LA BASE DELS CIRCUITS DIGITALS. L'ÀLGEBRA DE BOOLE

Sistemes analògics i digitals.

- Sistema analògic és aquell on la informació pot prendre un continu de valors al llarg del temps. Els aparells que s'encarreguen de transformar senyals naturals en informació elèctrica s'anomenen transductors. Es avantatjosa perquè el senyal analògic és complert.
- Sistema digital. La informació només pot prendre dos valors. El seu ús és molt còmode. El que ens interessa no és el valor que pren la informació sinó, si pren un valor o no.

Els senyals digitals són molt còmodes d'usar i podem simplificar la informació a dos valors 1 i 0

Exemple: si hi ha tensió entre els extrems d'un condensador o no. si passa corrent per una resistència o no.

SISTEMES DE NUMERACIÓ

- Sistema decimal: És el més estès. Consta de 10 nombres que van del 0 al 9.

Tot nombre en un sistema decimal de numeració s'expressa com potències de 10.

$\boxed{N = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_k 10^k}$ on N té k xifres. on $a_j \in [0,9]_{\mathbb{N}}$

$397{,}12 = 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

Diem que N es pot escriure en funció de la base 10.

- **Sistema binari**: Sistema de numeració amb el que es basa tot circuit digital. La base és el 2. ~~Tot nombre N en sistema binari es podrà passar a producte de potència de~~ 2.

~~$N = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_k 2^k$ on $a_0, a_1, \ldots, a_k \in [0,1]_{\mathbb{N}}$.~~

~~N està expressat en decimal o binari~~

EXEMPLE:

$392_{(10} = 110001000_{(2}$

$\boxed{\text{PASSAR de SD a SB}}$

392 | 2
0 196 | 2
0 98 | 2
0 49 | 2
1 24 | 2
0 12 | 2
0 6 | 2
0 3 | 2
1 1

Passar del sistema binari al base 10

$1\cdot2^0 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^4$

$1 + 2 + 4 + 0 + 16$

23 | 2
1 11 | 2
1 5 | 2
1 2 | 2
0 1

1 0 1 1 1

$2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

$\boxed{\text{PASSAR DE SB a SD.}}$

Fixeu-vos que:

$392_{10)} = 110001000_{(2)}$

$392_{10)} = 3\cdot10^2 + 9\cdot10^1 + 2\cdot10^0$

$392_{10)} = 1\cdot2^8 + 1\cdot2^7 + 0\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 0\cdot2^0$
$= 256 + 128 + 8 = 392_{10)}$

passar de D a HX.

392 | 16
1 2 | 16

Exemple:

Fer les operacions següents

$$\begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ \hline 1110 \end{array}$$

$10111_{(2)} + 100101_{(2)} =$

$1011_{(10)} + 101_{(2)} =$

FUNCIONS LÒGIQUES. o PORTES LÒGIQUES.

Una funció lògica és és un cnj d'operacions aplicades a variables que només poden prendre valors 0 ó 1.

p.e.

$S = a + b \cdot c$

a, b i c són variables independents que poden prendre dos valors 0 ó 1

Operacions bàsiques:

- SUMA ó UNIÓ: $(+, \cup)$ → Símbols usats en les expressions canòniques.
- PRODUCTE ó INTERSECCIÓ: $(\cdot, \cap)$
- CONTRARI ó NEGACIÓ $(\bar{x})$ ó $(-x)$

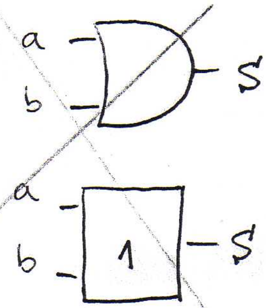
Associades a aquestes ~~f~~ operacions tenim una serie de funcions anomenades funcions lògiques.

SUMA	⟷	funció OR
PRODUCTE	⟷	funció AND
CONTRARI	⟷	funció NOT.

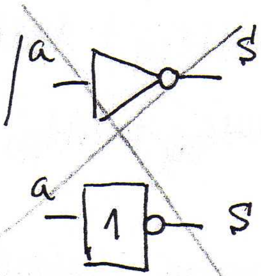
Cada funció es pot coneixer a través de la forma canònica o através del seu símbol.

Exemples:

$S = a + b$ /

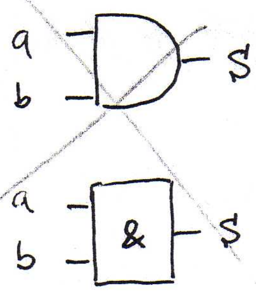


$S = \bar{a}$ /



NO!

$S = a \cdot b$ /



Cada funció lògica té associada una definició. També se les coneix com portes.

PORTA AND

Dues variables a i b que prenen valors 0 o 1, tenen una sortida 1 si a i b valen 1.

PORTA OR.

La sortida S és 1 si a i b valen 1 una de les dues o les dues.

PORTA ~~AND~~. NOT

La sortida val 0 si l'entrada és 1 i 1 si l'entrada es 0.

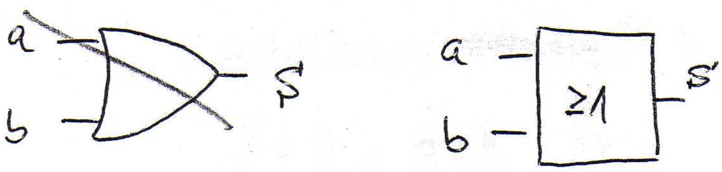
PORTA EXOR

També se l'anomena porta OR exclusiva. La sortida és 1 si només una de les entrades és 1, no les dues.

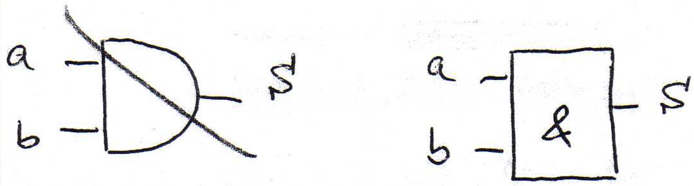
SIMBOLOGIA DE LES PORTES LÒGIQUES

forma canònica.

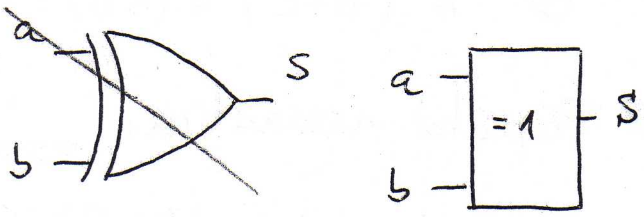
OR : $S = a + b \Rightarrow$



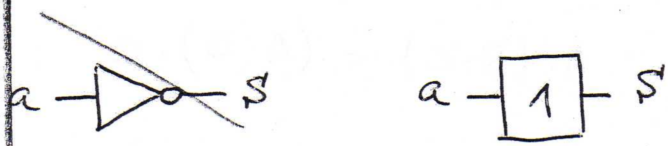
AND : $S = a \cdot b \Rightarrow$



EXOR : $S = a \oplus b$

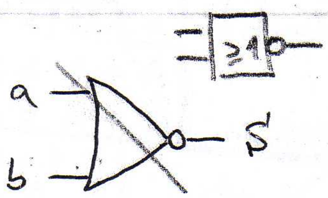


NOT : $S = \overline{a}$



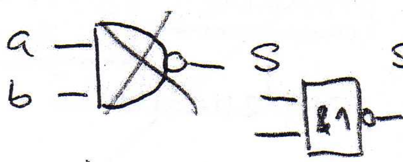
- Podem combinar qualsevol porta amb la porta NOT:

NOT + OR → **NOR** :



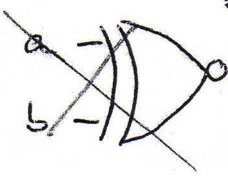
$S = \overline{a + b}$

NOT + AND → **NAND** :

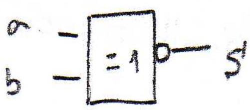


$S = \overline{a \cdot b}$

NOT + EX.OR → **EXNOR** :



$S = \overline{a \oplus b}$



Comentar portes combinades.

NOT + OR → NOR

NOT + AND → NAND

NOT + EXOR → EXNOR.

ALGEBRA DE BOOLE

— Propietats

- Propietat commutativa:

  · ① $A + B = B + A$

  · ② $A \cdot B = B \cdot A$

- Propietat distributiva:

  · ① $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

  · ② $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

- Propietat associativa:

  · $A + (B + C) = (A + B) + C$

  · $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

LLEIS BÀSIQUES DE L'ALGEBRA DE BOOLE.

1. Llei identitat. — Elements neutres de + i ·

$$0 + A = A \qquad 1 \cdot A = A.$$
$$A + 1 = 1 \qquad A \cdot 0 = 0$$
$$A + A = A \qquad A \cdot A = A.$$

2. Llei de la complementació.

$$A + \overline{A} = 1.$$
$$A \cdot \overline{A} = 0$$

3. Llei de la involució. ____ $\overline{\overline{A}} = A.$

4. Llei de la dualitat ______ ?

- AQUESTES LLEIS SÓN AXIOMES.

TEOREMES.

Teorema 1. — Llei d'absorció:

$$\boxed{A + A \cdot B = A.}$$

Demostració

$$A + A \cdot B \underset{\text{Llei identitat.}}{=} A \cdot 1 + A \cdot B \underset{\text{Prop. distributiva}}{=} A \cdot (1 + B) \underset{\text{Llei identitat}}{=} A \cdot 1 = A.$$

- Teorema 2

$$\boxed{A\cdot\overline{B} + A\cdot B = A.}$$

Demostració

$$A\cdot\overline{B} + A\cdot B \underset{\text{Prop. distrib.}}{=} A\cdot(\overline{B}+B) \underset{\text{Llei de la complementació}}{=} A\cdot 1 \underset{\text{Llei identitat.}}{=} A.$$

- Teorema 3

$$\boxed{A + \overline{A}\cdot B = A+B}$$

$$A+\overline{A}\cdot B \underset{\text{Propietat distributiva}}{=} (A+\overline{A})\cdot(A+B) \underset{\text{Llei complementació}}{=} 1\cdot(A+B) \overset{\text{Llei d'identitat.}}{=} A+B$$

- Teorema de morgan

  - $\overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}$
  - $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$

Demostració: A través de les taules de la veritat.

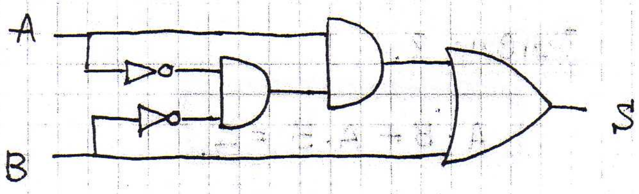
Taula de la veritat.

La taula de la veritat és una taula on es manifesten totes les combinacions de les entrades (A, B, C...) i s'obté un valor de sortida.

El nombre de combinacions de la taula és: $\boxed{2^n}$ on n és el nombre de variables d'entrada.

Exemple:

$S = A \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B}) + B$ Representació per portes:



Taula de la veritat.

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A més pels teoremes demostrem que

$S = A \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B}) + B = (A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} + B = 0 \cdot \bar{B} + B = 0 + B$

$= B.$

És a dir: $\boxed{S = A(\bar{A} \cdot \bar{B}) + B = B.}$

OBTENCIÓ DE LES FUNCIONS LÒGIQUES A PARTIR DE LES TAULES DE LA VERITAT.

Forma canònica d'una funció booleana.

Tota equació booleana tindrà la seva taula de la veritat. i tota taula de la veritat tindrà la seva funció booleana. Aquesta funció ha de tenir totes les variables que apareixen a la taula de la veritat.

Podem obtenir la funció booleana a partir de la taula de la veritat en formes canòniques diferents. Aquestes dues equacions són la mateixa ja que provenen de la mateixa taula.

- Equació booleana en forma de minterms.

  Els termes de la funció es sumen entre ells. Cada terme està format per variables que es multipliquen entre elles.

  Per obtenir-la cal tenir la taula de la veritat.

  1. Es prenen les combinacions que a la sortida donen 1.
  2. Es multipliquen les variables implicades, tal qual si prenen el valor 1 i contràries si prenen el valor zero.
  3. Sumem aquests termes.

- Equació booleana en forma de maxterms.

  Els termes de la funció es multipliquen entre ells. Cada terme està format per variables que es sumen entre si

  Per tal d'obtenir-la cal tenir la ... taula de la veritat.

  1. Es prenen les combinacions que a la sortida donen 0.
  2. Sumarem les variables implicades, tal qual si prenen valor zero, negades si prenen valor 1.
  3. Multiplicarem aquests termes.

EXEMPLE.

Obtinguem la forma canònica minterm i maxterm de les taules següents

	A	B	S
0.	0	0	1
1.	0	1	1
2.	1	0	1
3.	1	1	0

minterms

$$S' = \sum f(0,1,2)$$

$$\boxed{S' = \bar{A}\cdot\bar{B} + \bar{A}\cdot B + A\bar{B}}$$

maxterm

$$S = \prod f(3)$$

$$\boxed{S = \bar{A}+\bar{B}}$$

	A	B	S'
0.	0	0	1
1.	0	1	0
2.	1	0	0
3.	1	1	0

minterms

$$S = \sum f(0) = \bar{A}\cdot\bar{B}$$

$$\boxed{S = \bar{A}\cdot\bar{B}}$$

maxterms

$$S = \prod f(1,2,3)$$

$$\boxed{S = (A+\bar{B})\cdot(\bar{A}+B)\cdot(\bar{A}+\bar{B})}$$

En alguns casos podem obtenir una funció simplicada i en d'altres no.

SIMPLIFICACIÓ DE LES FUNCIONS BOOLEANES.

Això vol dir trobar una funció booleana amb el menor nombre de variables a cada terme i el menor nombre de termes.

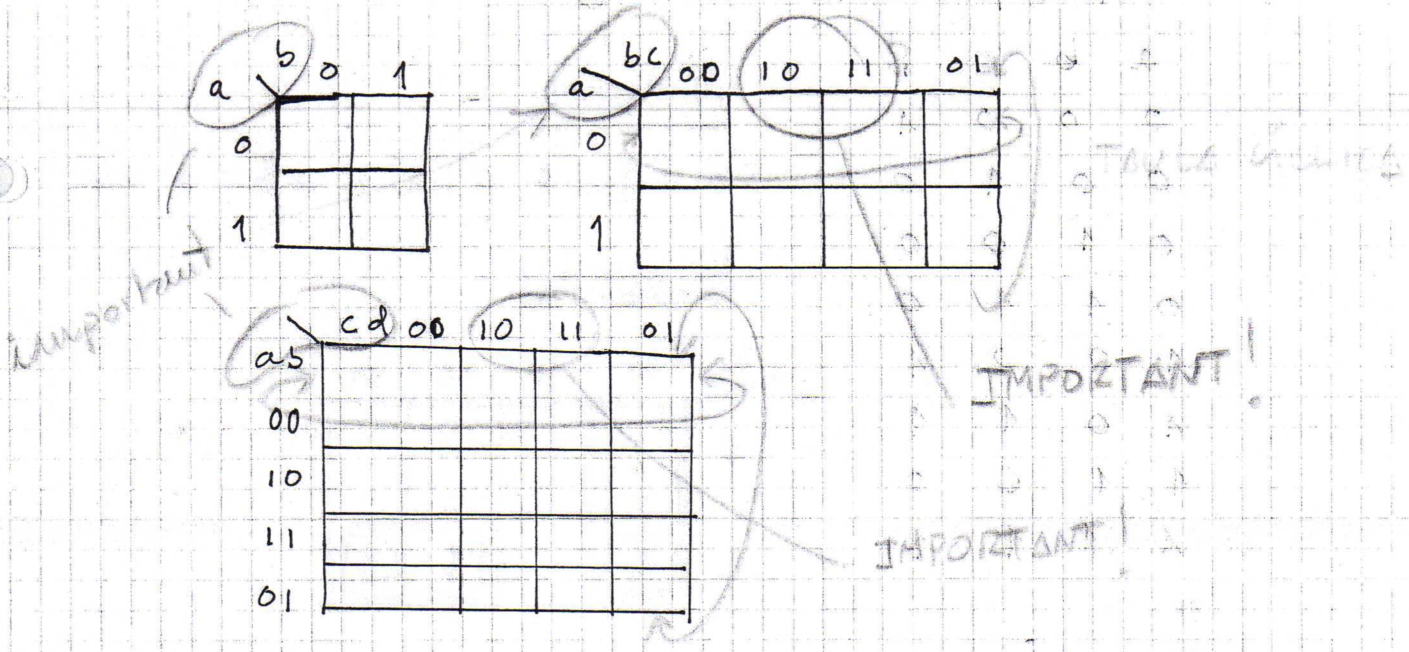
Hi ha dos mètodes tabulars: Els diagrames de Karnaugh i les taules de Quine Mc Cluskey. Només veurem el primer.

DIAGRAMES DE KARNAUGH.

Mètode simplificador de funcions booleanes. Ràpid si el nombre de variables és 1 a 5. Més de 5 apliquem l'altre mètode.

Mètode.

1. Prenem la taula de la veritat.
2. Haurem de dibuixar diverses taules segons el nombre de variables que apareixen a la taula de la veritat.



3. Un cop tenim les taules s'han d'omplir, amb 1. si la sortida que hi correspon és un 1, i en blanc si és un zero.

4. Farem agrupacions de 1, on hi hagin potències de 2. (ja que és un sistema binari).

Començarem per les agrupacions més grans possibles i anem baixant.

Agruparem horitzontalment i verticalment. Els extrems també els podem agrupar ja que la taula és cíclica. ~~No agrupem diagonalment~~

En cada agrupació mirarem les variables d'entrada.

- Si la variable pren un valor 1 i 0 en la mateixa agrupació, el resultat no dependrà d'ella.
- Si la variable només pren un valor la posarem tal qual si és un 1. i negada si és un zero.

EXEMPLE.

Troben la funció booleana en forma canònica minterms i simplifiquenta per Karnaugh.

a	b	c	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Minterms

$$S = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

Karnaugh:

a \ bc	00	10	11	01
0	1			
1	1		1	1

00

0 1
1 1 → No depèn de A. ⇒ $\bar{b}\cdot\bar{c}$

11 01

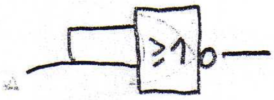
1 1 1 → no depèn de b ⇒ $a\cdot c$

Llavors: $\boxed{S = \bar{b}\cdot\bar{c} + a\cdot c + a\bar{b}}$ 1 1 → $a\bar{b}$

• Implementació de portes lògiques

Trobar la funció lògica usant només portes NAND o NOR.

Condicions:

1.  $S = \bar{A}$, $S = \overline{A + A} = \bar{A}$

2.  $S = \bar{A}$; $S = \overline{A \cdot A} = \bar{A}$

3. Th Morgan: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B}$

Totes les portes lògiques es poden obtenir a partir de portes NAND o NOR. (vegeu pàgina 335).

IMPLEMENTACIÓ AMB PORTES NAND

Sigui

$S = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b + bc$

Aplicarem una doble inversió en les sumes parcials

$S = \overline{\overline{\bar{a}\,\bar{c} + \bar{a}\cdot b + bc}} \rightarrow S = \overline{(\overline{\bar{a}\,\bar{c}}) \cdot (\overline{\bar{a}\cdot b}) \cdot (\overline{bc})}$

$\rightarrow S = \overline{(\overline{\overline{a \cdot a} \cdot \overline{c \cdot c}})(\overline{\overline{a \cdot a} \cdot b})(\overline{b \cdot c})}$

IMPLEMENTACIÓ AMB PORTES NOR.

Sigui

$S = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b + bc$

Apliquem una doble inversió en els productes parcials

$S = \overline{\overline{\bar{a} \cdot \bar{c}}} + \overline{\overline{\bar{a} \cdot b}} + \overline{\overline{bc}} = \overline{\overline{\overline{\bar{\bar{a}} + \bar{\bar{c}}} + \overline{\bar{\bar{a}} + \bar{b}} + \overline{\bar{b} + \bar{c}}}} =$

$= \overline{\overline{\overline{a + c} + \overline{a + \bar{b}} + \overline{\bar{b} + \bar{c}}}}$

Tornarem a aplicar la doble inversió a la suma.

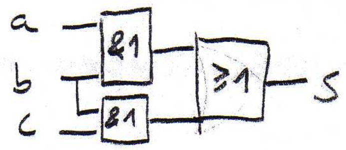
A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

⇒ karnaugh.

c \ ab	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	

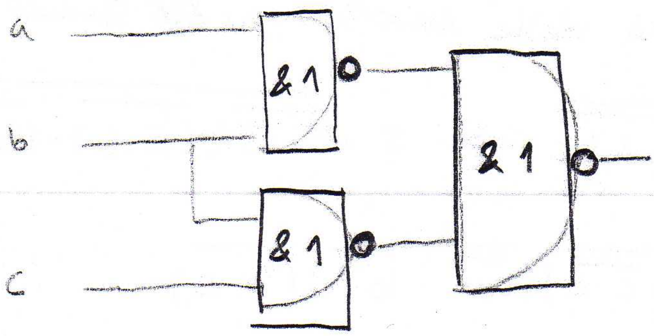
c·b   ab

$\boxed{S = c\cdot b + ab}$ →



implementació → NAND.

$S = \overline{\overline{cb + ab}} \Rightarrow S = \overline{\overline{(c\cdot b)}\cdot\overline{(a\cdot b)}}$



implementació NOR.

$S = \overline{\overline{c\cdot b}} + \overline{\overline{a\cdot b}} \Rightarrow S = \overline{\bar{c}+\bar{b}} + \overline{\bar{a}+\bar{b}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \overline{(\overline{c+c}) + (\overline{b+b})} + \overline{(\overline{a+a}) + (\overline{b+b})}$

$\overline{a+a} = \bar{a}$

$S = \overline{\overline{\overline{(\overline{c+c}) + (\overline{b+b})} + \overline{(\overline{a+a}) + (\overline{b+b})}}} \Rightarrow$