

5. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS DEL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

La aplicación afín

En el espacio geométrico¹ $\mathbb{R}^3$ de puntos se define la *aplicación afín* $+$ como la transformación geométrica que aplica el espacio geométrico en sí mismo mediante una traslación perteneciente al espacio vectorial tridimensional E_3 (figura 5.1):

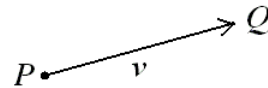


Figura 5.1

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^3 \times E_3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (P, v) &\rightarrow Q = P + v \end{aligned}$$

Así pues v representa el vector con origen en P y extremo en Q :

$$v = Q - P$$

El signo de suma para la aplicación afín es adecuado pues la composición de aplicaciones afines corresponde a la suma de traslaciones:

$$\left. \begin{aligned} Q &= P + v \\ R &= Q + w \end{aligned} \right\} \Rightarrow R = (P + v) + w = P + (v + w)$$

Así pues debe recordarse que sólo es correcto:

punto + vector = punto (aplicación afín)

vector + vector = vector (suma vectorial)

Sistemas de coordenadas

Un sistema de coordenadas es el conjunto $\{O; e_1, e_2, e_3\}$, donde O es un punto del espacio geométrico llamado *origen de coordenadas* y $\{e_1, e_2, e_3\}$ son tres vectores independientes del espacio vectorial tridimensional. Mediante la aplicación afín, cualquier punto P del espacio geométrico se escribe de forma única como:

$$P = O + x e_1 + y e_2 + z e_3 \quad \Leftrightarrow \quad OP = x e_1 + y e_2 + z e_3 \quad x, y, z \in \mathbf{R}$$

donde OP es el vector posición de P . A las componentes (x, y, z) se les llama *coordenadas* de P en el sistema $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ ².

Cuatro puntos $\{O, A, B, C\}$ no coplanares del espacio tridimensional (figura 5.2) determinan siempre un sistema de coordenadas con origen en O y vectores de base:

¹ Aunque el lector estará pensando en el espacio euclidiano, todo lo que en este capítulo se explica es aplicable a cualquier espacio de tres dimensiones con curvatura nula, sea euclidiano o hiperbólico.

² Aquí x, y, z son coordenadas dadas en un sistema de coordenadas genérico no necesariamente ortonormal. Puesto que en todo este capítulo se prescindirá de la noción de perpendicularidad, todas las ecuaciones aquí deducidas tienen validez general para cualquier sistema de coordenadas.

$$e_1 = OA \quad e_2 = OB \quad e_3 = OC$$

Si sustituimos las definiciones de los vectores de base en la ecuación del sistema de coordenadas obtenemos:

$$OP = x OA + y OB + z OC$$

y deshaciendo los vectores en puntos:

$$P = (1 - x - y - z)O + x A + y B + z C \quad x, y, z \in \mathbf{R} \quad O, A, B, C, P \in \mathbf{R}^3$$

donde $(1 - x - y - z, x, y, z)$ son las *coordenadas baricéntricas*. Es decir, cualquier punto del espacio geométrico es igual a una combinación lineal de cuatro puntos no coplanares cuyos coeficientes suman la unidad. Por el contrario, cualquier vector puede escribirse como una combinación lineal de cuatro puntos no coplanares cuyos coeficientes suman cero:

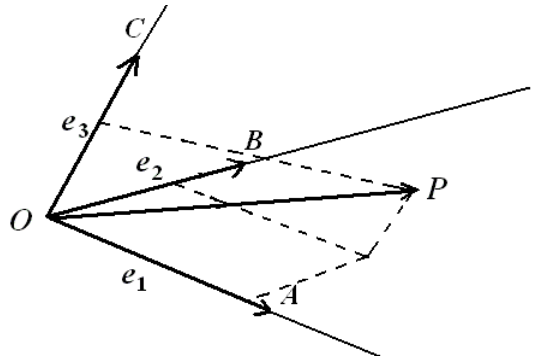


Figura 5.2

$$v = (-x - y - z)O + x A + y B + z C$$

$$= x OA + y OB + z OC = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

Cuando el punto P se aleja indefinidamente del tetraedro $OABC$ en la dirección del vector $a e_1 + b e_2 + c e_3$ una o varias de sus componentes tienden a infinito:

$$P = (1 - k a - k b - k c)O + k a A + k b B + k c C \quad k \rightarrow \infty$$

por lo que la unidad puede despreciarse en comparación con el infinito:

$$P = (-k a - k b - k c)O + k a A + k b B + k c C \quad k \rightarrow \infty$$

Así pues un punto del infinito es un vector con longitud infinita:

$$P = k a OA + k b OB + k c OC \quad k \rightarrow \infty$$

Para evitar que las componentes sean infinitas, se introducen las *coordenadas homogéneas*, que son proporcionales a las baricéntricas con una constante k no determinada. Por ejemplo, $P = (3, -2, -3, 6)$ tiene coordenadas homogéneas ya que no están normalizadas pues $3 - 2 - 3 + 6 = 4$. Sus coordenadas baricéntricas son $P = (3/4, -1/2, -3/4, 3/2)$ que suman la unidad. El punto $Q = (-2, 5, 3, -6)$ tiene una suma de coordenadas nula $-2 + 5 + 3 - 6 = 0$ y se trata pues de un punto del infinito ubicado en la dirección del vector $v = 5 e_1 + 3 e_2 - 6 e_3$.

Ecuaciones de la recta

Dado un punto de la recta P y un vector v , cualquier otro punto R puede obtenerse como una translación de P en la dirección dada por v :

$$R = P + k v \quad k \in \mathbb{R}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación vectorial* de la recta. Desahaciendo en componentes encontramos las *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x = x_0 + k v_x \\ y = y_0 + k v_y \\ z = z_0 + k v_z \end{cases} \quad P = (x_0, y_0, z_0) \quad R = (x, y, z)$$

Aislando el parámetro k llegamos a la *ecuación continua* de la recta:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Este conjunto de dos ecuaciones escalares pueden separarse para obtener:

$$\begin{cases} v_y(x - x_1) - v_x(y - y_1) = 0 \\ v_z(y - y_1) - v_y(z - z_1) = 0 \end{cases}$$

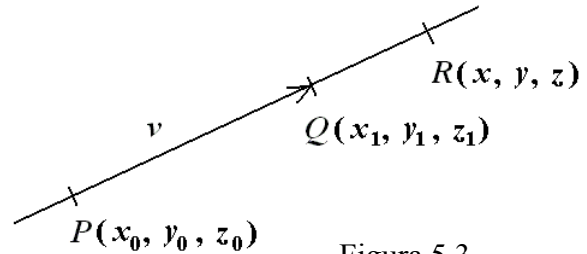


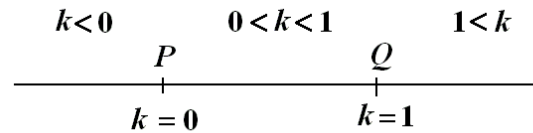
Figura 5.3

lo que expresa que esta recta es la intersección de dos planos.

Sea Q el punto que se obtiene de P por una translación v (figura 5.3):

$$Q = P + v$$

Entonces podemos escribir la ecuación vectorial como:



$$R = (1 - k)P + k Q$$

Figura 5.4

que es la *ecuación baricéntrica* de la recta. Todo punto de la recta es una combinación lineal de dos puntos de la recta cuyos coeficientes suman la unidad y a los que se les denomina *coordenadas baricéntricas de un punto sobre la recta*. Cuando $k = 0$, $R = P$. Cuando $k = 1$, $R = Q$. Si $0 < k < 1$ entonces R recorre los puntos del segmento PQ (figura 5.4).

Si $Q = (x_1, y_1, z_1)$ deshaciendo en componentes tenemos:

$$\begin{cases} x = (1 - k)x_0 + k x_1 \\ y = (1 - k)y_0 + k y_1 \\ z = (1 - k)z_0 + k z_1 \end{cases}$$

y la ecuación continua correspondiente:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Por ejemplo, sea r la recta que pasa por los puntos $(3, 1, -2)$ y $(2, 4, 5)$. La ecuación paramétrica de la recta será:

$$(x, y, z) = (1-k)(3, 1, -2) + k(2, 4, 5) = (3, 1, -2) + k(-1, 3, 7)$$

y la ecuación continua:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{7}$$

Condición de alineación de tres puntos

La condición de alineación de tres puntos viene dada por la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados que se puede escribir también como:

$$PR = k PQ$$

Por lo tanto el producto exterior de estos dos vectores debe ser nulo:

$$PQ \wedge PR = P \wedge Q + Q \wedge R + R \wedge P = 0$$

$$e_{23} \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & y - y_0 \\ z_1 - z_0 & z - z_0 \end{vmatrix} + e_{31} \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & x - x_0 \end{vmatrix} + e_{12} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x - x_0 \\ y_1 - y_0 & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

y por lo tanto cada uno de los determinantes, lo que nos lleva a las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} (y_1 - y_0)(z - z_0) = (z_1 - z_0)(y - y_0) \\ (z_1 - z_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(z - z_0) \\ (x_1 - x_0)(y - y_0) = (y_1 - y_0)(x - x_0) \end{cases}$$

Pasando los primeros factores de cada lado a dividir al otro lado obtenemos de nuevo a la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Ecuaciones de un plano del espacio

Cualquier plano del espacio queda determinado por dos vectores u, v y un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. El vector que va desde este punto a un punto genérico del plano $P = (x, y, z)$ será combinación lineal de los dos vectores (figura 5.5):

$$P_0P = k u + l v \quad k, l \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto el determinante de los tres vectores debe ser nulo:

$$\det(P_0P, u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

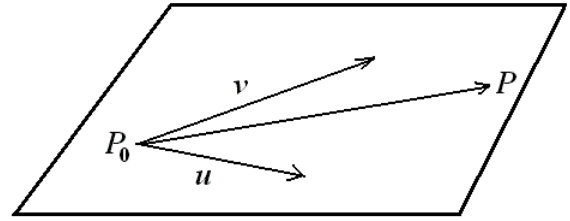


Figura 5.5

Ello también expresa el hecho de que el volumen del paralelepípedo dado por los tres vectores es nulo, es decir, su producto exterior es nulo:

$$P_0P \wedge u \wedge v = 0$$

lo que conduce a la ecuación general del plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

donde (a, b, c) son las componentes del producto exterior de los dos vectores u y v :

$$(a, b, c) = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

Si se reúnen todos los términos numéricos en el término independiente d se obtiene como ecuación general del plano:

$$a x + b y + c z + d = 0 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Un plano determina esta ecuación salvo por un factor constante arbitrario.

Plano determinado por tres puntos y ecuación baricéntrica del plano

Dados tres puntos del plano con coordenadas:

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \quad P_1(x_1, y_1, z_1) \quad P_2(x_2, y_2, z_2)$$

tomando $u = P_0P_1$ y $v = P_0P_2$ encontramos como ecuación del plano:

$$0 = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 0 & x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ 0 & x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}$$

Sumando la primera fila a las demás obtenemos el tercer determinante, y restando las tres últimas columnas a la primera llegamos al cuarto determinante:

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1-x-y-z & x & y & z \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Intercambiando la segunda fila con primera para ordenarlas, llegamos finalmente a:

$$\begin{vmatrix} 1-x-y-z & x & y & z \\ 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

que es la *ecuación baricéntrica* de un plano. Es decir, cuatro puntos son coplanares si el determinante de sus coordenadas baricéntricas es nulo. Por otro lado si los cuatro puntos no son coplanares, este determinante es el volumen del paralelepípedo que forman y, en consecuencia, el volumen del tetraedro que forman es una sexta parte de este determinante:

$$V_{PP_0P_1P_2} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1-x-y-z & x & y & z \\ 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

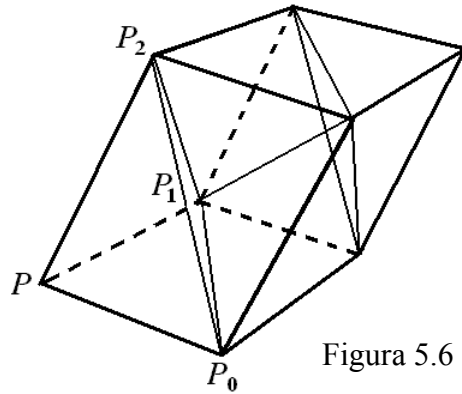


Figura 5.6

Como se ve en la figura 5.6, el paralelepípedo queda dividido en seis tetraedros no todos iguales pero sí con el mismo volumen.

Puesto que el volumen de una pirámide es la tercera parte de la del prisma con la misma altura y el área de la base es igual a la mitad de la correspondiente cara del paralelepípedo, se concluye que el volumen de cada tetraedro es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo. Por otro lado, este volumen puede ser positivo o negativo según que la orientación de $\{P, P_0, P_1, P_2\}$ sea la misma que la del tetraedro fundamental $\{O, A, B, C\}$ u opuesta. En la figura 5.6 la orientación corresponde a la habitual de los sistemas de coordenadas (excepto los utilizados en relatividad) y por lo tanto el volumen sería positivo.

El desarrollo del determinante de la ecuación baricéntrica del plano conduce a:

$$(1-x-y-z) \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & y_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & y_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación corresponde a la descomposición de un plano como combinación lineal de los cuatro planos fundamentales, las caras del tetraedro fundamental $\{O, A, B, C\}$ (figura 5.7):

$$\text{Plano } ABC: \quad 1-x-y-z=0$$

$$\text{Plano } OBC: \quad -x=0$$

$$\text{Plano } OAC: \quad y=0$$

$$\text{Plano } OAB: \quad -z=0$$

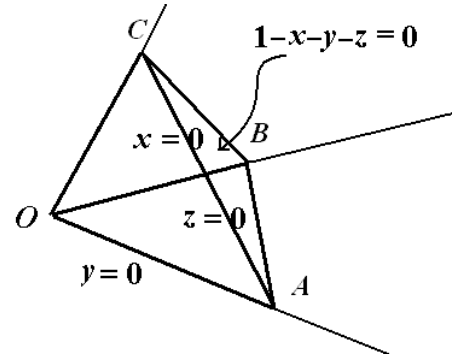


Figura 5.7

Es decir la descomposición se obtiene de los menores de la matriz:

$$\begin{pmatrix} O & A & B & C \\ 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

La ecuación del plano $ax + by + cz + d = 0$ escrita con coordenadas baricéntricas es:

$$d(1-x-y-z) + (a+d)x + (b+d)y + (c+d)z = 0$$

Por lo tanto llegamos a las igualdades:

$$d = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$a = - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & y_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-y_0-z_0 & y_0 & z_0 \\ 1-y_1-z_1 & y_1 & z_1 \\ 1-y_2-z_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & z_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x_0-z_0 & x_0 & z_0 \\ 1-x_1-z_1 & x_1 & z_1 \\ 1-x_2-z_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$c = - \frac{\begin{vmatrix} 1-x_0-y_0-z_0 & x_0 & y_0 \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} 1-x_0-y_0 & x_0 & y_0 \\ 1-x_1-y_1 & x_1 & y_1 \\ 1-x_2-y_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

Haz de planos de una recta

Toda recta r es la intersección de dos planos y puede expresarse como el sistema de ecuaciones de estos dos planos:

$$r: \begin{cases} a x + b y + c z + d = 0 \\ a' x + b' y + c' z + d' = 0 \end{cases}$$

La ecuación de cualquier plano p del haz de planos de esta recta puede obtenerse como combinación lineal de las dos ecuaciones:

$$p: k(a x + b y + c z + d) + l(a' x + b' y + c' z + d') = 0$$

Sin embargo, la ecuación de un plano está determinada salvo un factor, lo que nos permite utilizar una sola coordenadas baricéntrica m para el haz de planos (figura 5.8):

$$p: (1-m)(a x + b y + c z + d) + m(a' x + b' y + c' z + d') = 0$$

Cuando $m = 0$ el plano coincide con el primer plano. Cuando $m = 1$ coincide con el segundo plano. Otros valores de m corresponden con otras orientaciones de los planos del haz. El valor $m = \infty$ corresponde también con un plano, el dado por la ecuación:

$$m = \infty \Rightarrow (a' - a)x + (b' - b)y + (c' - c)z + d' - d = 0$$

El sistema de ecuaciones formado por cualquier par de combinaciones lineales independientes de los planos p_1 y p_2 representa también la misma recta r . Por ejemplo, sea la recta dada por las ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 2x + 3y - z + 4 = 0 \\ 3x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

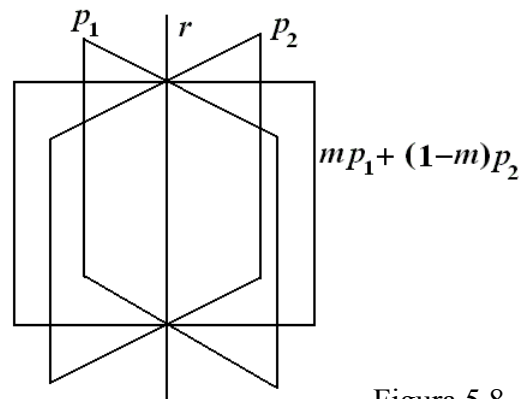


Figura 5.8

Si hacemos las siguientes combinaciones lineales:

$$3(2x + 3y - z + 4) - 2(3x + 2y - z + 1) = 0 \Rightarrow 5y - z + 10 = 0$$

$$-2(2x + 3y - z + 4) + (3x + 2y - z + 1) = 0 \Rightarrow -x - 4y + z - 7 = 0$$

que son independientes porque $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ entonces podemos escribir la recta r también como:

$$r: \begin{cases} 5y - z + 10 = 0 \\ x + 4y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

Coordenadas baricéntricas de cualquier plano

Las caras del tetraedro fundamental vienen dadas por las ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $1 - x - y - z = 0$. La ecuación de cualquier plano puede escribirse como combinación lineal de las ecuaciones de estos planos (figura 5.7):

$$(1 - f - g - h)(1 - x - y - z) + f x + g y + h z = 0$$

donde $[1 - f - g - h, f, g, h]$ son sus coordenadas baricéntricas en el espacio dual. Esta ecuación expresa el hecho que este plano pertenece a un haz de planos de una recta dada por dos planos que, a su vez, pertenecen a un haz de planos de las rectas dadas por los planos fundamentales. Veamos un ejemplo. Consideremos el plano:

$$2x + 3y + 4z + 5 = 0$$

Primero introducimos la ecuación del último plano fundamental lo que nos lleva a la ecuación:

$$5(1 - x - y - z) + 7x + 8y + 9z = 0$$

y después normalizamos dividiendo por la suma de los coeficientes:

$$\frac{5}{29}(1 - x - y - z) + \frac{7}{29}x + \frac{8}{29}y + \frac{9}{29}z = 0$$

Aunque hay infinitas combinaciones, podemos decir que este plano pertenece al haz de planos de la recta dada por los planos $7x + 8y = 0$ y $9z + 5(1 - x - y - z) = 0$, los cuales pertenecen a su vez el primero al haz de planos del eje z (dado por los planos $x = 0$ e $y = 0$), y el segundo al haz de planos de la recta dada por el plano $z = 0$ y $1 - x - y - z = 0$ (la recta de ecuación $x + y = 1$ que yace en el plano xy). En cualquier caso, las coordenadas baricéntricas de cualquier plano son únicas y suman la unidad excepto en el caso de que sumen cero, lo que como hemos visto antes, también puede suceder para determinados planos, por ejemplo las coordenadas $[-5, 2, 4, -1]$, que suman cero, corresponden al plano:

$$-5(1 - x - y - z) + 2x + 4y - z = 0 \Rightarrow 7x + 9y + 4z - 5 = 0$$

Para poder expresar también las ecuaciones de estos planos, utilizaremos coordenadas homogéneas duales, que son proporcionales a las baricéntricas.

Ecuación matricial y coordenadas baricéntricas de una recta

Una recta viene determinada por dos puntos, pero también puede darse por la intersección de dos planos (ambos enunciados son duales y corresponden a axiomas de la geometría euclidiana). Una recta dada como intersección de dos planos se escribe en coordenadas baricéntricas:

$$\begin{cases} d_1 (1-x-y-z) + f_1 x + g_1 y + h_1 z = 0 \\ d_2 (1-x-y-z) + f_2 x + g_2 y + h_2 z = 0 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones anterior en notación matricial es:

$$(1-x-y-z \quad x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

Dos puntos de la recta P_1 y P_2 cumplirán ambas ecuaciones por lo que podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues tanto la matriz horizontal de coordenadas baricéntricas de puntos como la matriz vertical de coordenadas baricéntricas de planos representan a la recta. Estas matrices no son únicas, pues si sustituimos cualquier fila de la primera matriz por una combinación lineal de las dos filas obtenemos un nuevo punto que también es de la recta, aunque con coordenadas homogéneas no normalizadas. Igualmente si sustituimos una columna de la segunda matriz por una combinación lineal de las dos columnas obtenemos un nuevo plano que pertenece al haz de planos de la recta. Llamaré a la ecuación anterior *ecuación matricial* de la recta.

En la geometría del plano expresamos la ecuación de una recta de un haz de rectas como combinación lineal de las ecuaciones de dos rectas del haz³. Ahora deseamos descomponer cualquier recta del espacio como combinación lineal de rectas. Primero observemos que el tetraedro fundamental tiene seis aristas que determinan las seis rectas que serán la base de este espacio vectorial de rectas (figura 5.7). Cualquier recta deberá poder escribirse como combinación lineal (con suma unidad) de las seis rectas del tetraedro fundamental ¿Cómo puede descomponerse una recta como combinación lineal de las rectas del tetraedro fundamental? Del mismo modo que descomponíamos un plano como combinación lineal de las caras del tetraedro fundamental, mediante los menores de la matriz. Veamos un ejemplo. Sea la recta r que pasa por los puntos $P(2, 0, -3)$ y $Q(3, -1, 4)$:

³ *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra* p. 41.

$$r = \begin{pmatrix} O & A & B & C \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos los menores:

$$OA \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 16 \quad OB \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad OC \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$AB \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad AC \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \quad BC \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -3$$

Dividiendo por la suma de coeficientes, normalizamos la descomposición:

$$\overline{PQ} = \frac{16}{19} \overline{OA} - \frac{2}{19} \overline{OB} - \frac{7}{19} \overline{OC} - \frac{2}{19} \overline{AB} + \frac{17}{19} \overline{AC} - \frac{3}{19} \overline{BC}$$

A los seis coeficientes de esta descomposición les llamaré *coordenadas baricéntricas de la recta* en la base de rectas $\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}\}$:

$$\overline{PQ} = \left(\frac{16}{19}, -\frac{2}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{2}{19}, \frac{17}{19}, -\frac{3}{19} \right)$$

Dos planos cualesquiera que contienen a esta recta son $\begin{cases} -3x + 4y + z + 9 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Escritos en coordenadas baricéntricas: $\begin{cases} 9(1-x-y-z) + 6x + 13y + 10z = 0 \\ -2(1-x-y-z) - x - y - 2z = 0 \end{cases}$

Por lo tanto podemos representarlos por la matriz: $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -1 \\ 13 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-x-y-z=0 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$

Observemos que se cumple: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -1 \\ 13 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora calculemos los menores:

$$-\overline{BC}: \begin{matrix} 1-x-y-z=0 \\ x=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 3 \quad \overline{AC}: \begin{matrix} 1-x-y-z=0 \\ y=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

$$-\overline{AB}: \begin{cases} 1-x-y-z=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad -\overline{OC}: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\overline{OB}: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad -\overline{OA}: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

Para determinar el signo de la recta fundamental que corresponde a un par de planos fundamentales tendremos en cuenta que $e_{23}e_{31} = -e_{12}$ y aplicaremos la siguiente regla del tornillo: al girar el vector perpendicular del primer plano hacia el vector perpendicular del segundo plano como si fuera la cabeza de un tornillo, el sentido de avance de este tornillo será el sentido contrario del sentido de la recta resultante. Por ejemplo, la intersección de los planos $x=0$ y $y=0$ da como resultado la recta $-\overline{OC}$ porque al mover la cabeza del tornillo desde OA hasta OB el tornillo se movería en el sentido de OC (figura 5.9). La intersección de los planos $1-x-y-z=0$ y $x=0$ da como resultado la recta $-\overline{BC}$ porque al mover la cabeza del tornillo desde el vector $-\overline{OA}-\overline{OB}-\overline{OC}$, perpendicular al primer plano, hasta el vector OA el tornillo se desplazará en el sentido de BC (figura 5.10):

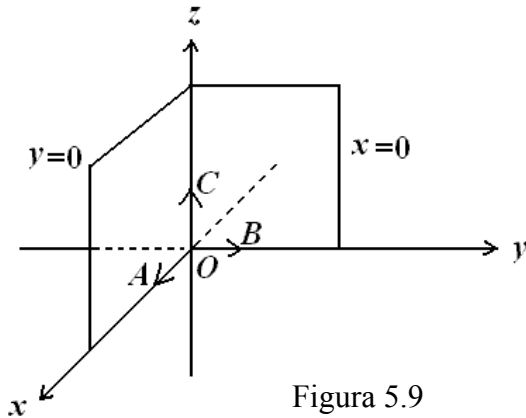


Figura 5.9

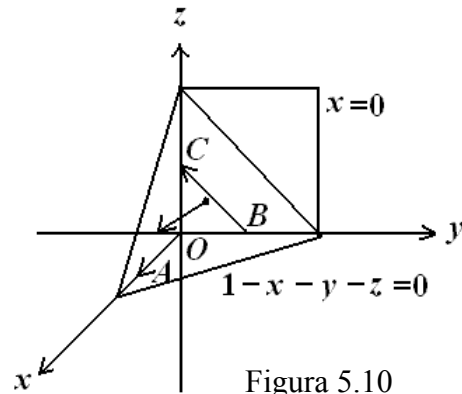


Figura 5.10

Por lo tanto la descomposición es la misma que antes:

$$r = \frac{16}{19}\overline{OA} - \frac{2}{19}\overline{OB} - \frac{7}{19}\overline{OC} - \frac{2}{19}\overline{AB} + \frac{17}{19}\overline{AC} - \frac{3}{19}\overline{BC}$$

Este resultado es general: la descomposición de una recta en función de las rectas del tetraedro fundamental es única, tanto si se utilizan puntos de la recta como planos del haz de rectas. Para demostrarlo consideremos el sistema de ecuaciones dado por los puntos y los planos que escribiremos con una notación más cómoda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde la matriz (a_{ij}) es la representación de la recta mediante puntos y (b_{ij}) es la representación de la recta mediante planos, ambos en coordenadas baricéntricas. El sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} = 0 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} = 0 \end{cases}$$

Eliminando los primeros términos de cada ecuación E_i con las combinaciones lineales adecuadas llegamos al sistema:

$$\begin{aligned} b_{11}E_2 - b_{12}E_1 &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{12} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + a_{14} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} &= 0 \\ a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} &= 0 \\ b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{41} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} &= 0 \\ b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + b_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Si en el primer par de ecuaciones eliminamos el primer, segundo o tercer término respectivamente llegamos al sistema:

$$\begin{aligned} a_{12}E_2' - a_{22}E_1' &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{12} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + a_{14} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} &= 0 \\ a_{23}E_1' - a_{13}E_2' &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{12} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} &= 0 \\ a_{24}E_1' - a_{14}E_2' &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{12} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + a_{14} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Si en el segundo par de ecuaciones eliminamos el primer, segundo o tercer término respectivamente llegamos al sistema:

$$\begin{aligned} b_{21}E_4' - b_{22}E_3' &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{11} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + a_{14} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} &= 0 \\ b_{32}E_3' - b_{31}E_4' &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{11} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} &= 0 \\ b_{42}E_3' - b_{41}E_4' &\longrightarrow \left\{ \begin{aligned} a_{11} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + a_{14} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Lo que nos da las seis proporciones siguientes, de las cuales sólo cuatro son independientes:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}} \\ \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}} \end{array}$$

Cuya solución es:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = -c \frac{\begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}} = c \frac{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} = -c \frac{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}} \\ \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}} = -c \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}} = c \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}} = -c \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}} \end{array}$$

donde c es un número real distinto de cero. La multiplicación de cualquier fila de la matriz de puntos por una constante k cambia coordenadas baricéntricas por coordenadas homogéneas y multiplica todos los menores por k pero no cambia la recta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ k a_{21} & k a_{22} & k a_{23} & k a_{24} \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ k a_{2i} & k a_{2j} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$$

Cuando descomponemos una recta normalizamos los coeficientes, por lo que la constante k desaparece:

$$\frac{k \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 k \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}}$$

Igualmente la adición de un múltiplo de una fila a otra fila no modifica los menores ni la recta. En resumen, la sustitución de una fila por una combinación lineal de ambas proporciona un nuevo punto de la recta en coordenadas homogéneas (no normalizadas) pero sigue representando a la misma recta. En este caso todos los menores pueden variar

de forma proporcional sin que se modifique la descomposición de la recta. El mismo argumento algebraico se aplica a las combinaciones lineales del haz de planos de una recta. Por lo tanto, es natural que la solución al sistema de ecuaciones anteriores dé tan sólo la proporcionalidad de coeficientes y no la igualdad. Obsérvese, sin embargo, que los menores proporcionales son los duales. Si representamos como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix}$$

las igualdades anteriores pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} &= -c \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} &= c \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} &= -c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} &= -c \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} &= c \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} &= -c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El principio de dualidad

El *principio de dualidad* en el espacio establece que cualquier teorema concerniente a puntos y planos tiene su contrapartida dual en que los puntos y los planos se intercambian. El enunciado “dos puntos determinan una única recta que pasa por estos puntos” tiene su enunciado dual “dos planos determinan una única recta intersección de estos planos”. Todos los hechos geométricos tienen una contrapartida algebraica y el principio de dualidad no es una excepción. Por ejemplo, como acaba de verse, la ecuación de una recta viene dada por una matriz de coordenadas baricéntricas de puntos o planos indistintamente, lo cual refleja la dualidad en el espacio.

Puesto que cada plano puede escribirse como combinación lineal de los cuatro planos del tetraedro fundamental, las coordenadas baricéntricas de dicho plano representan a la vez un punto del espacio dual:

$$d(1-x-y-z) + f x + g y + h z = 0 \quad \rightarrow \quad [d, f, g, h]$$

Así mismo, la intersección de tres planos π_1, π_2, π_3 es un punto P del espacio ordinario:

$$P: \begin{cases} \pi_1: d_1(1-x-y-z) + f_1 x + g_1 y + h_1 z = 0 & \rightarrow [d_1, f_1, g_1, h_1] \\ \pi_2: d_2(1-x-y-z) + f_2 x + g_2 y + h_2 z = 0 & \rightarrow [d_2, f_2, g_2, h_2] \\ \pi_3: d_3(1-x-y-z) + f_3 x + g_3 y + h_3 z = 0 & \rightarrow [d_3, f_3, g_3, h_3] \end{cases}$$

Cualquier plano π combinación lineal de estos tres planos pasa por este punto:

$$\pi = (1-k-l)\pi_1 + k\pi_2 + l\pi_3 \quad k, l \in \mathbb{R}$$

$$\pi: ((1-k-l)d_1 + k d_2 + l d_3)(1-x-y-z) + ((1-k-l)f_1 + k f_2 + l f_3)x$$

$$+((1-k-l)g_1 + k g_2 + l g_3)y + ((1-k-l)h_1 + k h_2 + l h_3)z = 0$$

lo que también se refiere como que el plano π pertenece a la *estrella de planos* de P . En consecuencia, el punto P viene descrito por cualquier combinación lineal de los tres puntos del espacio dual correspondientes a estos planos.

$$[d, f, g, h] = (1-k-l)[d_1, f_1, g_1, h_1] + k[d_2, f_2, g_2, h_2] + l[d_3, f_3, g_3, h_3]$$

Y ésta es la ecuación de un plano del espacio dual que contiene a los tres puntos duales. En definitiva, un punto del espacio ordinario corresponde a un plano del espacio dual. Veamos un ejemplo. Supongamos que $P(x, y, z) = (1, 3, -2)$. Entonces sus coordenadas baricéntricas son:

$$P(1-x-y-z, x, y, z) = (-1, 1, 3, -2)$$

Tomemos tres planos independientes cualesquiera que contengan a este punto:

$$\begin{cases} \pi_1 : & 2x + y - z = 7 \\ \pi_2 : & x - y + z = -4 \\ \pi_3 : & x - 2y - z = -3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Ahora busquemos las coordenadas duales de estos planos. Para ello escribámoslos en coordenadas baricéntricas:

$$\begin{cases} \pi_1 : & -7(1-x-y-z) - 5x - 6y - 8z = 0 \rightarrow [-7, -5, -6, -8] \\ \pi_2 : & 4(1-x-y-z) + 5x + 3y + 5z = 0 \rightarrow [4, 5, 3, 5] \\ \pi_3 : & 3(1-x-y-z) + 4x + y + 2z = 0 \rightarrow [3, 4, 1, 2] \end{cases}$$

Las coordenadas duales de estos planos son homogéneas y no están normalizadas. Si las normalizamos obtenemos:

$$[7/26, 5/26, 6/26, 8/26], [4/17, 5/17, 3/17, 5/17], [3/10, 4/10, 1/10, 2/10]$$

lo que quiere decir que las coordenadas cartesianas duales $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de estos planos son:

$$\pi_1[\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1] = [5/26, 6/26, 8/26]$$

$$\pi_2[\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2] = [5/17, 3/17, 5/17]$$

$$\pi_3[\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3] = [4/10, 1/10, 2/10]$$

Estos tres puntos duales generan un plano en el espacio dual. Podemos obtenerlo a partir de la ecuación baricéntrica de un plano:

$$\begin{vmatrix} 1-x-y-z & x & y & z \\ 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1-x_3-y_3-z_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

donde también pueden utilizarse coordenadas homogéneas, pues la multiplicación de una fila por una constante no altera un determinante que sea nulo. Así pues tenemos:

$$P: \begin{vmatrix} 1-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z} & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ 7 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\bar{x}-\bar{y}-\bar{z})-\bar{x}-3\bar{y}+2\bar{z}=0$$

Comprobemos que otro plano de la estrella de planos de P tiene unas coordenadas duales que cumplen esta ecuación. Por ejemplo $\pi: 3x+2y+5z=-1$. Pasemos a coordenadas baricéntricas:

$$\pi: (1-x-y-z)+4x+3y+6z=0 \rightarrow [1, 4, 3, 6]$$

$$\pi[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}] = [4/14, 3/14, 6/14]$$

Sustituyendo las coordenadas duales de π en la ecuación del plano dual de P se comprueba que la cumple. Es decir, el punto dual π pertenece al plano dual P , que es el enunciado dual de que el plano π pertenece a la estrella de planos del punto P del espacio común.

Puntos, rectas y planos del infinito

Hemos visto que cualquier punto R de la recta $\overline{PQ}$ puede escribirse como:

$$R = (1-k)P + kQ$$

Cuando k crece indefinidamente (figura 5.4) obtenemos un punto del infinito, el mismo que se obtiene cuando k decrece indefinidamente. Así pues, estrictamente hablando $k \in \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, es decir, k puede tomar cualquier valor de la recta real extendida, que incluye el infinito. El artificio algebraico que permite describir los puntos del infinito son las coordenadas homogéneas, que son proporcionales a las baricéntricas. Por ejemplo, las coordenadas homogéneas de cualquier punto R sobre la recta $\overline{PQ}$ son:

$$R = (a, b) = \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b} \right) \Rightarrow k = \frac{b}{a+b}$$

donde hemos pasado a coordenadas baricéntricas dividiendo por la suma de coordenadas. Aunque multipliquemos las coordenadas homogéneas por una constante c siguen representando al mismo punto:

$$R = (a, b) = (ca, cb)$$

Si la suma de coordenadas vale cero, entonces se trata de un punto del infinito:

$$R = (a, -a) = \left(\frac{a}{0}, -\frac{a}{0} \right) = (\infty, \infty) \quad \Rightarrow \quad k = \infty$$

porque sus coordenadas baricéntricas son infinito.

Como ya vimos en la geometría del plano⁴, la recta r_∞ con coordenadas duales:

$$r_\infty = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$$

es una recta cuyos puntos están todos ubicados en el infinito y a la que se le llama recta del infinito. Preguntémonos, pues, en la geometría del espacio, qué características tiene el plano π cuyas coordenadas baricéntricas son idénticas entre sí:

$$\pi = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$$

De acuerdo con esto su ecuación sería:

$$\pi: (1 - x - y - z) + x + y + z = 0$$

Lo cual es imposible a menos que $x = y = z = \infty$. Veamos la interpretación geométrica. El plano dado por las coordenadas $[0, 1, 1, 1]$ es el plano $x + y + z = 0$. Este plano es paralelo al plano fundamental $1 - x - y - z = 0$, por lo que se cortan en una recta del infinito. Cualquier combinación lineal de ambos planos, como por ejemplo $[1, 1, 1, 1]$ es un plano perteneciente al haz de planos de esta recta del infinito, como pudiera ser un plano paralelo a ambos. Sin embargo, también podemos considerar el plano dado por las coordenadas $[1, 1, 1, 0]$ que tiene por ecuación:

$$(1 - x - y - z) + x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1$$

Este plano es paralelo al plano fundamental $z = 0$, por lo que se cortan en una recta del infinito distinta de la anterior. En consecuencia el plano dado por coordenadas homogéneas idénticas como $[1, 1, 1, 1]$ es un plano que contiene dos rectas distintas del infinito. Sean cuales sean las combinaciones, este plano siempre pertenece al haz de una recta del infinito, por lo que este plano yace en el infinito. En consecuencia este plano tiene todos sus puntos ubicados en el infinito. Se le llama *plano del infinito* y lo denotaremos por π_∞ .

⁴ *Ibidem*, p. 47.

$$\pi_{\infty} : \frac{1}{4}(1-x-y-z) + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \infty \\ y = \infty \\ z = \infty \end{cases}$$

En el espacio dual, los planos del tetraedro fundamental son cuatro puntos de otro tetraedro y el plano del infinito es su baricentro $\pi_{\infty} = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$.

Así como sólo hay un plano del infinito, en cambio, como hemos podido ver, hay distintas (de hecho un número infinito) de rectas del infinito. Se determina cualquier recta del infinito como la intersección del plano del infinito con cualquier otro plano. Por ejemplo:

$$r_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es una recta del infinito. Si imaginamos el plano del infinito como una esfera que envuelve al origen de coordenadas (figura 5.11), una recta del infinito correspondería a la intersección de la superficie de la esfera con un plano cualquiera que pasara por el origen de coordenadas. Así pues, la recta del infinito r_{∞} es la intersección del plano $\pi_1[1, 2, 1, -1]$ con el plano del infinito $\pi_{\infty}[1, 1, 1, 1]$. La recta del infinito s_{∞} es la intersección del plano π_2 con el plano del infinito π_{∞} . Así mismo, las dos rectas del infinito r_{∞} y s_{∞} se cortan en un punto del infinito P_{∞} , representando los dos extremos de la recta intersección de π_1 y π_2 el mismo punto del infinito.

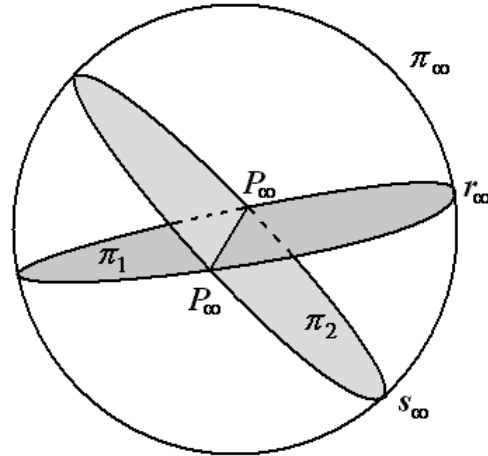


Figura 5.11

Una recta del infinito queda determinada por dos puntos del infinito, es decir por dos puntos cuyas coordenadas homogéneas sumen cero. Podemos preguntarnos cuál es la matriz de puntos que representa a la recta del infinito dada en el ejemplo anterior. Impongamos esta condición en su ecuación matricial y obtendremos:

$$\begin{pmatrix} -b_1 - c_1 - d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_2 - c_2 - d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

lo que se reduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} b_1 - 2d_1 = 0 \\ b_2 - 2d_2 = 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, dos puntos de esta recta pueden ser $(-4, 2, 1, 1)$ y $(-3, 2, 0, 1)$, que equivalen a dos vectores:

$$(-4, 2, 1, 1) = -4O + 2A + B + C = 2OA + OB + OC = 2e_1 + e_2 + e_3$$

$$(-3, 2, 0, 1) = -3O + 2A + C = 2OA + OC = 2e_1 + e_3$$

La recta del infinito determinada por estos dos vectores es la misma que la intersección del plano del infinito con el plano $(1 - x - y - z) + 2x + y - z = 0$, es decir, $x - 2z + 1 = 0$. De hecho los vectores anteriores son vectores directores de este plano. Podemos considerar a la recta del infinito:

$$r = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como el contorno de dicho plano $x - 2z + 1 = 0$.

La teoría de la extensión

Hermann Grassmann definió el producto exterior en su *Ausdehnungslehre* de 1844⁵ como aquel producto que nos permite extender una magnitud geométrica a dimensiones superiores. En la segunda edición de 1862, Grassmann formalizó el producto exterior de puntos (véase la página 141 de *Extensión Theory*⁶), que Peano retomó⁷. Un producto exterior de dos puntos es un elemento de línea, que representa a la recta pero que también nos da la longitud del segmento que va de un punto a otro. Un producto exterior de tres puntos es igual a un elemento de superficie, es decir, a un plano pero también al paralelogramo que los tiene por tres de sus vértices, siendo el triángulo la mitad de este producto exterior. Igualmente, el producto exterior de cuatro puntos es un elemento de volumen, es decir, representa el espacio pero también es igual al paralelepípedo que configuran, siendo el tetraedro que los tiene por vértices la sexta parte de este producto exterior. De donde se sigue la identidad no sólo en dirección sino también en módulo. Lógicamente deben usarse las coordenadas baricéntricas de los puntos dados (no las homogéneas) para los cálculos de las extensiones. Esto excluye a los puntos del infinito, cuyas coordenadas baricéntricas son infinitas y que generan extensiones infinitas.

⁵ H. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre* primera edición (1844). Fue traducido al español por Emilio Óscar Roxín en *Teoría de la extensión*, Espasa-Calpe Argentina (Buenos Aires, 1947).

⁶ H. Grassmann, *Extension Theory* (2000), colección *History of Mathematics* vol. 19, American Mathematical Society and London Mathematical Society. Traducción de la segunda edición de *Die Ausdehnungslehre* (1862) por Lloyd C. Kannenberg.

⁷ G. Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (1888), Nino Aragno editore (Turín, 2010). Véase también *Saggio di calcolo geometrico* (1896) en *Opere scelte*, vol. III, p. 167-186, ed. Cremonese (Roma, 1959).

Veamos cómo es el producto exterior de dos puntos. Dados dos puntos P_1 y P_2 dados en coordenadas baricéntricas:

$$P_1 = (1 - x_1 - y_1 - z_1)O + x_1A + y_1B + z_1C$$

$$P_2 = (1 - x_2 - y_2 - z_2)O + x_2A + y_2B + z_2C$$

su producto exterior es:

$$\begin{aligned} P_1P_2 = & \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 \end{vmatrix} OA + \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & y_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & y_2 \end{vmatrix} OB + \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & z_2 \end{vmatrix} OC \\ & + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} AB + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} AC + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} BC \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las igualdades vectoriales $AB = OB - OA$, $AC = OC - OA$ y que $BC = OC - OB$ obtenemos:

$$P_1P_2 = \begin{vmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 1-x_2 & x_2 \end{vmatrix} OA + \begin{vmatrix} 1-y_1 & y_1 \\ 1-y_2 & y_2 \end{vmatrix} OB + \begin{vmatrix} 1-z_1 & z_1 \\ 1-z_2 & z_2 \end{vmatrix} OC$$

$$P_1P_2 = (x_2 - x_1)OA + (y_2 - y_1)OB + (z_2 - z_1)OC$$

que es la expresión habitual de un segmento dado por dos puntos en coordenadas cartesianas. Por lo tanto, el producto exterior de dos puntos dados en coordenadas baricéntricas genera el elemento de línea no sólo en dirección sino también en extensión, es decir genera un segmento.

Veamos el producto exterior de tres puntos.

$$\begin{aligned} P_1P_2P_3 = & \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & y_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & y_2 \\ 1-x_3-y_3-z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} OAB + \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & x_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & x_2 & z_2 \\ 1-x_3-y_3-z_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} OAC \\ & + \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1-z_1 & y_1 & z_1 \\ 1-x_2-y_2-z_2 & y_2 & z_2 \\ 1-x_3-y_3-z_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} OBC + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ABC \end{aligned}$$

Siendo que las áreas orientadas cumplen $ABC = OAB + OBC + OCA$ tenemos:

$$P_1P_2P_3 = \begin{vmatrix} 1-x_1-y_1 & x_1 & y_1 \\ 1-x_2-y_2 & x_2 & y_2 \\ 1-x_3-y_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} OAB + \begin{vmatrix} 1-x_1-z_1 & x_1 & z_1 \\ 1-x_2-z_2 & x_2 & z_2 \\ 1-x_3-z_3 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} OAC + \begin{vmatrix} 1-y_1-z_1 & y_1 & z_1 \\ 1-y_2-z_2 & y_2 & z_2 \\ 1-y_3-z_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} OBC$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} OAB + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} OAC + \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} OBC$$

Restando la primera fila de los determinantes a las segunda y tercera filas obtenemos:

$$P_1 P_2 P_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} OAB + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} OAC + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} OBC$$

que expresa el producto exterior de vectores:

$$P_1 P_2 P_3 = P_1 P_2 \wedge P_1 P_3$$

El triángulo correspondería a la mitad de este producto exterior.

Y por último ya hemos visto también en la página 68 que el paralelepípedo generado por cuatro puntos viene dado por:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} 1 - x_1 - y_1 - z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 - x_2 - y_2 - z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 - x_3 - y_3 - z_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 - x_4 - y_4 - z_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} OABC$$

que podemos escribir como

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} OABC = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} OABC$$

lo que expresa el volumen del paralelepípedo como el producto exterior de tres de sus lados no paralelos:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = P_1 P_2 \wedge P_1 P_3 \wedge P_1 P_4$$

y el volumen del tetraedro como una sexta parte de éste.

La teoría de la extensión de Grassmann es completamente general e independiente del carácter euclidiano o pseudoeuclidiano de un hiperespacio dado de dimensión n . Igualmente las coordenadas baricéntricas y el cálculo baricéntrico de Möbius utilizan una base de puntos cualesquiera, no necesariamente situados en unos ejes de coordenadas perpendiculares. Para un *simplex* con n vértices⁸, su extensión viene dada por:

⁸ Véase A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, 5ª edición, vol. 3, p. 178. Alianza Universidad (Madrid, 1982).

$$\text{Simplex}_{P_1 P_2 \dots P_n} = \frac{1}{(n-1)!} P_1 P_2 \dots P_n$$

donde $P_1 P_2 \dots P_n$ expresa el producto exterior de puntos dados en coordenadas baricéntricas. Si el espacio afín que contiene estos puntos tiene dimensión vectorial menor que $n-1$ los puntos son siempre linealmente dependientes y su producto exterior es nulo. Por lo tanto, sólo existen *simplexs* con n vértices en espacios con dimensión vectorial $m \geq n-1$. Por ejemplo, en el espacio ordinario $m=3$ y podemos tener segmentos ($n=2$), triángulos ($n=3$) y tetraedros ($n=4$). En el espacio-tiempo tenemos además hipertetraedros con cinco vértices ($n=5$):

$$\text{Hipertetraedro}_{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5} = \frac{1}{24} P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$$

Su hipervolumen se calcula pues tomando la venticuatroava parte del determinante de sus coordenadas baricéntricas espacio-temporales.

Ejercicios

- 5.1 Calcúlense las coordenadas baricéntricas de la recta $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$ en función de la base de rectas determinada por el tetraedro fundamental con vértices $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
- 5.2 Dado cualquier sistema de coordenadas definido por los puntos $\{O, A, B, C\}$ y sus transformados $\{O', A', B', C'\}$, se define una *afinidad* como la transformación geométrica que hace corresponder cada punto D con su imagen D' mediante la transformación:

$$D = (1 - x - y - z)O + xA + yB + zC \rightarrow D' = (1 - x - y - z)O' + xA' + yB' + zC'$$

Probar que:

- Una afinidad hace corresponder rectas a rectas.
 - Una afinidad es equivalente a una transformación lineal de coordenadas
 - Una afinidad preserva las coordenadas expresada en cualquier otro conjunto de puntos independientes diferente de la base dada.
 - Una afinidad hace corresponder un paralelogramo a otro paralelogramo y, por lo tanto transforma rectas paralelas en rectas paralelas.
 - Una afinidad conserva la razón simple DE/DF^{-1} para cualquier tres puntos alineados D, E y F .
- 5.3 Demostrar que el recinto del espacio cuyas coordenadas baricéntricas son todas positivas corresponde al interior del volumen del tetraedro fundamental.
- 5.4 Dado un sistema de coordenadas $\{O; A, B, C\}$ y cualquier punto R con coordenadas (x, y, z) demostrar que:

$$1 - x - y - z = \frac{\text{volumen } RABC}{\text{volumen } OABC} \quad x = \frac{\text{volumen } ORBC}{\text{volumen } OABC}$$

$$y = \frac{\text{volumen } OARC}{\text{volumen } OABC} \quad z = \frac{\text{volumen } OABR}{\text{volumen } OABC}$$

- 5.5 Dadas dos rectas en forma matricial deducir qué condición deben cumplir para que se corten en el espacio o para que sean paralelas.
- 5.6 Dados dos planos del espacio en coordenadas baricéntricas deducir qué condición deben cumplir para que sean paralelos.
- 5.7 Dados tres planos del espacio cualesquiera en coordenadas baricéntricas, deducir de qué manera podemos determinar las coordenadas baricéntricas de su punto de intersección, aunque sea un punto del infinito.
- 5.8 Estudiar la incidencia de dos rectas del espacio a partir de sus ecuaciones matriciales.
- 5.9 ¿Cuál es la relación que deben tener las componentes de una combinación lineal de las rectas de la base de rectas (aristas del tetraedro fundamental $OABC$) para que pueda representar una recta del espacio? (Ayuda: mirar *syzygies*).
- 5.10 Dada la recta $2\overline{OA} + 3\overline{OB} - \overline{OC} + \overline{AB} - 2\overline{BC} + \overline{AC}$ y el punto $P = 4O - 2A + 3B - 5C$, obtener la ecuación del plano que contiene a ambos.
- 5.11 Dadas dos rectas en función de la base de rectas, deducir qué condición deben cumplir para saber si son coplanares, es decir si se cortan o bien son paralelas.