

TEMA 1. La llei d'Ohm i les lleis de Kirchoff

1. Medis dielèctrics.

Fins ara heu estudiat com una càrrega elèctrica pertorba els punts de l'espai del seu voltant. Aquesta pertorbació afecta a altres càrregues que estiguin prop d'ella. Com ja sabeu aquestes pertorbacions són el camp elèctric i el potencial elèctric.

No només es poden aconseguir camp i potencial elèctrics en el buit si no que també poden existir en medis materials (aire, metalls, líquids, gasos o sòlids.) El camp elèctric en un medi material, creat per una càrrega puntual, pren un valor menor que en el buit. Aquest efecte es reflecteix en el que es coneix com **constant dielèctrica absoluta del medi** (ϵ_0).

La constant dielèctrica absoluta del medi i la constant de Coulomb estan relacionades per l'expressió:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon}$$

On a la vegada, la constant dielèctrica del medi s'expressa com a producte de la constant dielèctrica en el buit i la constant dielèctrica relativa ($\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$). A la taula següent podeu observar els diferents valors de la constant de Coulomb, la constant dielèctrica absoluta i la constant dielèctrica relativa per diferents medis materials.

Medi.	$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon}$	$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$	ϵ_r
Buit	$9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$	1
Aire	$9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$	1,00000...
Vidre ¹	$1,79 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$	$4,43 \cdot 10^{-11} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$	5

2. Condensadors.

Un condensador no és més que dues plaques de material conductor separades entre si una distància **D** per un material dielèctric. En un costat de la placa la càrrega elèctrica que s'acumula és positiva i a l'altra és negativa. (Q+ i Q-). La càrrega queda repartida uniformement per la superfície de la placa.

Definim la densitat superficial σ com el quocient entre la càrrega i la superfície d'una de les plaques.

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Entre les dues plaques del condensador apareix un camp elèctric uniforme i de valor constant. El seu valor en mòdul ve donat per:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}$$

Aquest camp va dirigit sempre de la placa positiva a la negativa.

¹ El vidre té una constant dielèctrica relativa que pren valors que estan entre 2 i 9.

Com ja sabeu, podem relacionar el camp elèctric i el potencial elèctric a través del treball de les forces elèctriques i al ser el camp uniforme, aquest generarà sobre una càrrega que estigues entre les plaques una força uniforme.

$$\left. \begin{array}{l} W_F = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = Q' \cdot \vec{E} \cdot \Delta \vec{x} \\ W_F = -\Delta U = -Q' \cdot \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow -\Delta V = \vec{E} \cdot \Delta \vec{x} \Rightarrow \Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{x}$$

Si substituïm el valor del camp elèctric pel seu valor en mòdul, i si tenim present que $\Delta \vec{x}$ és un vector perpendicular a les plaques, que en mòdul és la distància entre plaques $|\Delta \vec{x}| = D$, la caiguda de tensió serà entre plaques ens quedarà²:

$$\Delta V = \pm \frac{\sigma}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot D$$

3. Capacitat d'un condensador.

La diferència de potencial i la càrrega d'un condensador són proporcionals. La constant de proporcionalitat és la **capacitat d'un condensador**.

$$Q = C \cdot \Delta V$$

La capacitat d'un condensador és mesura en farads. $[C] = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ F}$.

Pel cas d'un condensador de làmines plano paral·leles de secció S i distància entre plaques D , podem trobar una expressió per la capacitat C :

$$\left. \begin{array}{l} Q = C \cdot \Delta V \\ \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot D \\ \sigma = \frac{Q}{S} \end{array} \right\} \Rightarrow Q = C \cdot \frac{Q}{S} \cdot \frac{S}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot D$$

Simplificant la càrrega ens queda l'expressió de la **capacitat d'un condensador de làmines palnopal·leles**.

$$C = \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot S}{D}$$

Fixeu-vos que la capacitat d'un condensador només depèn de la geometria del condensador, per tant és un valor constant per a cada condensador.

4. Circuits de corrent continu.

Un sòlid conductor és un cos³ on els seus àtoms normalment estan estructurats a forma cristal·lina. Aquests àtoms formen enllaços metàl·lics on els electrons de l'enllaç⁴ poden moure's lliurement sota l'acció d'un camp elèctric. Aquest moviment dels electrons es el que coneixem per **corrent elèctric**.

² La caiguda de tensió entre plaques serà positiva o negativa segons com es mesuri aquesta diferència.

³ Normalment pensarem en sòlids metàl·lics.

⁴ Els electrons que formen l'enllaç metàl·lic s'anomenen electrons lliures.

Els electrons en un conductor es poden moure de diverses maneres, obtenint diferents tipus de corrents.

1. Corrent transitori.
2. Corrent altern.
3. Corrent continu.

El tercer és l'únic que estudiarem en aquest capítol.

5. Conductor en equilibri estàtic.

Un conductor carregat elèctricament té la càrrega elèctrica distribuïda a la seva superfície. Aquestes càrregues es trobaran en repòs ja que sobre la superfície el potencial elèctric es manté constant. La repulsió elèctrica de les partícules fa que aquestes es situïn a la superfície. Com a conseqüència d'això el camp elèctric a l'interior del conductor és nul⁵.

6. Generadors.

Considerem dos conductors A i B, en equilibri estàtic i aïllats entre si. Si unim els dos conductors amb un fil metàl·lic poden succeir diferents coses.

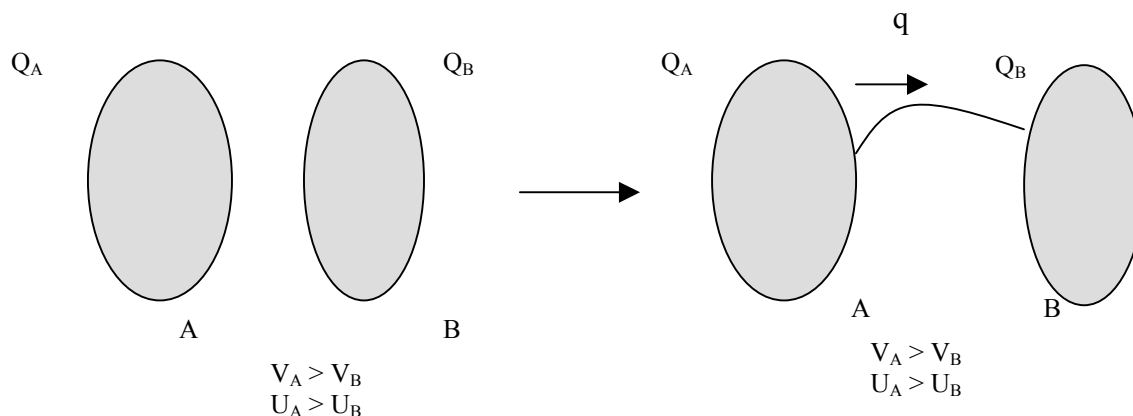
1. Que les càrregues de les superfícies de cada conductor no es moguin.
2. Que les càrregues de les superfícies d'un dels conductor es desplacin cap a l'altra.

La situació 1 ocorre quan el potencial elèctric dels dos conductors és el mateix. Les càrregues de la seva superfície tenen totes la mateixa energia potencial ($U = Q \cdot V$) i per tant no tendiran a moure's cap enlloc.

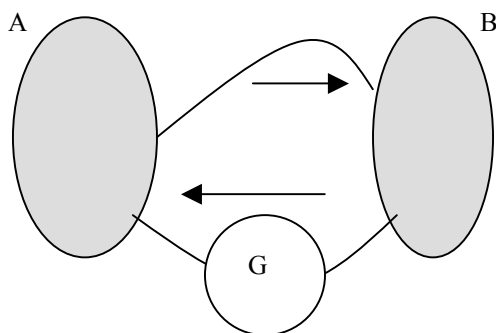
La situació 2 ocorre quan un dels conductors presenta un potencial menor que l'altra. Com que hi haurà càrregues amb una energia potencial major, aquestes tendiran a moure's cap a on la seva energia potencial disminueixi. Aquest moviment s'acabarà quan els potencials de cada un dels conductors s'igualin i l'energia de totes les càrregues sigui la mateixa. En la situació 2 el corrent elèctric que es presenta és un corrent transitori, ja que té un principi i un final.

Podem aconseguir que les càrregues es moguin, a través del fil que uneix els conductors, de forma constant. Per aconseguir un corrent continu, ens caldrà mantenir la diferència de potencial entre conductors constant. D'aquesta manera les càrregues sempre cauran cap el conductor on tinguin menys energia potencial.

Per entendre tot això us podeu guiar amb el següent conjunt de gràfics.



⁵ Veure el Teorema de Gauss.



El generador consumirà energia quan es realitzi aquest procés. Aquesta energia l'adquiriran les càrregues quan hagin perdut energia potencial. L'energia consumida ve donada per:

$$W = Q \cdot e$$

On Q és la càrrega desplaçada i e la força electromotriu del generador ideal. Un generador ideal és un generador amb un rendiment del 100%, és a dir que no presenta pèrdues d'energia. Sempre els generadors presenten pèrdues d'energia. Això és degut a que tots els generadors presenten una oposició interna al moviment de les càrregues pel seu interior. La força electromotriu dels generadors es mesura en volts. $[e]=1V$.

7. Resistència.

Considerem el fil que uneix els dos conductors. Les càrregues es mouen a través d'ell no sense trobar una oposició a aquest moviment. Aquesta dificultat al desplaçament ve donada per tres causes bàsicament.

1. La separació interatòmica dels àtoms que formen el metall. (Forces elèctriques que s'oposen al moviment).
2. Els xocs que realitzen les mateixes càrregues amb els àtoms.
3. La longitud del fil i la seva secció.

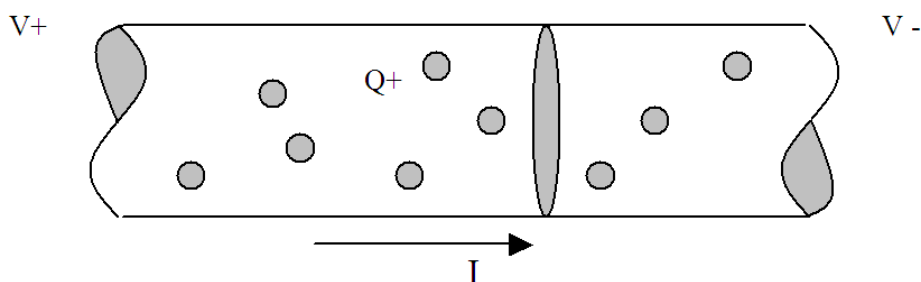
Fixeu-vos que les dues primeres depenen del tipus de material del qual està fet el fil. La tercera depèn de la geometria del fil. Aquesta oposició al moviment de les càrregues és el coneixem per **resistència**. La resistència ve donada per:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

on ρ és la resistivitat i caracteritza el material del fil, l és la longitud del fil i S és la secció del fil.

8. Intensitat del corrent.

Considereu un tros de fil com el de la figura.



Suposem que per dins del fil les càrregues que es mouen són positives. Les càrregues elèctriques es mouran des del potencial més alt fins el més baix. Considereu una secció S perpendicular al fil. Definim intensitat del corrent elèctric com la quantitat de càrrega que travessa la secció S per unitat del temps.

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \quad (1)$$

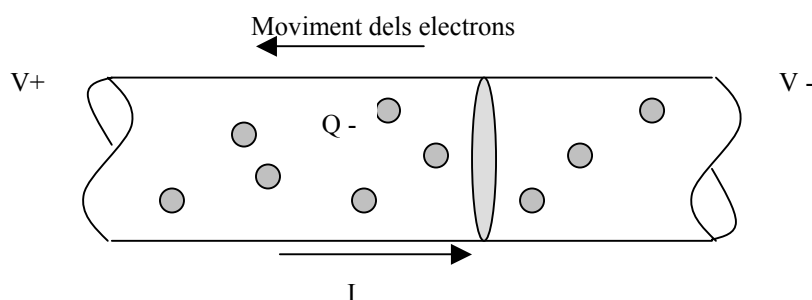
La intensitat del corrent és mesura en amperes. $[I] = 1 \text{ C/s} = 1 \text{ A}$.

El sentit de la intensitat del corrent sempre és del potencial alt al potencial baix, o el que és el mateix el sentit del moviment de les càrregues elèctriques positives. El problema apareix quan es descobreix que les càrregues responsables del corrent elèctric no són positives si no negatives. Aquestes càrregues són els electrons lliures que formen els enllaços metàl·lics dels fils. Com ja sabeu les càrregues negatives es desplacen cap a on la seva energia potencial elèctrica disminueix. Al ser la seva càrrega negativa ens trobem que els electrons es mouen del potencial baix a l'alt.

$$\left. \begin{array}{l} Q < 0 \\ V_+ > V_- \end{array} \right\} \Rightarrow U_+ = Q \cdot V_+ < Q \cdot V_- = U_-$$

Tenint en compte això, el sentit de la intensitat sempre és de potencial alt al baix, contrari al sentit de moviment dels electrons.

Pel que fa a la definició (1) només heu de considerar el valor absolut de la càrrega Q.



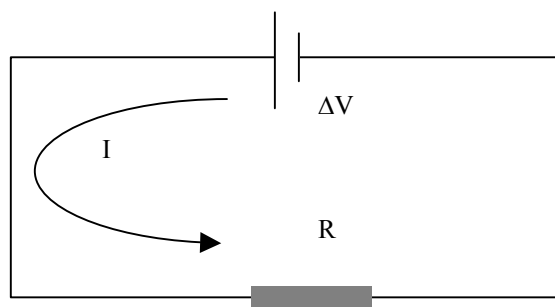
9. Circuits elèctrics de corrent continu.

Un circuit elèctric està format bàsicament per dos elements piles i resistències. Tot circuit elèctric és representarem mitjançant una sèrie de símbols.

Piles	
Resistències	

Les resistències representen els elements dels circuits on els electrons perden energia potencial elèctrica. Aquests elements poden ser fils o bombetes.

Qualsevol circuit el representarem de la següent manera.



10. La llei d'Ohm.

George Simon Ohm va establir l'any 1827, la relació entre la intensitat, la resistència i la tensió subministrada per un generador. Ohm va observar que la intensitat i la tensió del generador són proporcionals, es a dir quan una es multiplica per un factor l'altre també. Per altre banda la intensitat i la resistència són inversament proporcionals, és a dir quan una augmenta l'altra disminueix.

L'expressió que ens mostra aquest comportament ve donada per:

$$\Delta V = IR$$

La relació de proporcionalitat entre la intensitat i la tensió només es vàlida per valors petits de la tensió. Si la força electromotriu augmenta molt la relació de proporcionalitat es perd. En tots els problemes vosaltres suposareu que no.

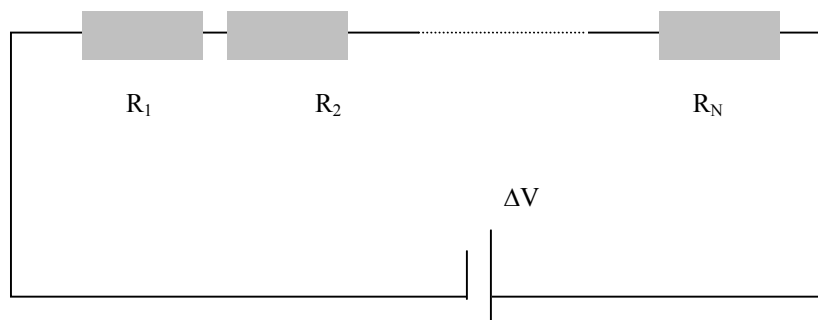
També cal dir que la llei d'Ohm es pot aplicar a una resistència de forma independent on la tensió ΔV serà en aquest cas la caiguda de tensió a la resistència en qüestió

11. Associació de resistències.

Entenem per associació de resistències la determinació de la resistència equivalent a un conjunt de resistències. La resistència equivalent haurà de realitzar la mateixa funció que les altres.

- Associació en sèrie.

Diem que N resistències estan en sèrie si la intensitat que circulen per elles és la mateixa i que la caiguda de tensió total és la tensió de la pila.



La definició la podem rescriure a través de les següents relacions:

$$\Delta V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_N = I$$

Si apliquem la llei Ohm a cada una de les resistències:

$$\Delta V = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_N$$

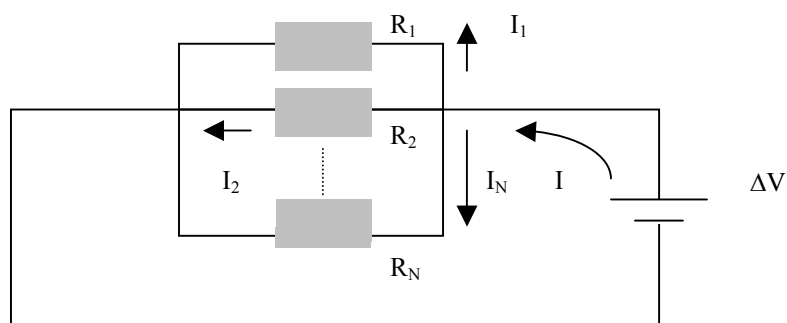
Veiem que podem substituir totes les resistències per una de sola, el valor de la qual serà:

$$\Delta V = I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_N) \quad \rightarrow \quad R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

$$\Delta V = I \cdot R_{eq}$$

- Associació en paral·lel.

Diem que N resistències estan en paral·lel si la caiguda de tensió a cada una d'elles és igual i que la suma de les intensitats que passa per cada una d'elles és igual a la intensitat que passa per la pila.



Podem expressar la definició anterior amb equacions:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

$$\Delta V = V_1 = V_2 = \dots = V_N$$

Si apliquem la llei d'Ohm:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

$$\Delta V / R_{eq} = V_1 / R_1 + V_2 / R_2 + \dots + V_N / R_N$$

Simplificant ens queda:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

12. Resolució de circuits de corrent continu.

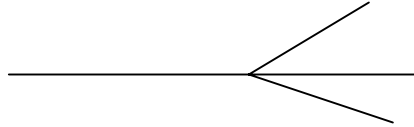
Resoldre un circuit vol dir determinar el valor de les intensitats que circulen per cada una de les resistències d'un circuit. Per fer això podem aplicar dos mètodes.

1. Aplicar la llei d'Ohm a cada una de les resistències del circuit només quan el circuit tingui una sola pila, o puguem substituir les piles per una de sola.
2. Aplicant les lleis de Kirchhoff quan no puguem aplicar el procediment anterior. En circuits amb una sola pila també es pot aplicar la segona llei.

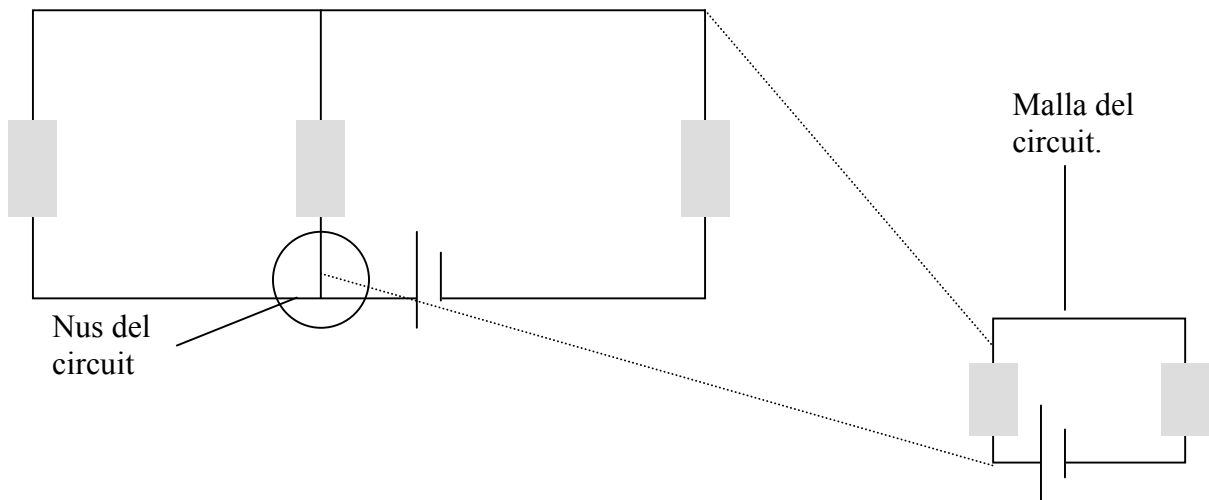
- Les lleis de Kirchoff.

Abans de enunciar les lleis de Kirchoff, cal fer dues definicions prèvies:

1. Nus en un circuit: “Entenem per nus en un circuit el punt on una branca es ramifica en dues o més branques.”



2. Malla d'un circuit: “Entenem per malla d'un circuit aquella part de circuit tancada de manera que per recorre-la no passarem dues vegades per un mateix punt.”



- **1a Llei de Kirchoff.**

“La suma de les intensitats que entren en un nus és igual a la suma de les intensitats que en surten.”

Aquesta llei es pot expressar de la següent manera.

$$\sum I_{\text{entrants}} = \sum I_{\text{sortints}}$$

- **2a Llei de Kirchoff.**

“En una malla la suma dels potencials de les piles ha de ser igual a la suma dels productes de les intensitats per resistències.”

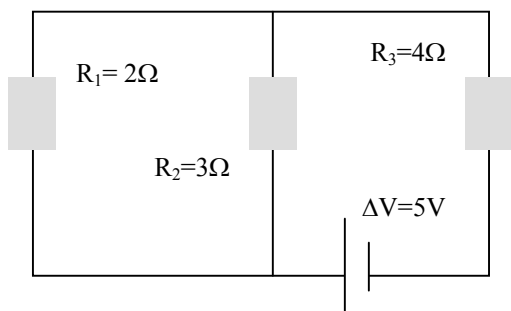
Aquesta llei es pot expressar de la següent manera.

$$\sum \Delta V_{\text{pila}} = \sum I \cdot R$$

Quan resollem un circuit aplicant les lleis de Kirchoff hem de tenir present que a més s'ha de considerar un criteri de signes a l'hora de fer la suma dels productes $I \cdot R$.

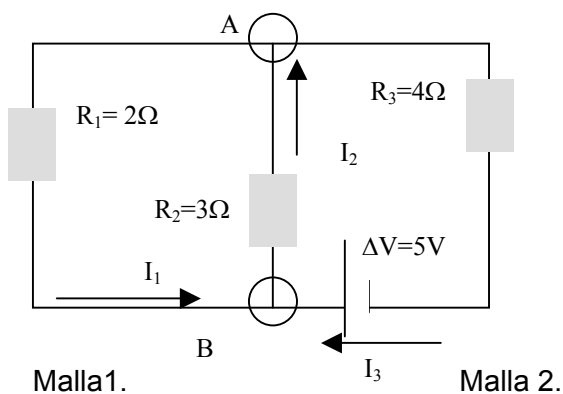
La millor manera d'entendre tot això és a través d'un exemple.

Exemple. Resoleu el següent circuit:



Per resoldre un circuit actuarem sempre de la següent manera.

1. Dibuixarem sobre el circuit les direccions dels intensitats que circulen per cada una de les branques. No cal dibuixar-les en el sentit correcte ja que la solució del problema ja ens indicarà si estan ben dibuixades.
2. Identificarem els nusos del circuit i aplicarem la 1a Llei a cada un d'ells.
3. Dibuixarem les malles del circuit i aplicarem la segona llei a cada una d'elles tenint en compte els següents punts.
 - Prendrem un sentit de gir per recorre la malla. (Horari o antihorari.)
 - Si en recorre la malla travessem les piles en el sentit $\rightarrow$ la tensió de la pila serà positiva. En cas contrari serà negativa.
 - Si en recorre la malla ens trobem una intensitat de front, el producte $I \cdot R$ corresponent serà negatiu.



Nus A: $I_2 = I_1 + I_3$

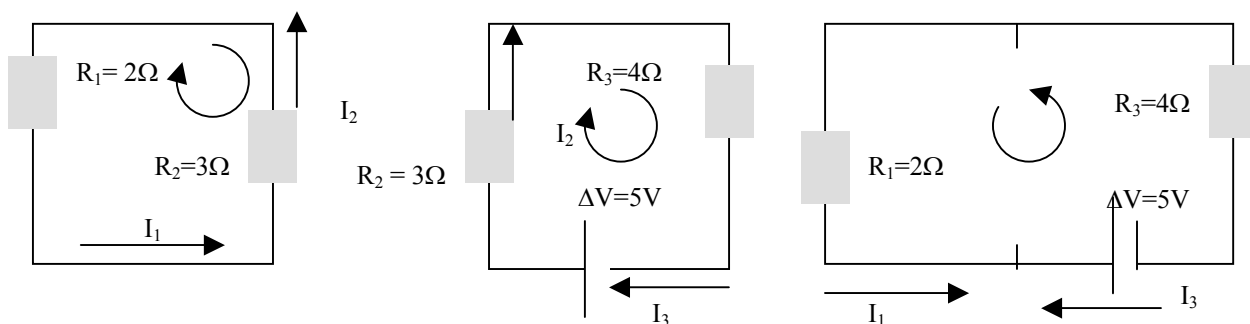
Nus B : $I_3 + I_1 = I_2$

Malla 1: $0 = -I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1$

Malla 2: $\Delta V = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$

Malla 3 : $-\Delta V = -I_3 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_1$

Fixeu-vos que la malla 3 és combinació de les altre dues.



Si substituïm valors veurem que tenim 5 equacions i tres incògnites. De les 5 equacions només cal que en prenguem tres que siguin linealment independents. Per exemple el nus A i les malles 1 i 3. Veurem que ens queda un sistema la solució del qual és:

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3 \\ 0 = 3 \cdot I_2 + 2 \cdot I_1 \\ 5 = -2 \cdot I_1 + 4 \cdot I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Les solucions són} \\ I_1 = -15/26 \\ I_2 = 10/26 \\ I_3 = 25/26 \end{cases}$$

13. L'equació de l'energia.

En un circuit elèctric les piles subministren energia potencial elèctrica. La potència subministrada la podem expressar de la següent manera.

$$P = \frac{\Delta U}{t} = \frac{Q \cdot \Delta V}{t} = I \cdot \Delta V$$

Suposem el circuit següent. L'energia que subministra la pila s'inverteix en fer moure els electrons a través del circuit. Els electrons però, perden energia a les resistències i per tant l'energia de la pila es perd en forma de calor al passar els electrons per les resistències. El principi de conservació de l'energia en els circuits elèctrics es mostra a través de l'equació de l'energia.

$$\begin{aligned} E_{\text{SUBMINISTRADA}} &= E_{\text{CONSUMIDA}} \\ \Delta V \cdot I &= \Delta V_1 \cdot I_1 + \Delta V_2 \cdot I_2 + \Delta V_3 \cdot I_3 \end{aligned}$$

I si tenim en compte la llei d'Ohm, l'energia consumida ens quedarà:

$$\Delta V_j \cdot I_j = I_j \cdot R_j \cdot I_j = I_j^2 \cdot R_j$$

I l'equació de l'energia ens quedarà:

$$\Delta V \cdot I = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3$$