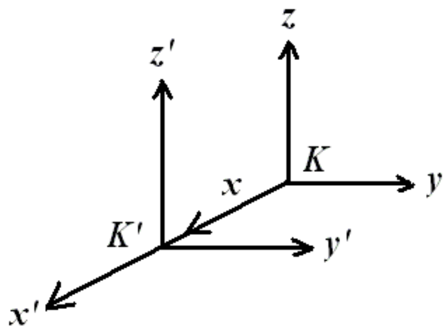
[10] Tomo la orientación de ejes habitualmente utilizada en geometría. La elección de una orientación u otra no influye en las fórmulas en esta página contenidas pero sí en las del electromagnetismo (véanse páginas 33 y 34).

puesto que x/t es la velocidad V del sistema K' con relación al K. Luego el argumento hiperbólico está directamente relacionado con la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia por:

$$\psi = \arg\tanh\frac{V}{c}$$

Utilizando las fórmulas que nos dan seno y coseno hiperbólicos en función de la tangente obtenemos:

Figura 3.7



$$\begin{cases} \cosh\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ \sinh\psi = \dfrac{\tanh\psi}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} = \dfrac{V/c}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

con lo que llegamos a las conocidas fórmulas de transformación de Lorentz de la teoría de la relatividad:

$$x' = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$$

La inversión de estas fórmulas da las más frecuentemente utilizadas en la bibliografía:

$$x = \frac{x' + V\,t'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \dfrac{V\,x'}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$$

Puesto que el giro hiperbólico sólo tiene lugar en el plano $\langle e_1, e_0\rangle$ no afecta a las otras coordenadas por lo que se tiene también:

$$y' = y \qquad z' = z$$

Ahora veamos cómo se transforma la velocidad de cualquier móvil

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx\cosh\psi - c\,dt\sinh\psi}{dt\cosh\psi - \dfrac{dx\sinh\psi}{c}} = \frac{v_x - c\tanh\psi}{1-\dfrac{v_x\tanh\psi}{c}} = \frac{v_x - V}{1-\dfrac{v_x V}{c^2}}$$

fórmula que podemos invertir para encontrar la ley de transformación de la velocidad más corrientemente utilizada:

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \dfrac{v_x' V}{c^2}}$$

Las componentes perpendiculares de la velocidad no quedan invariables ya que al ser un cociente de espacio partido por tiempo se ven modificadas:

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt - \dfrac{V\,dx}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{v_y}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Invirtiéndola utilizando la fórmula anterior para v_x llegamos a:

$$v_y = \frac{v_y'}{1 + \dfrac{V\,v_x'}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad v_z = \frac{v_z'}{1 + \dfrac{V\,v_x'}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

donde el resultado para las componentes y y z es formalmente el mismo. Al ser un cociente de magnitudes, la velocidad no es un vector de un espacio-tiempo plano sino que la geometría de su espacio tridimensional tiene la geometría de Lobachevsky[11].

Veamos ahora cómo se transforman los bivectores:

$$w' = \left(\cosh \frac{\psi}{2} - e_{01} \sinh \frac{\psi}{2} \right) \left(w_{01} e_{01} + w_{02} e_{02} + w_{03} e_{03} + w_{23} e_{23} + w_{31} e_{31} + w_{12} e_{12} \right)$$
$$\left(\cosh \frac{\psi}{2} + e_{01} \sinh \frac{\psi}{2} \right)$$

Puesto que e_{01} y e_{23} conmutan con el operador de giro hiperbólico, sus componentes se mantienen invariantes:

$$w_{01}' = w_{01} \qquad w_{23}' = w_{23}$$

y sólo cambian las demás:

$$w'_{02} e_{02} + w'_{03} e_{03} + w'_{31} e_{31} + w'_{12} e_{12} = \left(\cosh \frac{\psi}{2} - e_{01} \sinh \frac{\psi}{2} \right)$$
$$\left(w_{02} e_{02} + w_{03} e_{03} + w_{31} e_{31} + w_{12} e_{12} \right) \left(\cosh \frac{\psi}{2} + e_{01} \sinh \frac{\psi}{2} \right)$$

Debido a que e_{01} anticonmuta con las otras cuatro unidades tenemos:

[11] Véase V. Dubrovski, Ya. Smorodinski, E. Surkov, *El mundo relativista*, colección Física al alcance de todos, ed. Mir (Moscú, 1987) p. 104.

$$= \left(w_{02}e_{02} + w_{03}e_{03} + w_{31}e_{31} + w_{12}e_{12}\right)\left(\cosh\frac{\psi}{2} + e_{01}\sinh\frac{\psi}{2}\right)^2$$

y utilizando las identidades trigonométricas del ángulo doble, llegamos a:

$$= \left(w_{02}e_{02} + w_{03}e_{03} + w_{31}e_{31} + w_{12}e_{12}\right)\left(\cosh\psi + e_{01}\sinh\psi\right)$$

$$= e_{02}\left(w_{02}\cosh\psi - w_{12}\sinh\psi\right) + e_{03}\left(w_{03}\cosh\psi + w_{31}\sinh\psi\right)$$

$$+ e_{31}\left(w_{31}\cosh\psi + w_{03}\sinh\psi\right) + e_{12}\left(w_{12}\cosh\psi - w_{02}\sinh\psi\right)$$

Es decir:

$$\begin{cases} w'_{01} = w_{01} \\ w'_{02} = w_{02}\cosh\psi - w_{12}\sinh\psi \\ w'_{03} = w_{03}\cosh\psi + w_{31}\sinh\psi \\ w'_{23} = w_{23} \\ w'_{31} = w_{31}\cosh\psi + w_{03}\sinh\psi \\ w'_{12} = w_{12}\cosh\psi - w_{02}\sinh\psi \end{cases}$$

Un ejemplo de bivector es el campo electromagnético[12] F:

$$F = E_x e_{01} + E_y e_{02} + E_z e_{03} + cB_x e_{23} + cB_y e_{31} + cB_z e_{12}$$

donde E es el campo eléctrico y B el campo magnético[13]. Sustituyendo las funciones hiperbólicas en función de V tenemos:

$$E'_x = E_x \qquad E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{B_z V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{B_y V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$B'_x = B_x \qquad B'_y = \frac{B_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{E_z V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad B'_z = \frac{B_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{E_y V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

siendo las fórmulas inversas (las generalmente utilizadas en los manuales de física[14]):

---

[12] Véase Pertti Lounesto, *Clifford Álgebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press (Cambridge, 1997) p. 109. El bivector que aquí defino tiene signo opuesto al definido por Lounesto.

[13] También se ha definido el campo electromagnético mediante bicuaterniones sin componente escalar –véase K. Imaeda, "A New Formulation of Classical Electrodynamics", *Il Nuovo Cimento* **32 B** [1976] pp. 138-162; Gaston Casanova, *El álgebra vectorial*, ed. Morata [Madrid, 1977] p. 63, y William E. Baylis, *Clifford (Geometric) Algebras*, Birkhäuser [Boston, 1996], p. 95– que son algebraicamente equivalentes a bivectores, mucho más claros conceptualmente.

[14] Estas fórmulas corresponden a la orientación de ejes dada en la figura 3.7 (antihoraria, la habitualmente utilizada en geometría y análisis vectorial). Si se toma la orientación contraria (horaria) las fórmulas de

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{B'_z\, V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{B'_y\, V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$B_y = \frac{B'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{E'_z\, V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad B_z = \frac{B'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{E'_y\, V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

La composición de dos transformaciones de Lorentz en la misma dirección del movimiento viene dada simplemente por la aplicación sucesiva de números hiperbólicos:

$$\begin{cases} v' = h^{-1}\, v\, h \\ v'' = j^{-1}\, v'\, j \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad v'' = j^{-1} h^{-1}\, v'\, h\, j \qquad\qquad h,\, j \in \langle 1,\, e_{01} \rangle$$

Es decir el operador correspondiente a la composición de dos transformaciones de Lorentz viene dado por un número hiperbólico que es el producto de los dos anteriores:

$$v'' = k^{-1} v\, k \qquad\qquad k = h\, j \in \langle 1,\, e_{01} \rangle$$

Por lo tanto, el resultado de componer dos transformaciones de Lorentz en la misma dirección es otra transformación de Lorentz, cuya dirección y ángulo pueden ser determinados utilizando números hiperbólicos unitarios:

$$\cosh\frac{\psi_k}{2} + e_{01}\sinh\frac{\psi_k}{2} = \left(\cosh\frac{\psi_h}{2} + e_{01}\sinh\frac{\psi_h}{2}\right)\left(\cosh\frac{\psi_j}{2} + e_{01}\sinh\frac{\psi_j}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\psi_h + \psi_j}{2} + e_{01}\sinh\frac{\psi_h + \psi_j}{2}$$

Es decir, el resultado de la adición de estos dos giros hiperbólicos, por estar en el mismo plano, se reduce a la simple adición de los argumentos hiperbólicos:

$$\psi_k = \psi_h + \psi_j$$

---

transformación de Lorentz del campo electromagnético cambian (las sumas de los numeradores se convierten en restas y las restas en sumas) lo que a menudo no se ha tenido en cuenta. Por ejemplo, mientras Joaquín Catalá en la figura 8.2.1 (p. 90) de su *Física* (Zaragoza, 1988) toma la orientación correcta, B. M. Yavorski, A. A. Detlaf en la figura IV.13.1 (p. 536) de su *Manual de física* (ed. Mir, Moscú, 1977) toman la equivocada, ya que después reproducen en la p. 546 las formulas de transformación de Lorentz del campo electromagnético para la orientación contraria. Lo mismo les sucede a L. Landau y E. Lifshitz en su *Curso abreviado de física teórica* (ed. Mir, Moscú, 1971) puesto que la orientación horaria de los ejes de su figura 28 (p. 123) es inconsistente con las fórmulas de transformación del campo electromagnético dadas en la página 171 para una orientación de ejes antihoraria.

Sea V_h la velocidad relativa del sistema de referencia K' con respecto a *K*, V_j la velocidad relativa del sistema K'' con respecto al K', y V_k la velocidad relativa del sistema K'' respecto al *K*. Entonces utilizando la identidad $\tanh(x+y) \equiv (\tanh x + \tanh y)/(1+\tanh x \tanh y)$ tenemos:

$$V_k = \frac{V_h + V_j}{1 + \frac{V_h V_j}{c^2}}$$

La composición de dos velocidades inferiores a la de la luz siempre resulta en otra inferior a la de la luz:

$$\left.\begin{array}{l} V_h < c \\ V_j < c \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad V_k = \frac{V_h + V_j}{1 + \frac{V_h V_j}{c^2}} < \frac{V_h + V_j}{2} < c$$

Es decir, si un sistema de referencia se mueve con respecto a un segundo con una velocidad relativa inferior a la de la luz, y éste segundo se mueve con respecto a un tercero con una velocidad relativa inferior a la de la luz en la misma dirección, entonces el primer sistema se mueve con respecto al tercero siempre con una velocidad relativa inferior a la de la luz. De hecho obsérvese que la propiedad moverse con una velocidad inferior a la de la luz es una relación de equivalencia –pues cumple la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva–, y todos los sistemas que se mueven los unos respecto a los otros con una velocidad inferior a la de la luz en la misma dirección son equivalentes entre sí.

Ahora veamos qué sucede si componemos dos transformaciones de Lorentz en distintas direcciones del movimiento. La composición de dos transformaciones de Lorentz viene dada simplemente por la aplicación sucesiva de números hiperbólicos.

$$\left\{\begin{array}{l} v' = h^{-1}\ v\ h \\ v'' = j^{-1}\ v'\ j \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad v'' = j^{-1} h^{-1}\ v'\ h\ j$$

Al ser direcciones distintas del movimiento, los planos de los números hiperbólicos son distintos y hay que hacer el producto geométrico de los operadores de argumento mitad:

$$h\ j = \left(\cosh\frac{\psi_h}{2} + u_h \sinh\frac{\psi_h}{2}\right)\left(\cosh\frac{\psi_j}{2} + u_j \sinh\frac{\psi_j}{2}\right) \qquad u_h^2 = u_j^2 = 1$$

cuyo resultado no es en general un número hiperbólico sino que contiene también bivectores espaciales, es decir hay también un operador de rotación. Veamos un ejemplo ilustrativo. Supongamos que el sistema K' se mueve respecto al *K* con la quinta parte de la velocidad de la luz en la dirección del eje *X* y el K'' se mueve con respecto al K' con la tercera parte de la velocidad de la luz en la dirección del eje *Y*. Entonces tendremos:

$$\psi_h = \arg\tanh 0{,}2 \cong 0{,}2027 \qquad\qquad \psi_j = \arg\tanh \frac{1}{3} \cong 0{,}3466$$

$$h\ j \cong (1{,}0051 + e_{01}\,0{,}1015)(1{,}0151 + e_{02}\,0{,}1742)$$

$$= 1{,}0203 + 0{,}1031\,e_{01} + 0{,}1751\,e_{02} + 0{,}0177\,e_{12}$$

Su inverso es:

$$(h\ j)^{-1} = j^{-1}h^{-1} \cong 1{,}0203 - 0{,}1031\,e_{01} - 0{,}1751\,e_{02} - 0{,}0177\,e_{12}$$

Un vector $p = 5e_0 + 3e_1$ medido en el sistema *K* se verá en el sistema K'' como p'':

$$p'' = j^{-1}h^{-1}(5e_0 + 3e_1)h\,j \cong (1{,}0203 - 0{,}1031\,e_{01} - 0{,}1751\,e_{02} - 0{,}0177\,e_{12})$$

$$(5e_0 + 3e_1)(1{,}0203 + 0{,}1031\,e_{01} + 0{,}1751\,e_{02} + 0{,}0177\,e_{12})$$

$$\cong 4{,}7631e_0 + 2{,}0412e_1 - 1{,}5877e_2$$

Es decir el vector no sólo ha sufrido una transformación de Lorentz sino que también ha girado un ángulo φ respecto al eje *X* en el plano *XY* de los dos movimientos de los sistemas de referencia:

$$\tan\varphi = \frac{-1{,}587689329}{2{,}041248762} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi \cong -0{,}6611 = -37{,}8759^{\circ}$$

Reflexiones en un plano del espacio vectorial euclídeo

Una *reflexión* es una isometría respecto a un plano en la que un vector *v* se convierte en un vector v' cuya componente perpendicular $v_\perp$ cambia de signo mientras la componente coplanar $v_{\|}$ se mantiene invariante (figura 3.8):

$$v = v_{\|} + v_\perp \qquad\qquad v' = v_{\|} - v_\perp$$

Sea *u* el bivector unitario del plano respecto al cual hacemos la reflexión. Puesto que cualquier vector del plano anticonmuta con su bivector *u*, mientras que los vectores perpendiculares conmutan con *u*, una expresión para la reflexión es:

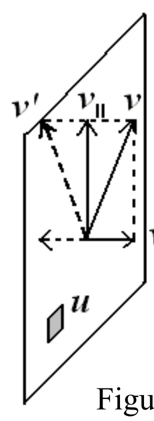


Figura 3.8

$$v' = u\,v\,u = u(v_{\|} + v_\perp)u = u^2(-v_{\|} + v_\perp) = v_{\|} - v_\perp$$

Otra expresión válida cuyo operador es el vector unitario *a* perpendicular al plano ha sido muy popular[15]:

$$v' = -a\,v\,a \qquad \text{con} \qquad a = u\,e_{123}$$

$$v' = -u\,e_{123}\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)u\,e_{123} = -e_{123}u\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)u\,e_{123} = v_{\|} - v_{\perp}$$

Aunque ampliamente utilizada, esta expresión no es general, no puede aplicarse a otros elementos del álgebra geométrica y no es una transformación de semejanza, que es el formato de las isometrías. Para ello debe modificarse (al igual como se hizo con la expresión de las rotaciones). Consideremos el bivector espaciotemporal:

$$r = n\,e_{0123} \qquad n \in \langle e_{23}, e_{31}, e_{12} \rangle \quad \text{o también} \quad r = e_0 c \qquad c \in \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

cuyo inverso es:

$$r^{-1} = e_{0123}^{-1} n^{-1} = -e_{0123} n^{-1} = \frac{e_{0123} n}{|n|^2} = \frac{n\,e_{0123}}{|n|^2} = \frac{r}{|n|^2}$$

Si $|n| = 1$, entonces $r = r^{-1}$, es decir es autoinverso. Tomando el bivector unitario $u = n/|n|$, el vector v' reflejado de *v* respecto del plano dado por el bivector *n* es:

$$v' = r^{-1}\,v\,r = u\,e_{0123}\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)u\,e_{0123} = u\,e_{0123}\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)e_{0123}u$$

$$= -u\,e_{0123}^2\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)u = u\left(v_{\|} + v_{\perp}\right)u = u^2\left(-v_{\|} + v_{\perp}\right) = v_{\|} - v_{\perp}$$

ya que e_{0123} anticonmuta con los vectores y conmuta con los bivectores[16]. Para ejemplificar esta expresión tomemos por ejemplo $v = 2e_1 + 3e_2 - 4e_3$ y hagamos una reflexión con respecto al plano *yz*, es decir con bivector $u = e_{23}$. El operador de reflexión será:

$$r = e_{23}e_{0123} = -e_{01}$$

y el vector reflejado será:

$$v' = r^{-1} v\,r = e_{01}\left(2e_1 + 3e_2 - 4e_3\right)e_{01} = -2e_1 + 3e_2 - 4e_3$$

[15] Véase por ejemplo D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*, Reidel (Dordrecht, 1986) p. 278; P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press (Cambridge, 1997) p. 57; J. Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*, Springer (London, 2008) p. 128; J. Snygg, *Clifford Algebra. A computational Tool for Physicists*, Oxford Univ. Press (Oxford, 1997) p. 6.

[16] J. Vince, en *Geometric Algebra for Computer Graphics*, Springer (Londres, 2008) p. 109, afirma que el pseudoescalar conmuta o anticonmuta con todos los vectores y multivectores según que la dimensión del espacio generador sea impar o par. Esto es falso como muestra el ejemplo $e_{23}e_{0123} = e_{0123}e_{23}$.

donde la componente *x*, perpendicular al plano *yz* ha cambiado de signo. El operador de reflexión también cambia el signo de la componente temporal:

$$e_{01}\, e_0\, e_{01} = -e_0$$

Por lo tanto, si imponemos que la reflexión es una isometría y transformación de semejanza, no sólo cambia el signo de una dirección espacial sino también de la temporal[17]. La expresión general como transformación de semejanza puede aplicarse a cualquier elemento del álgebra, en concreto, los escalares y pseudoescalares son invariantes como debe ser (obsérvese que la expresión inicial no es válida porque modifica los escalares). Los bivectores sí que se transforman adecuadamente bajo una transformación de semejanza ya que si el bivector $b = v \wedge w$ es producto exterior de dos vectores *v* y *w* tenemos:

$$b' = v' \wedge w' = v'\, w' - v' \cdot w' = r^{-1} v r\, r^{-1} w r - v \cdot w = r^{-1} v\, w r - r^{-1} v \cdot w r = r^{-1} v \wedge w r$$

donde el producto escalar $v \cdot w$ no cambia bajo una reflexión y además conmuta con cualquier elemento del álgebra. Por ejemplo, veamos cómo se transformará el bivector $b = -4e_{23} + 2e_{31} - 7e_{12}$ bajo la reflexión respecto al plano *yz*:

$$b' = e_{01}\left(-4e_{23} + 2e_{31} - 7e_{12}\right) e_{01} = e_{01}\left(-4e_{0123} + 2e_{03} + 7e_{02}\right) = -4e_{23} - 2e_{31} + 7e_{12}$$

El resultado es el cambio $e_{31} \to -e_{31}$ y $e_{12} \to -e_{12}$ porque la reflexión respecto al plano *yz* implica $e_1 \to -e_1$.

Simetrías axiales

La simetría de un vector *v* respecto de un eje de simetría *d* (figura 3.9) también es una isometría y tiene por expresión[18]:

$$v' = d^{-1} v\, d$$

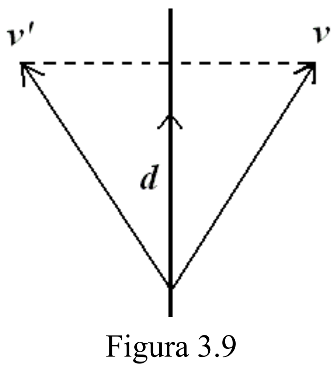


Figura 3.9

En el espacio esta operación es equivalente a un giro de π radianes en el plano perpendicular al eje de simetría. Puesto que e_{123} conmuta con cualquier vector del espacio euclídeo, tenemos:

$$v' = -d^{-1} v\, e_{123}^2 d = -e_{123}\; d^{-1} v\, d\; e_{123} = r^{-1} v\, r$$

donde $r = d\, e_{123}$ es el bivector correspondiente al operador de un giro de π radianes:

[17] Ello trasluce el significado geométrico del teorema CPT (véase L. Landau, E. Lifshitz, *Curso abreviado de Física Teórica*, ed. Mir, [Moscú, 1974] p. 288). La experimentación demuestra que la única invarianza que se cumple siempre es la simetría CPT que implica simultáneamente conjugación de carga (C), inversión espacial o paridad (P) e inversión respecto al tiempo (T). Por separado hay procesos que las violan.

[18] Véase *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra*, p. 28.

$$\frac{r}{|r|} = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{d}{|d|} e_{123} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{d}{|d|} e_{123}$$

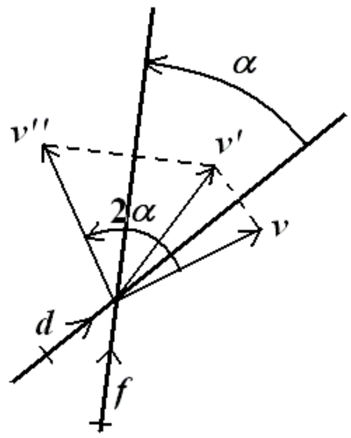


Figura 3.10

La composición de dos simetrías axiales es una rotación con ángulo doble del ángulo que forman los dos ejes (figura 3.10). Si d y f son los vectores de las dos direcciones, entonces:

$$v'' = f^{-1} d^{-1} v\, d\, f = s^{-1} v\, s \qquad\qquad s = d\, f$$

Es decir:

$$s = |\, d\,|\;|\, f\,| (\cos\alpha + n \sin\alpha)$$

$$n = \frac{d \wedge f}{|\, d \wedge f\,|} \qquad\qquad \alpha = \alpha(d, f)$$

donde n es el bivector unitario del plano que contiene los vectores d y f. Como se ve el operador s tiene por argumento (su módulo no tiene importancia) el ángulo orientado α entre los dos vectores, lo que quiere decir que la rotación es de ángulo 2α .

Inversión

Bajo una *inversión* de radio r un vector v se transforma en otro vector v' tal que el producto de ambos es igual a r^2 :

$$v\, v' = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad v' = r^2 v^{-1}$$

Los vectores v y v' tienen la misma dirección y sentido. Todos los vectores cuyo extremo queda dentro de una esfera de radio r se transforman en vectores cuyo extremo queda fuera de esta esfera y viceversa. La inversión es la generalización del inverso de un vector en el álgebra geométrica ($r = 1$). Se le llama inversión de radio r porque todos los vectores cuyo extremo está sobre la superficie de la esfera de radio r se mantienen invariantes. Por descontado, la inversión no es una isometría.

Dualidad (*Ergänzung*)

Vimos en el capítulo anterior que el álgebra geométrica puede graduarse al revés, lo que denominé *dualidad* del álgebra geométrica puesto que la base de vectores queda sustituida, como generadora del álgebra geométrica, por la base dual. La dualidad, pues, también es la transformación que hace corresponder a cada elemento del álgebra su dual. Para cualquier álgebra geométrica, se obtiene el dual por multiplicación por la unidad pseudoescalar (unidad de hipervolumen). En el caso que nos ocupa tenemos la dualidad del espacio-tiempo (dualidad en $Cl_{3,1}$) y la dualidad en el espacio (dualidad en Cl_3, subálgebra de $Cl_{3,1}$) de gran importancia práctica. Por ejemplo, un vector de espacio-tiempo:

$$j = j_t e_0 + j_x e_1 + j_y e_2 + j_z e_3$$

tiene por dual un trivector:

$$e_{0123}\, j = j_t e_{123} + j_x e_{023} + j_y e_{031} + j_z e_{012}$$

Observemos que se trata, en realidad de una isometría ya que $e_0^2 = e_{123}^2 = -1$, $e_1^2 = e_{023}^2 = 1$, etc. Además si $e_0 \to e_{123}$ y $e_1 \to e_{023}$ debería cumplirse que $e_{01} = e_0 e_1 \to e_{123} e_{023} = e_{01}$. Es decir, las unidades bivectoriales deberían mantenerse invariantes, ya que la dualidad simplemente cambia el grado. No obstante, obsérvese que esta expresión para la dualidad es incongruente ya que las modifica:

$$e_{0123}\, e_{01} = e_{23} \neq e_{01}$$

Hay que buscar, pues, una expresión de la dualidad como transformación de semejanza. Puesto que el pseudoescalar e_{0123} anticonmuta con los vectores del espacio-tiempo, hay dos posibles expresiones algebraicas, según el orden de los factores, para la dualidad cuyos resultados difieren en el signo, por lo que podemos tomar su semidiferencia:

$$v' = e_{0123} v = -v\, e_{0123} = \frac{1}{2}\left(e_{0123} v - v\, e_{0123}\right)$$

Lo que equivale a escribir:

$$v' = \frac{1}{2}\left(1 + e_{0123}\right) v \left(1 - e_{0123}\right)$$

que es una transformación de semejanza ya que si $g = 1 - e_{0123}$ entonces $|\, g \,| = \sqrt{2}$ y su conjugado es $g^* = 1 + e_{0123}$. Por ejemplo, apliquemos la dualidad a las unidades vectoriales:

$$g^{-1} e_0 g = \frac{1}{2}\left(1 + e_{0123}\right) e_0 \left(1 - e_{0123}\right) = e_{123}$$

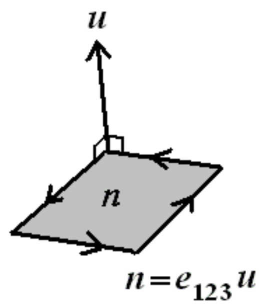
$$g^{-1} e_1 g = \frac{1}{2}\left(1 + e_{0123}\right) e_1 \left(1 - e_{0123}\right) = e_{023}$$

y análogamente para e_2 y e_3. Veamos ahora que esta expresión mantiene invariantes las unidades bivectoriales:

$$g^{-1} e_{01}\, g = \frac{1}{2}\left(1 + e_{0123}\right) e_{01} \left(1 - e_{0123}\right) = e_{01}$$

$$g^{-1}e_{23}\,g=\frac{1}{2}\left(1+e_{0123}\right)e_{23}\left(1-e_{0123}\right)=e_{23}$$

Figura 3.11



y análogamente para e_{02}, e_{03}, e_{31} y e_{12}. Así mismo, deja invariantes los escalares y el pseudoescalar, por lo que gradúa toda el álgebra exactamente como indicamos en la página 12.

En cambio, la dualidad en el espacio euclídeo no es una isometría puesto que transforma unidades de cuadrado −1 como e_{23} en unidades de cuadrado +1 como e_1 y viceversa, que tienen distinto polinomio característico. La dualidad en el espacio sustituye un vector por el bivector del plano perpendicular y viceversa (figura 3.11). Por ejemplo, el vector $v=v_x e_1+v_y e_2+v_z e_3$ tiene por dual espacial al bivector:

$$v'=e_{123}v=v_x e_{23}+v_y e_{31}+v_z e_{12}$$

Su expresión general será por multiplicación por e_{123}, el pseudoescalar del álgebra del espacio Cl_3, a izquierda o derecha indiferentemente puesto que conmuta con todos los elementos de esta álgebra.

En la historia del álgebra vectorial y geométrica, la dualidad del espacio euclídeo jugó un papel muy destacado. La revisión histórica y la reconstrucción de las deducciones geométricas de los distintos autores del siglo XIX que realizamos Josep Manel Parra y el autor de este libro nos llevaron a la conclusión que la clave de la gran confusión habida entre las distintas álgebras vectoriales fue el no entender correctamente la operación de dualidad. Hamilton definió los cuaterniones como cocientes de vectores deduciendo así todas sus propiedades algebraicas[19]. Pero después identificó las unidades bivectoriales (los versores) con las vectoriales, es decir, la operación de dualidad era para él una identidad lo que indujo a Gibbs y Heaviside a desarrollar el análisis vectorial utilizando exclusivamente vectores de cuadrado positivo y definiendo el producto vectorial en lugar del producto exterior de Grassmann (del cual Gibbs era perfectamente conocedor[20]). En su momento, Grassmann[21] ya explicó la dualidad del espacio y la relación que había entre los cuaterniones y la teoría de la extensión: la *i* de Hamilton era el complementario (*Ergänzung*) de e_1 pero no eran idénticos. Sin embargo este artículo pasó desapercibido −así como el artículo de Clifford[22]− y se acabó formando un enorme lío: el análisis vectorial ha prevalecido

[19] Véase nota 5 del capítulo 2.

[20] Véase la carta de Josiah Willard Gibbs enviada a *Nature*, vol. XLIV (1891) pp. 79-82 titulada "Quaternions and the *Ausdehnungslehre*" donde Gibbs empieza (traduzco): "El año 1844 es memorable en los anales de las matemáticas a causa de la primera aparición en página impresa de los *Quaternions* de Hamilton y del *Ausdehnungslehre* de Grassmann.". La carta original está reproducida en *Scientific Works of J. W. Gibbs*, **II**, Lognman, Green (Londres, 1906).

[21] Véase Hermann Günther Grassmann, "Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdenungslehre", *Mathematische Annalen*, **12** (1877) 375-386. Traducido al ingles ("The position of the Hamiltonian quaternions in the extension theory") por Lloyd C. Kannenberg en *A new branch of mathematics: The Ausdenungslehre of 1844 and other works*, Open Court (Chicago, 1995) pp. 525-528.

[22] William Kingdon Clifford, "Applications of Grassmann's Extensive Algebra", *American Journal of Mathematics Pure and Applied* **1** (1878) pp. 350-358, reproducido en *Mathematical Papers by William*

hasta nuestros días a pesar de sus evidentes deficiencias[23]. La realidad física del espacio euclídeo, sin embargo, ha sido tozuda y persistente y ya obligó hace tiempo a los físicos a distinguir entre vectores axiales y polares[24].

Ejercicios

3.1 Se ha dicho que la transformación de semejanza es una relación de equivalencia. Demostrar, pues sus tres propiedades fundamentales, la reflexiva, simétrica y transitiva.

3.2 Se ha dicho que las unidades de cuadrado +1 excepto la identidad son equivalentes y se ha dado un ejemplo de equivalencia entre e_1 y e_2. Demostrar la equivalencia con el resto de unidades.

3.3 Demuéstrese que todas las unidades de cuadrado –1 también son equivalentes (semejantes) entre sí. Para probar la equivalencia entre e_0 y e_{23} se recomienda utilizar matrices.

3.4 Hállese el polinomio característico de un vector de espacio-tiempo y determínense los invariantes bajo isometrías.

3.5 Es evidente que $e_1 \sim -e_1$ (son equivalentes) pero pruébese. Lo que no es tan evidente es que $e_0 \sim -e_0$, que representa una inversión respecto al tiempo, pero pruébese también.

3.6 Demuéstrese que la composición de dos reflexiones sucesivas respecto a dos planos con distinta orientación es idéntica a una rotación en un plano perpendicular a ambos (o si se prefiere respecto a un eje que es la intersección de los dos planos).

3.7 Aplíquese la transformación de Lorentz al momento angular L cuyas componentes son:

$$L = r \wedge p = \left(y\ p_z - z\ p_y\right)e_{23} + \left(z\ p_x - x\ p_z\right)e_{31} + \left(x\ p_y - y\ p_x\right)e_{12}$$

donde $r = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ es el vector posición y $p = p_x e_1 + p_y e_2 + p_z e_3$ es la cantidad de movimiento sabiendo que el vector $p + e_0 E / c$ se transforma como el vector $r + ct\,e_0$. Una vez obtenido el resultado defínase el momento temporal y escríbase la transformación de Lorentz mediante bivectores del espacio-tiempo.

3.8 Al resultado de aplicar dos veces la dualidad se le llama *involución principal*. Calcúlese cuál es el resultado. ¿Cuántas veces habrá que aplicar la dualidad o una involución principal para obtener la identidad?

Kingdon Clifford, Chelsea (Nueva York, 1968) pp. 266-276. Accesible en línea en la URL http://www.jstor.org/stable/2369379.

[23] Por ejemplo, el análisis vectorial no es un álgebra asociativa y no puede generalizarse a n dimensiones.

[24] En análisis vectorial, los vectores polares cambian de signo al invertir las coordenadas espaciales mientras que los axiales son invariantes. Ellos es debido al hecho de que los vectores axiales son, en realidad, bivectores.