4. EL PRODUCTO EXTERIOR Y SUS APLICACIONES

Definición de producto exterior de vectores

Se define el *producto exterior* de cualquier número de vectores como su producto antisimétrico, es decir, el único producto distributivo respecto a la suma de vectores que cambia de signo bajo cualquier permutación de un par de ellos:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_n = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_n \qquad \forall i \neq j$$

Actualmente el producto exterior de dos vectores a y b se representa como $a \wedge b$ pero su descubridor Hermann Grassmann lo representaba[1] como $[a\,b]$. Esta definición es única salvo un factor constante. Para ello se identifica el producto exterior de vectores perpendiculares con el producto de sus módulos para una constante igual a 1.

Veamos algunas consecuencias de su definición. En primer lugar, es trivial que si dos vectores del producto son iguales el producto exterior de todos ellos es nulo ya que intercambiándolos obtenemos el mismo producto:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_n = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_n = 0$$

En segundo lugar, <u>el producto exterior de un conjunto de vectores linealmente dependientes es nulo</u>. Efectivamente, si los vectores no son independientes, alguno de ellos se podrá expresar como combinación lineal de los demás:

$$v_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i \qquad \alpha_i \in \mathbf{R}$$

Sustituyendo esta combinación lineal y aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_n &= v_1 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i \wedge v_{j+1} \cdots \wedge v_n \\ &= \sum_{i \neq j} \alpha_i v_1 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_i \wedge v_{j+1} \cdots \wedge v_n = 0 \end{aligned}$$

El resultado es idéntico a cero porque en cada producto hay un vector repetido.

Supongamos ahora que los vectores son independientes. Descompongamos, por ejemplo el vector v_n en dos componentes perpendiculares, una que pertenece al subespacio $\langle v_1, \cdots, v_{n-1} \rangle$ y que representaré como $v_{n,\,\parallel}$, y otra que no pertenece a ella y que representaré como $v_{n,\,\perp}$. Entonces:

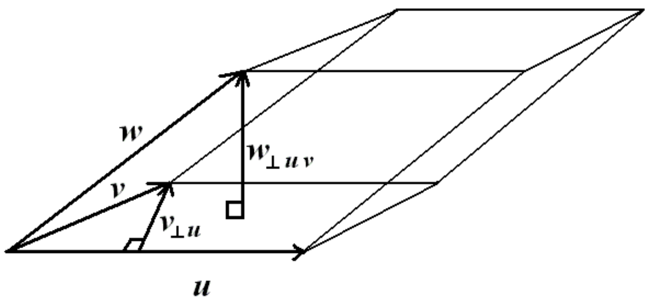
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \wedge v_n = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \wedge \left(v_{n,\parallel} + v_{n,\perp}\right) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \wedge v_{n,\perp}$$

[1] Mientras Elié Cartan usó la antigua notación en *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann & Cie (París, 1945), su hijo Henri Cartan ya utilizó la nueva en *Formas diferenciales. Aplicaciones elementales al cálculo de variaciones y a la teoría de curvas y superficies*, ed. Omega (Barcelona, 1972).

puesto que el producto exterior por la componente $v_{n,\,\parallel}$ es idénticamente nulo por ser un producto de vectores linealmente dependientes. Ahí es donde se refleja la principal propiedad del producto exterior: cada producto exterior por un nuevo vector es una multiplicación por su componente perpendicular al espacio generado por los vectores anteriores. Por ejemplo, pensemos en el producto exterior de tres vectores $\{u, v, w\}$ cualesquiera independientes en el espacio euclídeo. El producto exterior del primero por el segundo es igual a la longitud del primero por la componente perpendicular del segundo respecto al primero (figura 4.1), es decir, el área del paralelogramo que forman:

$$u \wedge v = u\, v_{\perp u}$$

Figura 4.1



Ahora multipliquémoslo exteriormente por el tercero y obtendremos el producto del área del paralelogramo formado por los dos primeros por la componente perpendicular del tercero respecto al plano formado por los dos primeros. Eso es igual al área de la base por la altura, es decir, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores:

$$u \wedge v \wedge w = u\, v_{\perp u} w_{\perp uv}$$

De ahí el nombre que le dio Grassmann: producto *exterior* ya que siempre da como resultado un aumento de dimensión geométrica respecto a la dimensión geométrica del recinto anterior. El título de su obra *Die Ausdehnungslehre* fue traducido muy acertadamente al español como *Teoría de la extensión*[2].

Actualmente, el producto exterior está incluido en todos los programas docentes de matemáticas superiores. No me explayaré pues con él. Sólo deseo apuntar las principales propiedades y destacar los aspectos conceptuales que son muy importantes y que necesitaremos más adelante.

Veamos más propiedades. El producto exterior de un número de vectores superior a la dimensión del espacio al que pertenecen es nulo. Es un resultado trivial porque si hay más vectores que la dimensión de su espacio[3] quiere decir que son linealmente dependientes. El producto exterior de un número de vectores igual a la dimensión del espacio al que pertenecen sólo tiene una componente (pues $C_n^n = 1$) y pertenece a un subespacio del álgebra geométrica de dimensión 1 cuya base es el elemento de hipervolumen:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(v_1, \cdots, v_n)\, e_{12\cdots n} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_1, \cdots, v_n \in E_n \qquad n = \dim E_n$$

[2] Véase Hermann Grassmann, *Teoría de la extensión*, traducción de *Die Ausdehnungslehre* al español por Emilio Óscar Roxín, Colección Historia y Filosofía de la Ciencia dirigida por Julio Rey Pastor, Espasa Calpe Argentina (Buenos Aires, 1947).

[3] Justamente la dimensión de un espacio es el máximo número de vectores linealmente independientes que podemos encontrar en él.

Se define el *determinante* de la matriz formada por las componentes de estos vectores como el valor escalar de este producto exterior.

En la página 1 y 2 del libro se explicó rápidamente el concepto de elementos homogéneos, de grado y la dimensión de cada subespacio y de toda el álgebra geométrica. Vamos a explicarlo de nuevo. Sea $\{u_i\}$ una base de vectores de E_n. Entonces todos los posibles productos de dos vectores forman un espacio de elementos homogéneos de grado 2 cuya base es $\{u_i \wedge u_j\}$ con $j > i$ puesto que $u_i \wedge u_i = 0$ y $u_i \wedge u_j = -u_j \wedge u_i$:

$$v \wedge w = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i \wedge \sum_{j=1}^{n} w_j u_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (v_i w_j - v_j w_i) u_i \wedge u_j$$

El número de elementos de esta base es el número combinatorio C_2^n que es la dimensión del espacio de bivectores que generan. Si consideramos los productos de tres vectores, éstos son elementos homogéneos de grado 3 y su espacio tiene por base $\{u_i \wedge u_j \wedge u_k\}$ con $k > j > i$. El número de elementos distintos de esta base es el número combinatorio C_3^n, que es la dimensión del espacio de trivectores que generan. La dimensión del álgebra geométrica es la suma de las dimensiones de los espacios de elementos homogéneos de todos los grados:

$$\dim Cl(E_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i^n = 2^n$$

y por la conocida fórmula de combinatoria vemos que es igual a 2^n.

Definición de determinante

Como hemos dicho, los productos exteriores de un número de vectores $\{v_1, \cdots v_n\}$ igual a la dimensión del espacio generador E_n forman un subespacio de dimensión 1 cuya base es $\{u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n\}$ ya que $C_n^n = 1$. Hemos definido el determinante $\det(v_1, \cdots v_n)$ de la matriz formada por las componentes de estos vectores como el valor escalar de este producto. Para una matriz cuadrada sólo hay una única combinación (salvo un factor) de productos de coeficientes que sea antisimétrica (además de distributiva). Para que un producto de filas o columnas de una matriz cuadrada sea antisimétrico deben necesariamente tomarse una combinación de productos de sus elementos en que en cada producto no se repita la fila ni la columna, pues si así fuera, por intercambio no sería antisimétrica. Por otro lado, podemos tomar la suma de todos los posibles productos pero esta sería simétrica. Por lo tanto hay que multiplicar cada producto por el signo de la permutación de elementos y así se consigue un producto antisimétrico. Por ejemplo:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\,e\,i - b\,d\,i + c\,d\,h - a\,f\,h + b\,f\,g - c\,e\,g$$

Cada vez que permutamos elementos de dos filas (o columnas) el término cambia de signo. En general, pues un determinante de un conjunto de vectores es la combinación lineal totalmente antisimétrica (la suma alternada) de los productos de sus componentes. Sea $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n]$ cualquier permutación de $[1, 2, \cdots n]$ entonces:

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma_1} a_{2,\sigma_2} \cdots a_{n,\sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)$$

donde S_n es el grupo de permutaciones y $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es el signo de la permutación σ, que es igual a +1 si la permutación es par (el número de transposiciones es par) o igual a –1 si la permutación es impar (número de transposiciones impar).

Las propiedades de los determinantes son sobradamente conocidas para cualquier estudiante de bachillerato o universidad por lo que no me extenderé en ellas. En todo caso, la mayoría se entienden mucho mejor al considerar un determinante como un producto exterior. Como ejemplo, si multiplicamos todos los elementos de una matriz $\mathbf{M}$ de dimensión $n \times n$ por un escalar *k*, su determinante queda multiplicado por k^n. Esto se entiende perfectamente a través del producto exterior:

$$\det(k\mathbf{M}) = \begin{vmatrix} km_{11} & \cdots & km_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ km_{n1} & \cdots & km_{nn} \end{vmatrix} = km_1 \wedge \cdots \wedge km_n = k^n m_1 \wedge \cdots \wedge m_n = k^n \det \mathbf{M}$$

Componentes del producto exterior y *syzygies*

Si multiplicamos exteriormente menos vectores que la dimensión del espacio al que pertenecen obtenemos un producto exterior que tiene más de una componente. Es trivial ver que estas componentes son los menores de la matriz. Por ejemplo si los vectores:

$$u = 2e_1 - 3e_3 + 2e_4$$

$$v = 3e_1 + 5e_2 + 4e_3 - 7e_4$$

$$w = e_1 + 3e_2 - 4e_4$$

los ordenamos en una matriz:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -7 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

entonces sus menores son las componentes del producto exterior[4]:

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_4 + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_4$$

$$+ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} e_3 \wedge e_4 = 10\, e_1 \wedge e_2 + 17 e_1 \wedge e_3 - 20 e_1 \wedge e_4 + 15 e_2 \wedge e_3 - 10 e_2 \wedge e_4 + 13 e_3 \wedge e_4$$

Y si continuamos multiplicando:

$$u \wedge v \wedge w = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_4$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

$$= -36\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + 10\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 - 55\, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - 21\, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

Las componentes de un producto exterior en general no son independientes, es decir, en general para las matrices de unas dimensiones dadas existen relaciones de dependencia funcional entre sus menores del mismo orden. Hongbo Li[5] es quien mejor ha estudiado sus relaciones de dependencia lineal, los *syzygies*[6]. En el método de los orlados, para calcular el rango de una matriz (número de filas o columnas linealmente independientes) sólo se examinan los determinantes de orden $k+1$ que se obtienen orlando un menor no nulo de orden k, que sí son funcionalmente independientes, aunque todos los menores de orden $k+1$ no lo sean. La dependencia funcional significa dependencia lineal de los diferenciales y vamos a ver un ejemplo. Calculemos el producto exterior de dos vectores de cuatro componentes:

$$v \wedge w = (v_0 e_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3) \wedge (w_0 e_0 + w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3)$$

---

[4] Lógicamente el orden de los vectores de base en cada producto exterior tiene que coincidir con el orden de las columnas.

[5] Véase Hongobo Li, *Invariant Algebras and Geometric Reasoning*, World Scientific (Singapore, 2008).

[6] Un *syzygy* es un polinomio de invariantes que se iguala a cero cuando se expande en forma de coordenadas.

$$= e_0 \wedge e_1 \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ w_0 & w_1 \end{vmatrix} + e_0 \wedge e_2 \begin{vmatrix} v_0 & v_2 \\ w_0 & w_2 \end{vmatrix} + e_0 \wedge e_3 \begin{vmatrix} v_0 & v_3 \\ w_0 & w_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ e_1 \wedge e_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} + e_1 \wedge e_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + e_2 \wedge e_3 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Diferenciemos todas las componentes:

$$d \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ w_0 & w_1 \end{vmatrix} = dv_0 \ w_1 + v_0 \ dw_1 - dv_1 \ w_0 - v_1 \ dw_0$$

$$d \begin{vmatrix} v_0 & v_2 \\ w_0 & w_2 \end{vmatrix} = dv_0 \ w_2 + v_0 \ dw_2 - dv_2 \ w_0 - v_2 \ dw_0$$

$$d \begin{vmatrix} v_0 & v_3 \\ w_0 & w_3 \end{vmatrix} = dv_0 \ w_3 + v_0 \ dw_3 - dv_3 \ w_0 - v_3 \ dw_0$$

$$d \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = dv_1 \ w_2 + v_1 \ dw_2 - dv_2 \ w_1 - v_2 \ dw_1$$

$$d \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} = dv_1 \ w_3 + v_1 \ dw_3 - dv_3 \ w_1 - v_3 \ dw_1$$

$$d \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} = dv_2 \ w_3 + v_2 \ dw_3 - dv_3 \ w_2 - v_3 \ dw_2$$

Construyamos la matriz de los diferenciales:

$$\begin{array}{cccccccc} dv_0 & dv_1 & dv_2 & dv_3 & dw_0 & dw_1 & dw_2 & dw_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_0 & 0 & 0 & -v_1 & v_0 & 0 & 0 \\ w_2 & 0 & -w_0 & 0 & -v_2 & 0 & v_0 & 0 \\ w_3 & 0 & 0 & -w_0 & -v_3 & 0 & 0 & v_0 \\ 0 & w_2 & -w_1 & 0 & 0 & -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & w_3 & 0 & -w_1 & 0 & -v_3 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & w_3 & -w_2 & 0 & 0 & -v_3 & v_2 \end{pmatrix}$$

Pues bien, esta matriz tiene rango 5, es decir sólo hay 5 diferenciales de determinantes que sean independientes. Por lo tanto hay una relación funcional entre los seis determinantes (un *syzygy*[7]), que se puede encontrar multiplicando parejas de determinantes:

[7] Hongbo Li, *ibidem*, p. 14.

$$\begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ w_0 & w_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} v_0 & v_2 \\ w_0 & w_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_0 & v_3 \\ w_0 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

Al no ser independientes las 6 componentes del producto exterior, un elemento homogéneo cualquiera de grado 2 no puede ser en general un producto exterior de dos vectores, es decir un *blade*[8].

El producto exterior de elementos homogéneos de cualquier grado

Ha quedado claro cómo es el producto exterior de varios vectores. Sin embargo debemos plantearnos cómo se multiplican exteriormente elementos homogéneos de grado mayor que 1, que no son vectores sino productos exteriores de vectores. Puesto que en cada permutación de dos vectores cambia el signo del producto exterior, al multiplicar exteriormente un vector por un bivector el signo no cambia si los permutamos como fácilmente se ve:

$$b = u \wedge v \qquad\qquad u, v, w \in E$$

$$b \wedge w = u \wedge v \wedge w = w \wedge u \wedge v = w \wedge b$$

El producto exterior pues conmuta o anticonmuta según los grados de los dos factores. La generalización del resultado anterior es bien conocida[9]:

$$b_k \wedge c_l = (-1)^{k\,l}\, c_l \wedge b_k \qquad\qquad b_k \in \wedge^k E \qquad\qquad c_l \in \wedge^l E$$

donde k y l son (como se indica) los grados de los dos elementos homogéneos.

El producto exterior de diferenciales

Los diferenciales de las funciones forman un espacio vectorial cuya base son los diferenciales de las coordenadas $\{dx, dy, dz, c\,dt\}$. Este espacio vectorial genera un álgebra geométrica de diferenciales formada por las combinaciones lineales de todos sus productos exteriores. En esta álgebra geométrica podemos calcular, mediante producto exterior, las fórmulas de transformación de Lorentz para el elemento de superficie y de volumen. La transformación para el elemento de longitud es:

---

[8] En David Hestenes, Garret Sobzyck, *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics*, Reidel (Dordrecht, 1984) p. 4 leemos (traduzco del original inglés): "La relación multiplicativa de vectores hacia *r*-vectores se especifica asumiendo que, para cualquier entero $r>0$, un *r*-vector puede ser expresado como suma de *r-blades*. Un multivector A_r se le llama un *r-blade* o *r-vector simple* si y sólo si puede ser factorizado en un producto de r vectores anticonmutativos a_1, a_2, $\cdots$ a_r, esto es: $A_r = a_1 a_2 \cdots a_r$ donde $a_j\, a_k = -a_k\, a_j$ para $j, k = 1, 2, \cdots r$ y $j \neq k$."

[9] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge University Press (Cambridge, 1997), p. 43. Véase también L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann, *Geometric Algebra for Computer Science*, Morgan Kaufmann (Ámsterdam, 2007) p. 51.

$$dx = \frac{dx' + V\ dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad dy = dy' \qquad dz = dz' \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Mediante el producto exterior encontramos la transformación de Lorentz para el elemento de superficie:

$$dy \wedge dz = dy' \wedge dz' \qquad dz \wedge dx = \frac{dz' \wedge dx' - V\ dt' \wedge dz'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$dx \wedge dy = \frac{dx' \wedge dy' + V\ dt' \wedge dy'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad dt \wedge dx = dt' \wedge dx'$$

$$dt \wedge dy = \frac{dt' \wedge dy' + \frac{V}{c^2} dx' \wedge dy'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad dt \wedge dz = \frac{dt' \wedge dz' - \frac{V}{c^2} dz' \wedge dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Y observamos que es idéntica a la transformación de Lorentz del campo electromagnético, es decir, corresponde a la transformación del bivector de área espacio-temporal

$$dA = dy \wedge dz\ e_{23} + dz \wedge dx\ e_{31} + dx \wedge dy\ e_{12} + c\,dt \wedge dx\ e_{01} + c\,dt \wedge dy\ e_{02} + c\,dt \wedge dz\ e_{03}$$

cuyo módulo es invariante:

$$|dA'|^2 = |dA|^2 = (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2 + (dx \wedge dy)^2 - c^2\,(dt \wedge dx)^2 - c^2\,(dt \wedge dy)^2 - c^2\,(dt \wedge dz)^2$$

ya que:

$$(dx \wedge dy)^2 - c^2 (dt \wedge dy)^2 = (dx' \wedge dy')^2 - c^2 (dt' \wedge dy')^2$$

y $$(dz \wedge dx)^2 - c^2 (dt \wedge dz)^2 = (dz' \wedge dx')^2 - c^2 (dt' \wedge dz')^2$$

Calculemos la transformación de Lorentz para el elemento de volumen:

$$dx \wedge dy \wedge dz = \frac{dx' \wedge dy' \wedge dz' + V\,dt' \wedge dy' \wedge dz'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$dt \wedge dy \wedge dz = \frac{dt' \wedge dy' \wedge dz + \frac{V}{c^2} dx' \wedge dy' \wedge dz'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$dt \wedge dz \wedge dx = dt' \wedge dz' \wedge dx' \qquad dt \wedge dx \wedge dy = dt' \wedge dx' \wedge dy'$$

con lo que vemos que el trivector de volumen tetradimensional:

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz\; e_{123} + c\, dt \wedge dy \wedge dz\; e_{023} + c\, dt \wedge dz \wedge dx\; e_{031} + c\, dt \wedge dx \wedge dy\; e_{012}$$

se transforma igual como un vector de espacio-tiempo.

Igualmente, el producto exterior nos permite calcular los elementos de línea, superficie y volumen para un cambio de coordenadas. Por ejemplo, diferenciando las coordenadas esféricas (figura 4.2):

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

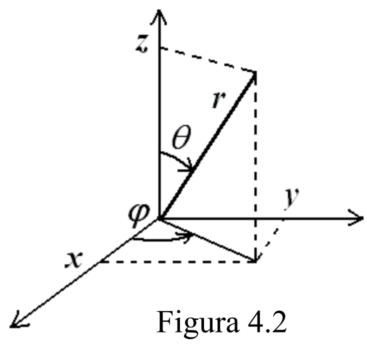


Figura 4.2

obtenemos:

$$\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\varphi\; dr + r\cos\theta\cos\varphi\; d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\; d\varphi \\ dy = \sin\theta\sin\varphi\; dr + r\cos\theta\sin\varphi\; d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\; d\varphi \\ dz = \cos\theta\; dr - r\sin\theta\; d\theta \end{cases}$$

El elemento de línea en el espacio euclídeo es:

$$dl = dx\; e_1 + dy\; e_2 + dz\; e_3$$

Tomando cuadrados y sumando obtenemos el cuadrado del diferencial de longitud en coordenadas esféricas:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\; d\varphi^2$$

por lo que el elemento de línea en coordenadas esféricas es:

$$dl = dr\; e_r + r\; d\theta\; e_\theta + r\sin\theta\; d\varphi\; e_\varphi$$

Los productos exteriores de los diferenciales de las coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} dx \wedge dy = r\sin^2\theta\; dr \wedge d\varphi + r^2 \sin\theta\cos\theta\; d\theta \wedge d\varphi \\ dy \wedge dz = -r\sin\varphi\; dr \wedge d\theta - r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\; dr \wedge d\varphi + r^2\sin^2\theta\cos\varphi\; d\theta \wedge d\varphi \\ dz \wedge dx = r\cos\varphi\; dr \wedge d\theta - r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\; dr \wedge d\varphi + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\; d\theta \wedge d\varphi \end{cases}$$

y el elemento de superficie es:

$$dA = dx \wedge dy\ e_{12} + dy \wedge dz\ e_{23} + dz \wedge dx\ e_{31}$$

Tomando cuadrados y sumando obtenemos el cuadrado del módulo del diferencial de área en coordenadas esféricas:

$$|dA|^2 = (dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2$$

$$= r^2 (dr \wedge d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta\ (dr \wedge d\varphi)^2 + r^4 \sin^2 \theta (d\theta \wedge d\varphi)^2$$

de donde se sigue la expresión bivectorial del elemento de superficie:

$$dA = r\ dr \wedge d\theta\ e_{r\theta} + r \sin\theta\ dr \wedge d\varphi\ e_{r\varphi} + r^2 \sin\theta\ d\theta \wedge d\varphi\ e_{\theta\varphi}$$

que también podía haberse obtenido mediante productos exteriores de las componentes del elemento de línea en coordenadas esféricas:

$$dA = dr\ e_r \wedge r\ d\theta\ e_\theta + dr\ e_r \wedge r \sin\theta\ d\varphi\ e_\varphi + r\ d\theta\ e_\theta \wedge r \sin\theta\ d\varphi\ e_\varphi$$

Que las coordenadas esféricas son ortogonales se manifiesta en el hecho que no aparecen términos cruzados en el cuadrado del diferencial de longitud y puede deducirse de la ortogonalidad de los vectores unitarios a partir del cambio inverso:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x} + (\pi)$$

$$dr = \frac{x\ dx + y\ dy + z\ dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad d\theta = \frac{x\ z\ dx + y\ z\ dy - (x^2 + y^2) dz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d\varphi = \frac{-y\ dx + x\ dy}{x^2 + y^2}$$

Tomando componentes en la base $\{dx, dy, dz\}$ se obtienen los vectores que tienen las direcciones de los diferenciales. Tomándolos de módulo unidad se llega a los vectores ortonormales de las coordenadas esféricas:

$$e_r = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad e_\theta = \frac{(x\ z,\ y\ z,\ -(x^2 + y^2))}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)}} \qquad e_\varphi = \frac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$e_r \cdot e_\theta = e_\theta \cdot e_\varphi = e_r \cdot e_\varphi = 0 \qquad e_r^2 = e_\theta^2 = e_\varphi^2 = 1$$

Resulta interesante ver también, a partir de las coordenadas esféricas, que las coordenadas cartesianas son ortogonales. Tomando las componentes de los diferenciales de x, y y z en la base $\{dr,\, r\, d\theta,\, r\sin\theta\, d\varphi\}$ obtenemos:

$$e_1 = (\sin\theta\cos\varphi,\, \cos\theta\cos\varphi,\, -\sin\varphi) \qquad e_2 = (\sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta\sin\varphi,\, \cos\varphi)$$

$$e_3 = (\cos\theta,\, -\sin\theta,\, 0)$$

lo que nos permite comprobar su ortogonalidad:

$$e_1 \cdot e_2 = e_1 \cdot e_3 = e_2 \cdot e_3 = 0$$

La diferencial exterior

Una *forma diferencial* es una combinación lineal homogénea de diferenciales o de sus productos exteriores. Por lo tanto, una forma diferencial es un elemento homogéneo del álgebra geométrica de diferenciales. El grado de una forma diferencial es el número de diferenciales presentes en cada producto exterior. Es un concepto equivalente al grado de un elemento homogéneo del álgebra geométrica. Por ejemplo:

$$\omega = x\ y\ dx \wedge dy \wedge dz + x^2 dy \wedge dz \wedge dt + z\ x\ y\ dz \wedge dx \wedge dy + z\ y^3\ dx \wedge dy \wedge dt$$

es una forma diferencial de grado 3.

Se define el operador diferencial d como:

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz$$

Cuando el operador diferencial d actúa exteriormente sobre una forma diferencial se le llama *diferencial exterior*. Al aplicarla sobre una función es la diferencial corriente y resulta en una forma de grado 1:

$$d \wedge f = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Por ejemplo si $f(x,y) = 2x^2 + 3x\,y$ entonces:

$$d \wedge f = df = (4x + 3y)\,dx + 3x\,dy$$

Para calcular la diferencial exterior de una forma diferencial hay que realizar el producto exterior de los diferenciales de los coeficientes por los diferenciales existentes siendo el convenio que los diferenciales de los coeficientes se ubican delante del resto de diferenciales[10]. Por ejemplo:

$$d \wedge \omega = 2x\ dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt + y^3\ dz \wedge dx \wedge dy \wedge dt = (2x + y^3)\, dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$$

[10] Véase Henri Cartan, *Formas diferenciales*, ed. Omega (Barcelona, 1972) p. 33.

La diferencial de un producto exterior de una forma ω_k de grado k y otra forma η_l de grado l lógicamente cumple:

$$d \wedge (\omega_k \wedge \eta_l) = (d \wedge \omega_k) \wedge \eta_l + (-1)^k \omega_k \wedge (d \wedge \eta_l)$$

puesto que en el segundo término se ha cambiado el orden del operador diferencial d, que es de grado 1, y de la forma ω_k.

Una forma diferencial se llama *exacta* si existe su integral, es decir, es la diferencial de otra forma. Por ejemplo:

$$\eta = y\,dx + x\,dy + z\,dz = d \wedge \xi \qquad \Rightarrow \qquad \xi = x\,y + \frac{z^2}{2} + C$$

donde C es una constante de integración.

Una forma diferencial se llama *cerrada* si su diferencial es nula:

$$d \wedge \eta = dy \wedge dx + dx \wedge dy + dz \wedge dz = 0$$

La doble aplicación de la diferencial exterior a cualquier forma diferencial da un resultado nulo, lo que es obvio puesto que estamos multiplicando exteriormente el operador diferencial por sí mismo. Aplicado al ejemplo anterior:

$$d \wedge \eta = d \wedge d \wedge \xi = 0$$

Es decir, toda forma diferencial exacta es cerrada[11]. El enunciado inverso, que toda forma diferencial cerrada es exacta (*lema de Poincaré*), es válido si las formas están definidas sobre un conjunto abierto con forma de estrella[12] y es un método habitual para determinar cuando una forma diferencial es exacta. Por ejemplo, investiguemos si es integrable la forma ζ :

$$\zeta = 2\,x\,y^2 z\,dx \wedge dy - x\,z\;dx \wedge dz - x^2 y^2\;dy \wedge dz$$

mirando si se anula su diferencial:

$$d\zeta = 2\,x\,y^2 dz \wedge dx \wedge dy - 2\,x\,y^2\;dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

Luego existe su integral ψ tal que $d\psi = \zeta$. Integremos por separado los términos respecto cada una de las variables:

$$\int 2\,x\,y^2 z\,dx \wedge dy \cong x^2 y^2 z\;dy \qquad\qquad \int \left(-2\,x\,y^2 z\right) dy \wedge dx \cong -\frac{2\,x\,y^3 z}{3}\,dx$$

---

[11] Se llega a este resultado por la igualdad de las segundas derivadas parciales cruzadas (*teorema de Schwarz*).

[12] Lema de Poincaré. Véase M. Spivak, *Cálculo en variedades*, ed. Reverté (Barcelona, 1982) p. 86.

$$\int (-x\,z)dx\wedge dz \cong -\frac{x^2 z}{2}dz \qquad \int x\,z\,dz\wedge dx \cong \frac{x\,z^2}{2}dx$$

$$\int (-x^2y^2)dy\wedge dz \cong -\frac{x^2y^3}{3}dz \qquad \int x^2y^2dz\wedge dy \cong x^2y^2z\;dy$$

donde el símbolo $\cong$ indica que estoy omitiendo las constantes de integración, que en este caso son funciones de la variable que no se integra. La unión[13] de estos términos nos da 2ψ, ya que cada término se ha integrado dos veces, por lo que ψ puede ser, en principio:

$$\psi \cong \left(-\frac{x\,y^3z}{3}+\frac{x\,z^2}{4}\right)dx+\frac{x^2y^2z}{2}\,dy+\left(-\frac{x^2z}{4}-\frac{x^2y^3}{6}\right)dz$$

donde nuevamente $\cong$ indica que hemos omitido, de momento, las constantes de integración. Puesto que toda forma diferencial de primer grado que sea exacta es cerrada:

$$\chi=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \quad\Rightarrow\quad d\chi=0$$

el papel de la constante de integración para ψ lo juega cualquier forma diferencial de primer grado. Así pues, tendremos que la integral de ζ será en general:

$$\psi=\left(-\frac{x\,y^3z}{3}+\frac{x\,z^2}{4}+\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{x^2y^2z}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy+\left(-\frac{x^2z}{4}-\frac{x^2y^3}{6}+\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz$$

donde $f(x,y,z)$ es una función real arbitraria que no puede determinarse. Por ejemplo supongamos que:

$$f(x,y,z)=\frac{x^2y^3z}{6}$$

Entonces tendríamos:

$$\psi=\frac{x\,z^2}{4}dx+x^2y^2z\,dy-\frac{x^2z}{4}dz$$

Cambios de variable

Supongamos que las variables x_i dependen del mismo número de variables y_i:

[13] Es decir, aquellos términos que sean iguales sólo se cuentan una vez.

$$x_i(y_1 \cdots y_n) \qquad\qquad 1 \le i \le n$$

Las variables x_i son funcionalmente independientes si sus diferenciales son linealmente independientes y su producto exterior es no nulo:

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \neq 0$$

lo que implica que el llamado *jacobiano*, el determinante de las derivadas parciales, sea no nulo:

$$\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| \neq 0$$

En este caso el cambio de variables será *no degenerado*. Podemos aplicar este cambio de variables a una integral:

$$\int f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int f(x_1(y_i), \cdots, x_n(y_i)) \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

Para cambios de variable en elementos de línea, de superficie, de volumen en cualquier integral vectorial que impliquen más de un jacobiano, se deberán aplicar en general las reglas algebraicas del producto exterior.

Integración en el problema de los *N* cuerpos

El problema clásico de los tres cuerpos había sido ya resuelto para algunas configuraciones especiales como la de Lagrange y Euler, de las cuales Hestenes da una amena explicación[14]. En 2007 ya publiqué[15] la solución general del problema de los *N* cuerpos. Vamos a recordarla brevemente. Sea un sistema de *N* cuerpos ubicados en las posiciones X_i con pesos m_i. Entonces se cumple:

$$\sum_i m_i X_i^2 = G^2 \sum_i m_i + \frac{\sum_i \sum_{j>i} m_i m_j (X_i - X_j)^2}{\sum_i m_i}$$

donde $G = \dfrac{\sum_i m_i X_i}{\sum_i m_i}$ es el centro de masas.

[14] D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics,* 2n ed., Kluwer (N.Y. 2002) p. 400.

[15] *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra* (2007), p. 248, aunque era conocedor de la solución desde el año 1986. La edición catalana *Tractat de geometria plana mitjançant l'àlgebra geomètrica* (1996) ya contenía la solución del problema de los tres cuerpos (ejercicio 8.3, p. 57 y 103).

Supongamos un problema donde debamos integrar una función $f(X_{ij})$ que depende de las coordenadas relativas $X_{ij} = X_i - X_j$. Para integrar es necesario utilizar un conjunto de X_{ij} linealmente independientes. Entonces, en la función $f(X_{ij})$ es suficiente que sustituyamos las X_{ij} que sean linealmente dependientes por las independientes utilizando sus ligaduras. Incluso podemos trabajar con una $f(X_{ij})$ que sólo dependa de coordenadas independientes que hemos escogido convenientemente. En cualquier caso, vamos a tener tantas X_{ij} independientes como el número de X_i menos uno, ya que hay que descontar *G*, el centro de masas. Un conjunto de X_{ij} independientes puede ser $X_{1j} = X_1 - X_j$ con $j > 1$. El problema al integrar es que el elemento de volumen viene dado por las coordenadas cartesianas y éstas no se corresponden con las coordenadas relativas de las que depende la función, lo que es un grave problema de cálculo:

$$\int dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n \wedge f(X_{1j})$$

Nuestra hipótesis es que los elementos de volumen cartesiano y de las coordenadas relativas independientes son idénticos, es decir:

$$dX_{12} \wedge \cdots \wedge dX_{1n} \wedge dG = dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n$$

Vamos a demostrarlo. Veamos cómo es la sucesión de productos exteriores de los diferenciales de las coordenadas relativas:

$$d(X_1 - X_2) \wedge d(X_1 - X_3) = dX_1 \wedge dX_2 + dX_2 \wedge dX_3 + dX_3 \wedge dX_1$$

$$d(X_1 - X_2) \wedge d(X_1 - X_3) \wedge d(X_1 - X_4) =$$

$$= dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 - dX_2 \wedge dX_3 \wedge dX_4 + dX_3 \wedge dX_4 \wedge dX_1 - dX_4 \wedge dX_1 \wedge dX_2$$

$$d(X_1 - X_2) \wedge d(X_1 - X_3) \wedge d(X_1 - X_4) \wedge d(X_1 - X_5) =$$

$$= dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dX_4 + dX_2 \wedge dX_3 \wedge dX_4 \wedge dX_5 + dX_3 \wedge dX_4 \wedge dX_5 \wedge dX_1$$

$$+ dX_4 \wedge dX_5 \wedge dX_1 \wedge dX_2 + dX_5 \wedge dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3$$

Es decir, un producto exterior de un número par de coordenadas relativas es igual a la suma de los productos cíclicos de todas las coordenadas cartesianas menos una. Para un número impar se obtiene la suma alternada de dichos productos. El hecho de que se trate de diferenciales es indiferente, pues la igualdad se cumple también sin éstos. Ahora si multiplicamos por el centro de masas obtenemos para tres cuerpos:

$$dX_{12} \wedge dX_{13} \wedge dG = \left(dX_1 \wedge dX_2 + dX_2 \wedge dX_3 + dX_3 \wedge dX_1\right) \wedge \frac{m_1 dX_1 + m_2 dX_2 + m_3 dX_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3$$

Para cuatro cuerpos:

$$dX_{12} \wedge dX_{13} \wedge dX_{14} \wedge dG = \left(dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 - dX_2 \wedge dX_3 \wedge dX_4 + dX_3 \wedge dX_4 \wedge dX_1\right.$$

$$\left. - dX_4 \wedge dX_1 \wedge dX_2\right) \wedge \frac{m_1 dX_1 + m_2 dX_2 + m_3 dX_3 + m_4 dX_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3 \wedge dX_4$$

Y así sucesivamente. Se ve perfectamente que el hecho de que sea suma o suma alternada se acopla perfectamente con el número de transposiciones necesarias para ordenar los factores resultantes y poder simplificar. Así pues el resultado general es que el elemento de volumen *n*-dimensional es el producto exterior de $n-1$ coordenadas relativas independientes y del centro de masas como habíamos supuesto.

Esta situación aparece en mecánica cuántica. Normalmente para evaluar cualquier magnitud A debemos integrar el resultado de aplicar su operador a la función de onda ψ:

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A}\, \psi \; dV$$

Pero muy a menudo ψ depende de las coordenadas relativas y no de las cartesianas, una vez factorizada la función de onda traslacional ψ_t. Por ejemplo, para un sistema de tres partículas:

$$\psi = \psi_i(X_{12}, X_{13})\, \psi_t(G)$$

Si la magnitud A es invariante bajo una traslación entonces, para obtener el valor esperado de la magnitud, sólo hará falta integrar para las coordenadas relativas:

$$\langle A \rangle = \int dX_{12} \wedge dX_{13} \; \psi_i{}^*(X_{12}, X_{13}) \hat{A}\, \psi(X_{12}, X_{13})$$

lo cual no es *a priori* evidente.

Producto exterior *versus* producto geométrico

En el primer capítulo se definió el producto geométrico de dos elementos del álgebra geométrica como su producto matricial. Ahora hemos definido el producto exterior de dos vectores como su producto antisimétrico. Cuando los vectores son perpendiculares ambos productos coinciden. En el caso de que v y w sean dos vectores cualesquiera, entonces se cumple:

$$v \wedge w = \frac{1}{2}(v\, w - w\, v) \qquad v, w \in E$$

¿Cual es la definición para el producto exterior de tres vectores? Evidentemente:

$$u \wedge v \wedge w = \frac{1}{6}(u\, v\, w - u\, w\, v - v\, u\, w + v\, w\, u - w\, v\, u + w\, u\, v) \qquad u, v, w \in E$$

donde cada producto tiene signo positivo si la permutación es par y signo negativo si es impar. En general se cumple que:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma_1} v_{\sigma_2} \cdots v_{\sigma_n} \qquad v_i \in E$$

donde σ representa las permutaciones del grupo de permutaciones S_n. Aún siendo cierta y totalmente antisimétrica esta igualdad, no recomiendo utilizarla pues existe un resultado más restrictivo, la propiedad *permutativa*[16]:

$$u \wedge v \wedge w = \frac{1}{2}(u\, v\, w - w\, v\, u)$$

cumpliéndose también:

$$u \wedge v \wedge w = -u \wedge w \wedge v = \frac{1}{2}(v\, w\, u - u\, w\, v) = w \wedge u \wedge v = \frac{1}{2}(w\, u\, v - v\, u\, w)$$

Es decir la fórmula totalmente antisimétrica se obtiene como media de tres expresiones algebraicas con el mismo valor.

Estas fórmulas sólo valen para productos exteriores de vectores, es decir, de elementos que pertenecen al espacio generador del álgebra geométrica, y nos interesan también los productos exteriores por elementos homogéneos de grado mayor que uno. Es un resultado conocido[17] que:

$$v \wedge a_k = \frac{1}{2}\left[v\, a_k + (-1)^k a_k\, v\right] \qquad v \in E_n \qquad a_k \in \wedge^k E_n$$

Apliquémoslo al resultado anterior y obtenemos, añadiendo t como factor por la izquierda:

$$t \wedge u \wedge v \wedge w = \frac{1}{4}[t\, u\, v\, w - t\, w\, v\, u - u\, v\, w\, t + w\, v\, u\, t]$$

---

[16] *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra* (2007), p. 172.

[17] D. Hestenes, G. Sobzyck, *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics.* Reidel (Dordrecht, 1984) p. 4.

en vez de las 24 permutaciones del producto geométrico que nos da la fórmula totalmente antisimétrica. Por permutación del producto exterior vemos que hay 6 sumas de 4 términos con el mismo valor que es igual a cuatro veces el producto exterior.

Si añadimos w como factor por la derecha al producto $u \wedge v \wedge w$ tenemos:

$$t \wedge u \wedge v \wedge w = \frac{1}{4}\left[t\, u\, v\, w - v\, u\, t\, w - w\, t\, u\, v + w\, v\, u\, t\right]$$

y comparándolo con el resultado anterior nos damos cuenta de la igualdad:

$$t\, w\, v\, u + u\, v\, w\, t = v\, u\, t\, w + w\, t\, u\, v$$

y de que propiamente debemos emparejar los términos:

$$t \wedge u \wedge v \wedge w = \frac{1}{4}\left[(t\, u\, v\, w + w\, v\, u\, t) - (t\, w\, v\, u + u\, v\, w\, t)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(t\, u\, v\, w + w\, v\, u\, t) - (v\, u\, t\, w + w\, t\, u\, v)\right]$$

existiendo muchos pares de términos iguales, de acuerdo con la relación anterior, pero que no coinciden con el producto exterior. Cada par de términos está formado por los productos geométricos de los vectores en un orden determinado y en orden inverso.

Utilizando las propiedades anteriores podemos ir incrementando sucesivamente los factores del producto exterior y escribirlos como suma de un número mínimo de productos geométricos.

El teorema de Rouché-Frobenius y la regla de Cramer

Una bella aplicación del producto exterior es la demostración de la regla de Cramer. Consideremos cualquier sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right\}$$

Para representar el sistema introducimos los vectores columna:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema puede escribirse como:

$$x_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + x_n \mathbf{A}_n = \mathbf{B}$$

Es decir $\mathbf{B}$ debe ser una combinación lineal de $\mathbf{A}_i$ lo que implica que el sistema tiene solución si y sólo si:

$$\text{rango}(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}) = \text{rango}(\mathbf{A}_i) \qquad (\textit{teorema de Rouché-Frobenius})$$

Multipliquemos exteriormente $\mathbf{B}$ por todos los vectores menos el primero:

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n = (x_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + x_n \mathbf{A}_n) \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n$$

$$= x_1 \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n$$

Todos los productos exteriores resultantes son nulos excepto el primero porque en todos los demás hay un vector repetido. Como ya hemos visto, el producto exterior de n vectores de n componentes es igual al determinante de los vectores por la unidad de hipervolumen, y ésta última se simplifica en el cociente de ambos productos geométricos:

$$x_1 = \frac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n}{\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n} = \frac{\det(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)}$$

Igualmente tenemos:

$$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}_3 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n = x_2 \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}_n$$

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}, \mathbf{A}_3, \cdots, \mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)}$$

y en general:

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_1, \cdots \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}, \mathbf{A}_{i+1}, \cdots, \mathbf{A}_n)}{\det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_n)}$$

Es decir, en el determinante del numerador debe sustituirse la columna i-ésima de la matriz de los coeficientes por los términos independientes (*regla de Cramer*). Evidentemente, la regla de Cramer sólo es aplicable si el denominador es no nulo, lo que requiere que $\text{rango}(\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n) = n$, es decir que los vectores $\mathbf{A}_i$ sean linealmente independientes.

Ejercicios

4.1 Demuéstrese que los elementos de volumen n-dimensional de las coordenadas cartesianas y relativas son idénticos mediante el jacobiano del cambio de variables:

$$dX_{12} \wedge dX_{13} \wedge \cdots \wedge dX_{1n} \wedge dG = dX_1 \wedge \cdots \wedge dX_n$$

4.2 Demuéstrese para tres vectores cualesquiera $u, v, w \in E_n$ la propiedad permutativa:

$$u \wedge v \wedge w = \frac{1}{2}(u\, v\, w - w\, v\, u)$$

4.3 Demuéstrese el conocido resultado de que un producto exterior de un vector por un elemento homogéneo puede escribirse como semisuma o semidiferencia (según el grado del elemento homogéneo) de sus productos geométricos de acuerdo con:

$$v \wedge a_k = \frac{1}{2}\left[v\, a_k + (-1)^k a_k\, v\right] \qquad v \in E_n \qquad a_k \in \wedge^k E_n$$

4.4 Demuéstrese que no existe ningún *syzygy* que ligue las cuatro componentes de un producto exterior de tres vectores de un espacio cuadridimensional, como el espacio-tiempo. Demuéstrese también que cualquier elemento homogéneo de tercer grado en esta álgebra es siempre un *blade*, un producto exterior de tres vectores.

4.5 Demuéstrese que las tres componentes del momento angular L_x, L_y y L_z y del momento temporal M_x, M_y y M_z de una partícula no son independientes sino que están ligadas por una relación. Encuéntrese esta relación.

4.6 Demuéstrese que si $i = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ es el elemento de hipervolumen (pseudoescalar) del álgebra geométrica de un espacio vectorial E_n de dimensión n, entonces para cualquier vector v tenemos la regla de conmutación $v\, i = (-1)^{n+1} i\, v$.

4.7 Estudiar si es integrable la forma diferencial:

$$\omega = (-3z - 12x\, y)\, dx \wedge dy \wedge dz + 2y\, dx \wedge dy \wedge dt$$

y en caso de que lo sea calcular su integral.

4.8 Demostrar, utilizando el teorema de Schwarz sobre las derivadas cruzadas, que $d \wedge df = 0$.