6. GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO

Volumen del tetraedro

El volumen de un tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo que lo contiene (véase figura 5.6). El volumen del paralelepípedo es igual al producto exterior de tres aristas cualesquiera no paralelas. El resultado es positivo o negativo según sea la orientación de las tres segmentos igual u opuesta a la de los vectores de los ejes de coordenadas. Para un tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* y *D* su volumen viene dado por:

$$V = \frac{1}{6} AB \wedge AC \wedge AD = \frac{1}{6} AB \wedge BC \wedge CD$$

También pueden descomponerse los segmentos en función de los vectores posición lo que da como resultado:

$$V = -A \wedge B \wedge C + A \wedge B \wedge D - A \wedge C \wedge D + B \wedge C \wedge D$$

Medianas y baricentro

Sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro vértices del tetraedro. Se define una *mediana* como el segmento que va desde un vértice (por ejemplo *A*) al baricentro de su cara opuesta *BCD*. En total hay cuatro medianas, una para cada vértice. Estas cuatro medianas se cortan en un punto llamado *baricentro* del tetraedro, como se demuestra a continuación. Por ejemplo, la intersección *G* de la mediana del vértice *A* con la del vértice *B* (figura 6.1), en caso de que exista (en el espacio podrían no cortarse), vendrá dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} G = \alpha\, A + (1-\alpha)\dfrac{B+C+D}{3} \\ G = \beta\, B + (1-\beta)\dfrac{A+C+D}{3} \end{cases}$$

Igualando encontramos:

$$\alpha\, A + (1-\alpha)\frac{B+C+D}{3} = \beta\, B + (1-\beta)\frac{A+C+D}{3}$$

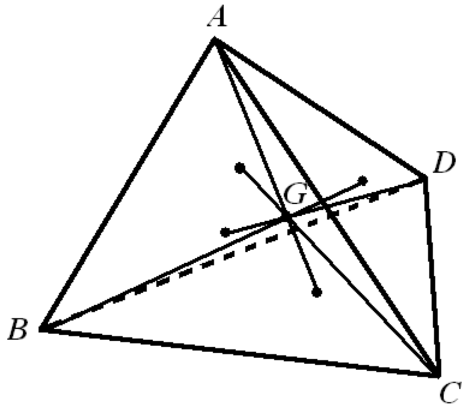

Figura 6.1

$$A\left(\alpha - \frac{1-\beta}{3}\right) + B\left(\frac{1-\alpha}{3} - \beta\right) + C\left(\frac{-\alpha+\beta}{3}\right) + D\left(\frac{-\alpha+\beta}{3}\right) = 0$$

Como los cuatro vértices no son coplanares, es decir son independientes, todos los coeficientes han de anularse y, por tanto, la solución es $\alpha = \beta = 1/4$, de donde se sigue la ecuación del baricentro:

$$G = \frac{A + B + C + D}{4}$$

Esta fórmula es invariante bajo permutación cíclica de los vértices, luego cualquier otra pareja de medianas se cortan también en el mismo punto G, el baricentro.

Circuncentro, centro de la esfera circunscrita

Sea O el centro de la esfera circunscrita al tetraedro $ABCD$, su *circuncentro* (figura 6.2). La condición que debe cumplir es que la distancia del circuncentro O a los cuatro vértices sea la misma:

$$OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2$$

Desarrollamos la primera ecuación:

$$(A - O)^2 = (B - O)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad A^2 - 2A \cdot O + O^2 = B^2 - 2B \cdot O + O^2$$

Aislando O tenemos:

$$2O \cdot (B - A) = B^2 - A^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2O \cdot AB = B^2 - A^2$$

Con esta ecuación y las análogas obtenidas de las otras condiciones, llegamos a un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} O \cdot AB = \dfrac{B^2 - A^2}{2} \\ O \cdot BC = \dfrac{C^2 - B^2}{2} \\ O \cdot CD = \dfrac{D^2 - C^2}{2} \end{cases}$$

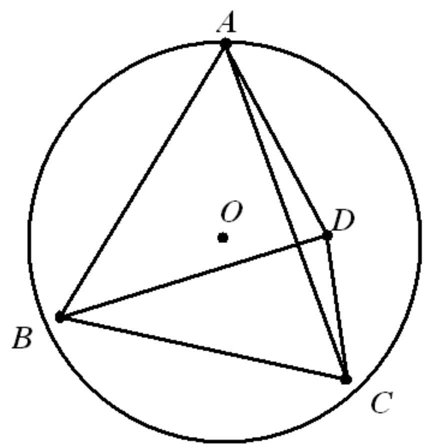

Figura 6.2

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a \cdot u = d \\ b \cdot u = e \\ c \cdot u = f \end{cases}$$

escribamos explícitamente las componentes de los vectores a, b, c y u:

$$\begin{cases} a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z = d \\ b_x u_x + b_y u_y + b_z u_z = e \\ c_x u_x + c_y u_y + c_z u_z = f \end{cases}$$

Por la regla de Cramer tenemos:

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} d & a_y & a_z \\ e & b_y & b_z \\ f & c_y & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} = \frac{d\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - e\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}}{\det(a, b, c)}$$

$$u_y = \frac{\begin{vmatrix} a_x & d & a_z \\ b_x & e & b_z \\ c_x & f & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} = \frac{-d\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}}{\det(a, b, c)}$$

$$u_z = \frac{\begin{vmatrix} a_x & a_y & d \\ b_x & b_y & e \\ c_x & c_y & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} = \frac{d\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} - e\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} + f\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}{\det(a, b, c)}$$

Estos tres resultados se pueden reunir en la igualdad:

$$u = (d\, b \wedge c + e\, c \wedge a + f\, a \wedge b)(a \wedge b \wedge c)^{-1}$$

Así pues, la solución del sistema de ecuaciones para el circuncentro es:

$$O = \left[\left(B^2 - A^2\right) BC \wedge CD + \left(C^2 - B^2\right) CD \wedge AB + \left(D^2 - C^2\right) AB \wedge BC\right](2AB \wedge BC \wedge CD)^{-1}$$

Démosle una expresión simétrica bajo permutación cíclica:

$$O = \left[- A^2 BC \wedge CD - B^2 CD \wedge AC - C^2 AB \wedge BD + D^2 AB \wedge BC\right](2AB \wedge BC \wedge CD)^{-1}$$

$$O = \left[- A^2 BC \wedge CD + B^2 CD \wedge DA - C^2 DA \wedge AB + D^2 AB \wedge BC\right](2AB \wedge BC \wedge CD)^{-1}$$

Cuando se realiza una permutación cíclica de los vértices, $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to A$, todos los términos del primer paréntesis cambian de signo. Ello es debido al cambio de la orientación del tetraedro, que cambia también el signo del volumen $AB \wedge BC \wedge CD$, con lo cual el circuncentro O queda invariante.

Punto de Monge

El *punto de Monge M* es la intersección de los planos que pasan por el punto medio de cada arista y son perpendiculares a la arista opuesta. Como hay seis aristas, hay seis planos distintos. El punto M es la intersección de tres de estos planos pero los otros tres planos también los cortan en el mismo punto M como demostraremos a continuación.

Puesto que el punto M pertenece al plano que pasa por el punto medio $\frac{C+D}{2}$ de la arista CD y es perpendicular a la arista AB cumplirá la ecuación:

$$\frac{MC+MD}{2}\cdot AB=0$$

Puesto que el punto M también pertenece al plano que pasa por el punto medio $\frac{A+D}{2}$ de la arista AD y es perpendicular a la arista BC cumplirá la ecuación:

$$\frac{MA+MD}{2}\cdot BC=0$$

Finalmente, puesto que el punto M pertenece también al tercer plano que pasa por el punto medio $\frac{A+B}{2}$ de la arista AB y es perpendicular a CD cumplirá la ecuación:

$$\frac{MA+MB}{2}\cdot CD=0$$

Así pues, el punto M intersección de estos tres planos viene dado por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{MC+MD}{2}\cdot AB=0\\ \dfrac{MA+MD}{2}\cdot BC=0\\ \dfrac{MA+MB}{2}\cdot CD=0\end{cases}$$

Si sumamos un par de ecuaciones, por ejemplo la primera y la segunda, obtenemos:

$$(MC+MD)\cdot AB+(MA+MD)\cdot BC=MC\cdot AB+MD\cdot AC+MA\cdot BC$$

$$=C\cdot B-M\cdot B-C\cdot A+M\cdot A+MD\cdot AC+A\cdot C-M\cdot C-A\cdot B+M\cdot B$$

$$=C\cdot B+M\cdot A+MD\cdot AC-M\cdot C-A\cdot B=MB\cdot AC+MD\cdot AC=0$$

$$\frac{MB + MD}{2} \cdot AC = 0$$

Es decir, *M* pertenece también al plano que pasa por $\frac{B+D}{2}$ y es perpendicular a AC. Análogamente, las sumas de las otras dos parejas rinden ecuaciones que demuestran que *M* también pertenece a los otros dos planos. Así pues, los seis planos se cortan en un solo punto, el punto de Monge *M*.

Si aislamos el punto de Monge en el sistema de ecuaciones encontramos:

$$\begin{cases} M \cdot AB = \dfrac{C+D}{2} \cdot AB \\ M \cdot BC = \dfrac{A+D}{2} \cdot BC \\ M \cdot CD = \dfrac{A+B}{2} \cdot CD \end{cases}$$

Según la resolución de un sistema de ecuaciones que hemos desarrollado antes, la solución de este sistema es:

$$M = \left(\frac{C+D}{2} \cdot AB \; BC \wedge CD + \frac{D+A}{2} \cdot BC \; CD \wedge AB + \frac{A+B}{2} \cdot CD \; AB \wedge BC \right) \left(AB \wedge BC \wedge CD \right)^{-1}$$

que es una fórmula invariante bajo permutación cíclica de los vértices.

Recta de Euler del tetraedro

Recordemos que el circuncentro O y el punto de Monge M vienen dados por los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} O \cdot AB = \dfrac{B^2 - A^2}{2} \\ O \cdot BC = \dfrac{C^2 - B^2}{2} \\ O \cdot CD = \dfrac{D^2 - C^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} M \cdot AB = \dfrac{C+D}{2} \cdot AB \\ M \cdot BC = \dfrac{A+D}{2} \cdot BC \\ M \cdot CD = \dfrac{A+B}{2} \cdot CD \end{cases}$$

Sumando ambos sistemas obtenemos:

$$\begin{cases} (O+M) \cdot AB = \dfrac{B^2 - A^2}{2} + \dfrac{C+D}{2} \cdot AB \\ (O+M) \cdot BC = \dfrac{C^2 - B^2}{2} + \dfrac{A+D}{2} \cdot BC \\ (O+M) \cdot CD = \dfrac{D^2 - C^2}{2} + \dfrac{A+B}{2} \cdot CD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{O+M}{2} \cdot AB = \dfrac{A+B+C+D}{4} \cdot AB \\ \dfrac{O+M}{2} \cdot BC = \dfrac{A+B+C+D}{4} \cdot BC \\ \dfrac{O+M}{2} \cdot CD = \dfrac{A+B+C+D}{4} \cdot CD \end{cases}$$

De donde se concluye que el baricentro G es el punto medio del circuncentro O y del punto de Monge M (figura 6.3):

$$\frac{O+M}{2}=\frac{A+B+C+D}{4}=G$$

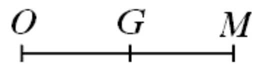

Figura 6.3

Si, en cambio, restamos ambos sistemas encontramos:

$$\begin{cases} OM\cdot AB=\dfrac{-A-B+C+D}{2}\cdot AB \\ OM\cdot BC=\dfrac{A-B-C+D}{2}\cdot BC \\ OM\cdot CD=\dfrac{A+B-C-D}{2}\cdot CD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM\cdot AB=\dfrac{-DA+BC}{2}\cdot AB \\ OM\cdot BC=\dfrac{-AB+CD}{2}\cdot BC \\ OM\cdot CD=\dfrac{DA-BC}{2}\cdot CD \end{cases}$$

cuya solución es:

$$OM=\left(\frac{-DA+BC}{2}\cdot AB\ BC\wedge CD+\frac{-AB+CD}{2}\cdot BC\ CD\wedge AB+\frac{DA-BC}{2}\cdot CD\ AB\wedge BC\right)$$
$$(AB\wedge BC\wedge CD)^{-1}$$

El producto geométrico permite escribir el primer paréntesis en una forma más simétrica:

$$OM=(AB\ BC\ CD\ DA-BC\ CD\ DA\ AB+CD\ DA\ AB\ BC-DA\ AB\ BC\ CD)$$
$$(4AB\wedge BC\wedge CD)^{-1}$$

La *recta de Euler* de un tetraedro es la recta que contiene al baricentro G, al circuncentro O y al punto de Monge M. Su vector director es OM y su expresión es invariante bajo permutación cíclica de los vértices del tetraedro, aunque cada permutación cambie los signos de cada paréntesis.

Incentro

El incentro I es el punto que está a la misma distancia de las cuatro caras del tetraedro (figura 6.4). Supongamos, por analogía con el incentro de un triángulo, que el incentro I de un tetraedro con vértices $ABCD$ viene dado por la siguiente fórmula invariante bajo permutación cíclica de los vértices:

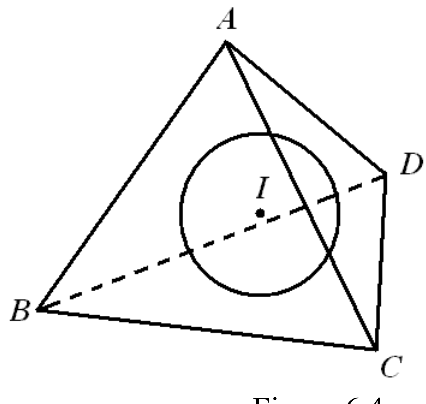

Figura 6.4

$$I=\frac{A\,|BC\wedge CD|+B\,|CD\wedge DA|+C\,|DA\wedge AB|+D\,|AB\wedge BC|}{|BC\wedge CD|+|CD\wedge DA|+|DA\wedge AB|+|AB\wedge BC|}$$

Calculemos los vectores que van de los vértices A y B al incentro I:

$$AI = I - A = \frac{AB\,|CD \wedge DA| + AC\,|DA \wedge AB| + AD\,|AB \wedge BC|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|}$$

$$BI = \frac{BA\,|CD \wedge DA| + BC\,|DA \wedge AB| + BD\,|AB \wedge BC|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|}$$

Y ahora calculemos los siguientes productos exteriores:

$$AB \wedge AC \wedge AI = \frac{AB \wedge AC \wedge AD\,|AB \wedge BC|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|}$$

$$AC \wedge AD \wedge AI = \frac{AC \wedge AD \wedge AB\,|CD \wedge DA|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|}$$

$$AD \wedge AB \wedge AI = \frac{AD \wedge AB \wedge AC\,|DA \wedge AB|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|}$$

$$BC \wedge BD \wedge BI = \frac{BC \wedge BD \wedge BA\,|CD \wedge DA|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|}$$

para comprobar que efectivamente la fórmula propuesta para I cumple la condición de equidistancia a las cuatro caras del tetraedro:

$$r = \frac{|AB \wedge AC \wedge AI|}{|AB \wedge BC|} = \frac{|AC \wedge AD \wedge AI|}{|CD \wedge DA|} = \frac{|AD \wedge AB \wedge AI|}{|DA \wedge AB|} = \frac{|BC \wedge BD \wedge BI|}{|BC \wedge BD|}$$

ya que $AB \wedge AC \wedge AD = AC \wedge AD \wedge AB = AD \wedge AB \wedge AC = -BC \wedge BD \wedge BA$. Estos cocientes son justamente el radio r de la esfera inscrita en el tetraedro y su valor es igual a:

$$r = \frac{|AB \wedge AC \wedge AD|}{|BC \wedge CD| + |CD \wedge DA| + |DA \wedge AB| + |AB \wedge BC|} = \frac{3V}{S}$$

ya que el numerador es seis veces el volumen V del tetraedro y el denominador es el doble de la superficie S del tetraedro, la suma de las áreas de sus caras.

Ejercicios

6.1 Demuéstrese que los 3 segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro se cruzan en el baricentro.

6.2 Demostrar que el radio R de la esfera circunscrita a un tetraedro $ABCD$ viene dado por:

$$R = \frac{\left|AB^2\, BC \wedge CD + BC^2 CD \wedge DA + CD^2 AB \wedge BC\right|}{2\left|AB \wedge BC \wedge CD\right|}$$

6.3 Demuéstrese la afirmación de que el vector de la recta de Euler de un tetraedro *ABCD* es:

$$OM = \left(AB\ BC\ CD\ DA - BC\ CD\ DA\ AB + CD\ DA\ AB\ BC - DA\ AB\ BC\ CD\right)$$
$$\left(4AB \wedge BC \wedge CD\right)^{-1}$$

6.4 Sea *ABCD* un tetraedro, y sea π un plano que corta las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ en los puntos *M*, *N*, *E* y *F* respectivamente. Si para diferentes posiciones de π, *MNEF* es un paralelogramo, demostrar que el centro O de este paralelogramo recorre entonces una recta fija. Demostrar también que el área máxima de este paralelogramo se obtiene cuando *M*, *N*, *E* y *F* son los puntos medios de las respectivas aristas.