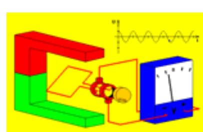
El corrent altern

Generació del corrent altern

El corrent altern es genera quan fem girar un fil conductor que forma una espira en el si d'un camp magnètic constant (Llei de Lenz-Faraday).



Els electrons del fil de l'espira descriuen un moviment de va i ve. Concretament això és així quan el gir és un moviment circular uniforme.

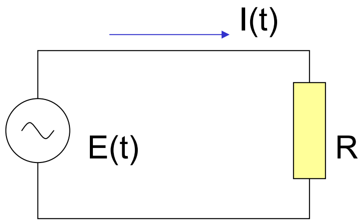
Per aquesta situació, la tensió que es genera en els extrems de l'espira ve donada per:

$$\boxed{E(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$$

Ara el què farem és veure com afecta la tensió alterna a la intensitat quan es connecten les resistències, els condensadors o les bobines.

Circuit R

Considereu el circuit de la figura.



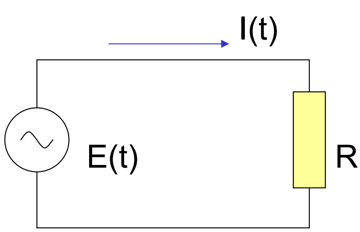
Si apliquem la llei d'Ohm ens quedarà:

$$V_R(t) = I(t)\cdot R \Rightarrow V_{R_0}\cdot\sin(\omega t) = I(t)\cdot R \Rightarrow I(t) = \frac{V_{R_0}\cdot\sin(\omega t)}{R}$$

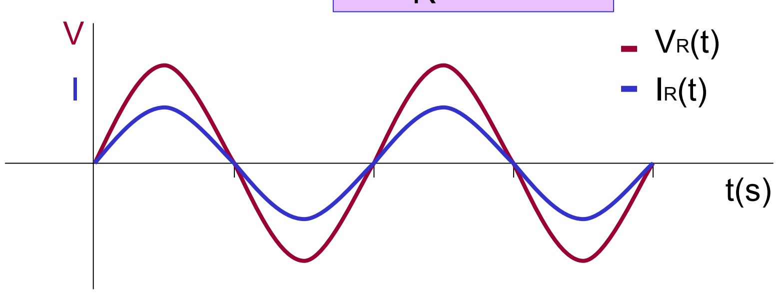
Reordenant quedarà: $$I(t) = \frac{V_{R_0}}{R}\cdot\sin(\omega t)$$

On **V_{R0}/R** és el corrent màxim: $I(t) = I_0\cdot\sin(\omega t)$

Així doncs en un resistor pur es complirà:

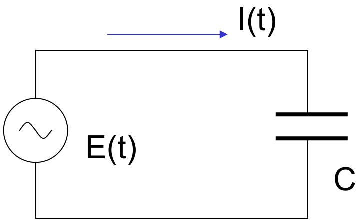


$$V_R(t) = V_{R_0}\cdot\sin(\omega t)$$
$$I(t) = I_0\cdot\sin(\omega t)$$
$$I_0 = \frac{V_{R_0}}{R}$$



Circuit C

Considereu el circuit de la figura.



Si apliquem la definició d'intensitat i la definició de capacitat ens quedarà:

$$C = \frac{Q}{V_C(t)} \Rightarrow Q = C \cdot V_C(t) \ ;$$

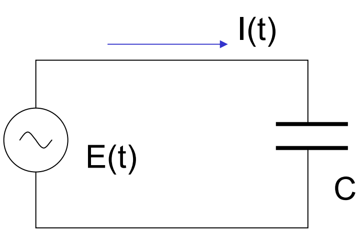
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\left(C \cdot V_C(t)\right)}{dt} = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} =$$

$$C \cdot \frac{d\left(V_{C_0} \cdot \sin(\omega t)\right)}{dt} = C \cdot V_{C_0} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Reordenant quedarà:

$$I_C(t) = \frac{V_{C_0}}{\left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)} \cdot \cos(\omega t)$$

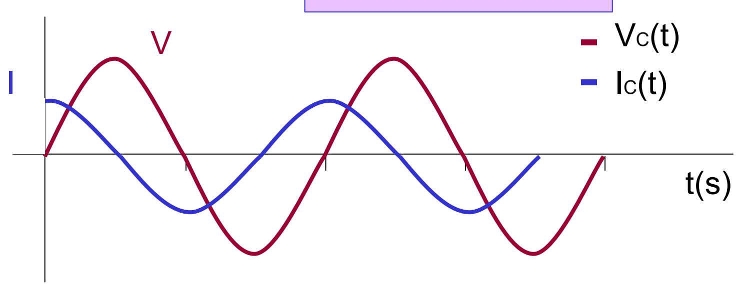
Així doncs en un condensador es complirà:



$$V_C(t) = V_{C_0} \cdot \sin(\omega t)$$

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

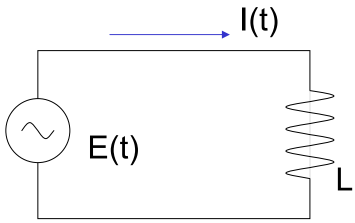
$$I_0 = \frac{V_{C_0}}{X_C} \ ; \ X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$



On $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ és la reactància capacitiva.

Circuit L

Considereu el circuit de la figura.



Quan circula un c.a. A través d'una bobina, s'induirà una tensió contrària a la tensió del generador.

$$\boxed{E(t) = -e_L} \Rightarrow \boxed{E_0 \cdot \sin(\omega t) = L \cdot \frac{dI}{dt}}$$

$$\left.\begin{array}{l} e_L = -\dfrac{d\Phi}{dt} \\ L = \dfrac{\Phi}{I} \end{array}\right\} \Rightarrow e_L = -\frac{d(L \cdot I)}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

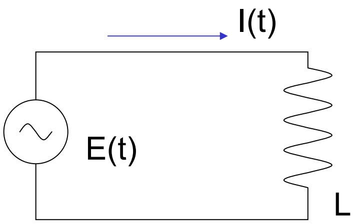
Per trobar el valor de $I_L(t)$ haurem de trobar la funció que compleixi la igualtat enmarcada de color taronja. Això requerirà haver d'usar les integrals.

$$L \cdot \frac{dI}{dt} = E_0 \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{E_0}{L} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow dI = \frac{E_0}{L} \cdot \sin(\omega t) \cdot dt$$

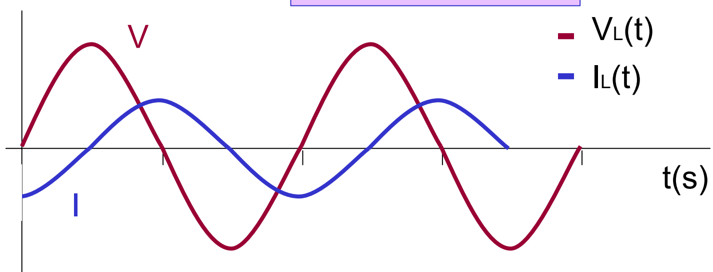
$$\int dI = \int \frac{E_0}{L} \cdot \sin(\omega t) \cdot dt \Rightarrow I = \frac{E_0}{L} \cdot \int \sin(\omega t) \cdot dt \Rightarrow I = \frac{E_0}{L \cdot \omega} \cdot \left(-\cos(\omega t)\right)$$

$$\boxed{I_L(t) = -\frac{E_0}{\omega \cdot L} \cdot \cos(\omega t)}$$

Així doncs en una bobina es complirà:



$$V_L(t) = V_{L_0} \cdot \sin(\omega t)$$
$$I(t) = -I_0 \cdot \cos(\omega t)$$
$$I_0 = \frac{V_{L_0}}{X_L} \;;\; X_L = \omega \cdot L$$



On $\boxed{X_L = \omega \cdot L}$ és la reactància inductiva.

Es convenient rescriure les expressions anteriors en funció del sinus.

$$V_R(t) = V_{R_0} \cdot \sin(\omega t)$$
$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$
$$I_0 = \frac{V_{R_0}}{R}$$

Per la resistència pura

$$V_C(t) = V_{C_0} \cdot \sin(\omega t)$$
$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$I_0 = \frac{V_{C_0}}{X_C} \;;\; X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

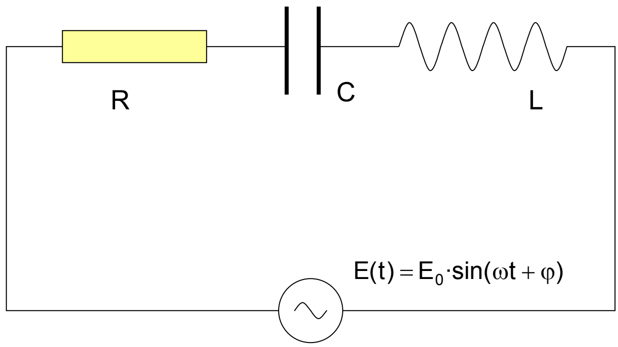
Pel condensador

$$V_L(t) = V_{L_0} \cdot \sin(\omega t)$$
$$I(t) = -I_0 \cdot \cos(\omega t) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$I_0 = \frac{V_{L_0}}{X_L} \;;\; X_L = \omega \cdot L$$

Per la bobina

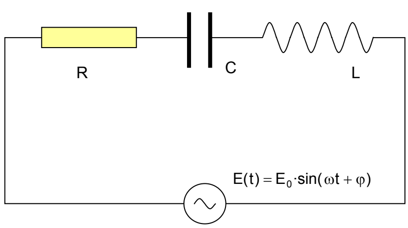
Circuit RLC-sèrie

Considerem ara el circuit de la figura format pels tres elements anteriors.



Si el generador subministra una tensió **E(t)** es pot calcular el corrent que circularà pel mateix circuit

Per fer això aplicarem conceptes que ja coneixem del corrent continu.



1. La suma de tensions és la tensió de la pila.

$$E(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$$

2. La intesitat que circula pel circuit és la mateixa perquè tots els seus elements estan en sèrie.

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

3. Tenint en compte això, les tensions vindran donades per:

$$\boxed{V_R(t) = V_{R_0} \cdot \sin(\omega t)}$$

$$\boxed{V_C(t) = V_{C_0} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -V_{C_0} \cdot \cos(\omega t)}$$

$$\boxed{V_L(t) = V_{L_0} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_{L_0} \cdot \cos(\omega t)}$$

4. Ara substituïm les tensions a l'expressió *1*.

$$E(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$$

$$E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = V_{R_0} \cdot \sin(\omega t) - V_{C_0} \cdot \cos(\omega t) + V_{L_0} \cdot \cos(\omega t)$$

5. Si substituïm les tensions màximes pels seus valors, tindrem:

$$E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = V_{R_0} \cdot \sin(\omega t) - V_{C_0} \cdot \cos(\omega t) + V_{L_0} \cdot \cos(\omega t)$$
$$E_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = (I_0 \cdot R) \sin(\omega t) - (I_0 \cdot X_C) \cos(\omega t) + (I_0 \cdot X_L) \cos(\omega t)$$

6. Si desenvolupem el sinus de la suma d'angles i reordenem el terme de la dreta, ens quedarà:

$$E_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi) + E_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi) = I_0 \cdot R \cdot \sin(\omega t) + I_0 \cdot (X_L - X_C) \cos(\omega t)$$

7. Ara separem el sin(wt) i el cos(wt) i igualem:

$$\left.\begin{array}{l} E_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi) = I_0 \cdot (X_L - X_C) \cos(\omega t) \\ E_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi) = I_0 \cdot R \cdot \sin(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} E_0 \cdot \sin(\varphi) = I_0 \cdot (X_L - X_C) \\ E_0 \cdot \cos(\varphi) = I_0 \cdot R \end{array}\right.}$$

8. De les darreres igualtats, tindrem:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R}} \qquad E_0^2 \cdot \cos^2(\varphi) + E_0^2 \cdot \sin^2(\varphi) = I_0^2 \cdot R^2 + I_0^2 \cdot (X_L - X_C)^2$$

$$\boxed{E_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

φ és s'anomena fase o angle de desfasament entre la tensió i la intensitat a la pila.

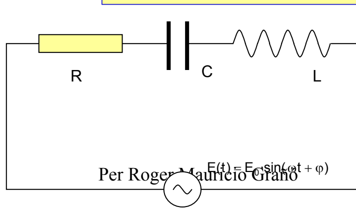
$$\boxed{E_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

D'aquesta expressió es dedueix que la tensió màxima és proporcional a la intensitat màxima. La constant de proporcionalitat s'anomena **impedància del circuit**.

Per al nostre cas particular tenim:

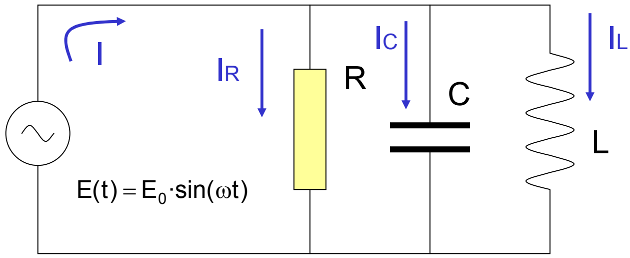
La fase: $\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)}$

La impedància: $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$



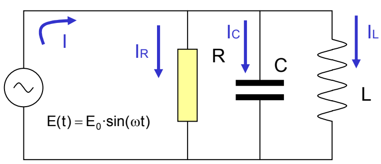
Circuit RLC-paral·lel

Considerem ara el circuit de la figura:



Si el generador subministra una tensió **E(t)** es pot calcular el corrent que circularà pel generador del circuit

Per fer això aplicarem conceptes que ja coneixem del corrent continu.



1. La suma de corrents és el corrent a la pila. (1a llei de Kirchoff)

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t)$$

2. La tensió a cada element és la mateixa i igual a la de la pila, perquè tots els seus elements estan en paral·lel.

$$E(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t)$$

3. Tenint en compte això els corrents vindran donats per:

$$\boxed{I_R(t) = I_{R_0} \cdot \sin(\omega t)}$$

$$\boxed{I_L(t) = I_{L_0} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_{L_0} \cdot \cos(\omega t)}$$

$$\boxed{I_C(t) = I_{C_0} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = +I_{C_0} \cdot \cos(\omega t)}$$

4. Ara substituïm els corrents a l'expressió *1.*

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t)$$

$$I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) = I_{R_0} \cdot \sin(\omega t) + I_{C_0} \cdot \cos(\omega t) - I_{L_0} \cdot \cos(\omega t)$$

5. Si substituïm les intensitats màximes pels seus valors, tindrem:

$$I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) = I_{R_0} \cdot \sin(\omega t) + I_{C_0} \cdot \cos(\omega t) - I_{L_0} \cdot \cos(\omega t)$$

$$I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \left(\frac{E_0}{R}\right) \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{E_0}{X_C}\right) \cdot \cos(\omega t) - \left(\frac{E_0}{X_L}\right) \cdot \cos(\omega t)$$

Procedint de forma semblant que en el cas del circuit RLC-sèrie, obtindrem:

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}}$$

La impedància del circuit

$$\boxed{\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R}}\right)}$$

La fase entre la tensió i el corrent

EXERCICI a presentar

Agafeu el pas numero 5 de la diapositiva anterior i continueu fins arribar al resultat final indicat.